

HARVARD UNIVERSITY.



ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

ТОМЪ X. 1916.

Январь—Май, №№ 1–10.

Первая часть.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

TOME X. 1916.

Janvier—Mai, №№ 1–10.

Première partie.

ПЕТРОГРАДЪ.—PETROGRAD.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Май 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

ТИПОГРАФІЯ ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.
Вас. Остр., 9 лин., № 12.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ТОМЪ X.—TOME X.

Оглавленіе первой части.—Sommaire de la première partie.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

№. 1, 15 января.

Статьи:

№. 2, 1 февраля.

Доклады о научныхъ трудахъ:

№. 1, 15 Janvier.

Mémoires:

№. 2, 1 Février.

Comptes-Rendus:

Статьи:

№. 6, 1 апрѣля.

Статьи:

№. 7, 15 апрѣля.

Статьи:

Mémoires:

№. 6, 1 Avril.

Mémoires:

№. 7, 15 Avril.

Mémoires:

№. 8, 1 мая.

Доклады о научныхъ трудахъ:

Статьи:

№. 8, 1 Mai.

Comptes-Rendus:

Mémoires:

№. 9, 15 мая.

Статьи:

№. 10, 1 іюня.

Статьи:

№. 9, 15 Mai.

Mémoires:

№. 10, 1 Juin.

Mémoires:

1916. № 1.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

15 ЯНВАРЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

15 JANVIER.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ“.

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ“ (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences“ (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ“ помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ“ помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій“.

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій“. При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій“, не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія“ разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія“ разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія“ принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Египтологическія замѣтки.

VIII—XI.

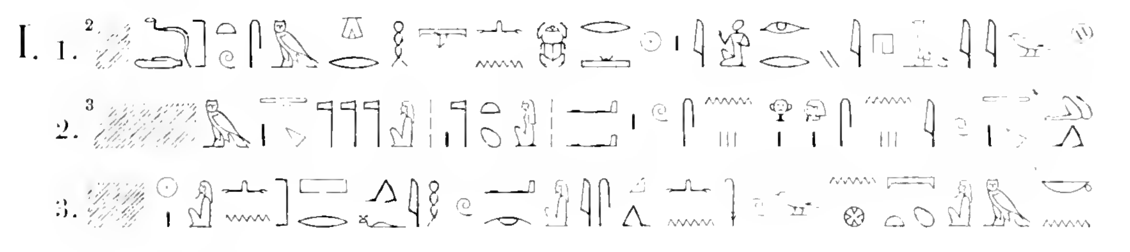
Б. А. Тураева.

(Представлено въ засѣданіи Историко-Филологическаго Отдѣленія 7 октября 1915 г.).

VIII.

Текстъ магическаго Papyrus Salt 825 Британскаго Музея.

До сихъ поръ этотъ текстъ, столь важный для изучающихъ египетскую религію, остается неизданнымъ, и ученымъ приходится довольствоваться переводомъ Birch'a, сдѣланнымъ 52 года тому назадъ[1]. Транскрипція іератическаго текста и переводъ нами сдѣланы по фотографіямъ, любезно предоставленнымъ намъ В. С. Голенищевымъ. Переводъ, комментарій и воспроизведеніе нѣсколькихъ мѣстъ папируса, содержащихъ магическіе рисунки, будутъ напечатаны въ Запискахъ Классическаго Отдѣленія Императорскаго Русскаго Археологическаго Общества, на средства котораго уже давно изготовлены таблицы. Печатаніе всей работы задерживалось вслѣдствіе отсутствія въ то время въ Петроградѣ іероглифическаго шрифта.



* См. ИАН. 1915, стр. 601.

[1] Sur un Papyrus Magique du Musée Britannique. Revue Archéologique, 1863, 119 и 417.

[2] Въ началѣ строкъ, повидимому, потеряно немного — не болѣе, какъ по два слова или 2—3 группы знаковъ.

[3] Можно дополнить ?

4.

5.

6.

7.

8.

II. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.[1]

[1] Все начало 8-ой строки потеряно, кромѣ верхнихъ частей знаковъ. Возстановленіе болѣе или менѣе надежно.

III. 1. … 2. … [1] … 3. … 4. … 5. … 6. … [2] 7. … [3] 8. … [4] 9. …

IV. 1. … 2. …

[1] Здѣсь и въ нѣкоторыхъ другихъ случаяхъ не различается детерминативъ мужскихъ и женскихъ божествъ — оба = … .

[2] Пропало приблизительно пять группъ; верхнія части двухъ послѣднихъ сохранились.

[3—4] Пропало $^3/_4$ строкъ.

[1] Не хватаетъ около двухъ группъ.

[2] Изглажено, оставивъ слѣды.

[3] Непонятный и испорченный знакъ, или два знака, изъ которыхъ второй .

6.

7.

8.

9.

10.

VI. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

[1] Вм. . [2] Написано іероглифически. [3] Знакъ по обыкновенію = іерат. .

VII.

[1] Іероглифически.

[2] Ориг. человѣкъ съ ножомъ. Möller, Paläogr. III. 19.

8.

9.

10.

VIII. 1.

2.

3.

4.

5.

6.

7. . . . .[1]

[1] Слѣдуетъ окончаніе строки и вся слѣдующая строка, написанныя энигматически.

9.[1] ...

IX. 1. ... 2. ... 3. ... 4. ... 5.[2] . . . . 6. ... 7. ... 8. ... 9. ... 10. ...

---

[1] Начало 9-й строки написано крупно полуіероглифами и представляетъ конецъ энигматической части: ... .

[2] Слѣдуетъ энигматическое.

X.

---

[1] Надъ изображеніемъ круга, въ которомъ написано: «сердце шакала, носъ свиньи, ноги обезьяны».

[2] Предъ изображеніемъ сосуда архаической формы, въ которомъ энигматическіе (?) іероглифы.

[3] Помѣщено въ овалѣ.

[4] Изображеніе крокодила съ страусовымъ перомъ на головѣ, стоящаго на кругѣ, въ которомъ изображенъ урей. Кругъ имѣетъ 8 выступовъ квадратной формы. Текстъ, находящійся слѣва, написанъ полуіероглифами.

XI. [1]

XII. [2]

[1] Подъ текстомъ прямоугольникъ, въ которомъ изображены связанными и привязанными другъ къ другу спинами сидящіе Сетхъ и азіатъ. Надъ ними голова гипопотама; на прямоугольникѣ попарно обращенныя 4 головы животнаго на длинныхъ шеяхъ. При Сетхѣ написано: . При азіатѣ: .

[2] Подъ текстомъ прямоугольникъ съ такими же изображеніями и подписями; вверху обращены другъ къ другу двѣ пары обезьянъ въ позѣ привѣтствія.

XIII. [1]

XIV. [2]

[1] Подъ текстомъ прямоугольникъ съ такими же изображеніями и подписями; наверху обращенныя другъ къ другу двѣ пары уреевъ.

[2] Подъ текстомъ прямоугольникъ съ такими же изображеніями и подписями; вверху 4 іероглифа огня, раздѣленные въ двѣ пары ближе къ угламъ.

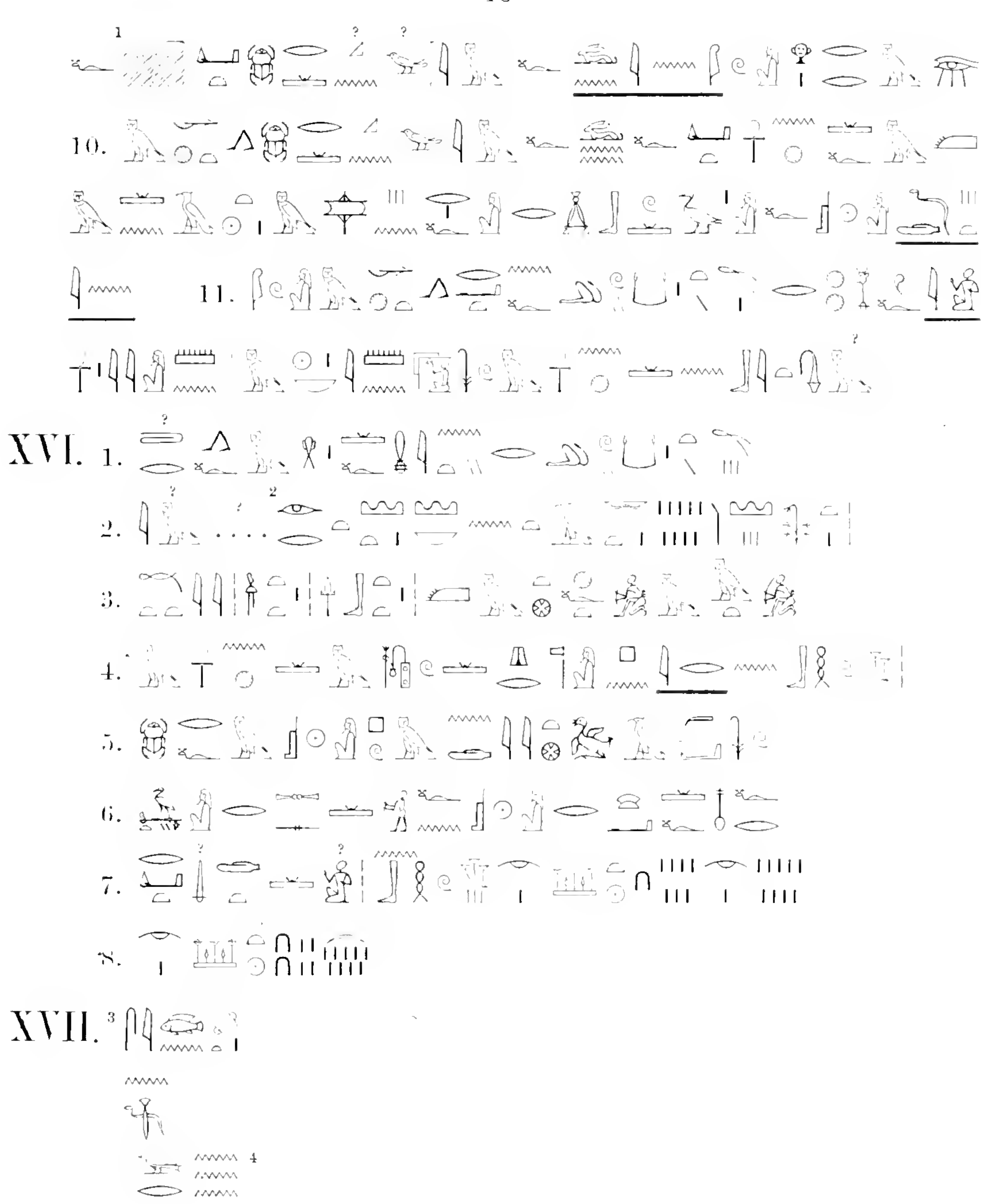
XV. 1.[1] … 2. … 3. … 4. …[2] 5. … 6. …[3] 7. … 8. …[4] 9. …

[1] Тексту предшествуетъ рисунокъ, изображающій могическій домъ Отриса. Богъ изображенъ стоящимъ на кругѣ надъ 9 луками. Предъ самымъ рисункомъ написано вертикальной строкой: … .

[2] Стерлось одно слово или два.

[3] Стерся одинъ знакъ.

[4] Стерлось и пропало два или три слова.



[1] Пропало одно слово.

[2] Недостаетъ около двухъ группъ.

[3] Написано іероглифами.

[4] Влѣво отъ текста изображеніе морского чудовища съ бородой, бычачьими ногами и хвостомъ въ видѣ урея; за нимъ сидящая женская фигура Нила (?) съ сосудомъ въ рукахъ и струями воды внизу.

[1]

[2]

[3]

XVIII.[4]

1. 2. 3. 4. 5. 6.

[5]

[1] Слѣва сидящая женская фигура съ куреніемъ въ одной рукѣ и струящейся водой въ другой; за ней стрѣлокъ со щитомъ.

[2] Вертикальная строка, писанная энигматически.

[3] Знакъ ⊙ вм. ⬭ !

[4] Эта часть текста написана вертикальными строками іероглифическими знаками.

[5] Въ оригиналѣ іероглифъ человѣка, вооруженнаго ножомъ. Möller. III, зн. 19.

7. 8. 9. 10. 11. 12. 13.

14. 15. 16. 17. 18. 19.

20. 21. 22. 23. 24. 25.

sic!

XIX.[2] 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8.

[1] —, какъ эти знаки читаются въ птолемеевскихъ текстахъ.

[2] Эта часть текста сохранилась хуже другихъ; многіе знаки неясны.

[3] Неясна одна група.

IX.

= копт. т, какъ суффиксъ 1-го лица единственнаго числа.

Еще Юнкеръ[1] указалъ на то, что изрѣдка въ дендераскихъ текстахъ римскаго времени попадается , какъ мѣстоименный суффиксъ 1 p. s. m. и f.: въ Эдфу онъ является таковымъ только для f. Намъ кажется, что въ двухъ знаменитыхъ стэлахъ Harris Британскаго Музея, относящихся ко времени Клеопатры и составленныхъ жрецомъ Имхотепомъ въ честь верховнаго жреца въ Мемфисѣ Пешерипитаха и его жены Тінмхотепъ, встрѣчается употребленіе въ качествѣ и суффикса, и pronomen absolutum 1-го лица единственнаго числа обоихъ родовъ, напр.:

а) Пешерипитахъ: l. 9: я пошелъ

l. 11: онъ пошелъ къ моему храму[2].

l. 12: Имхотепъ наградилъ меня.

l. 13: день въ который я преставился.

б) Тінмхотепъ: l. 12: онъ далъ мнѣ зачать.

l. 15: онъ похоронилъ меня.

Въ *а* — masc., въ *б* — fem. Изъ нихъ третій случай въ *а* и отчасти оба въ *б* употребляютъ , почти какъ коптскій глагольный суффиксъ т и какъ древнее «pronomen absolutum», остальные случаи подходятъ къ подмѣченнымъ Юнкеромъ. Была ли здѣсь ложная аналогія, или предъ нами просто орѳографическая аномалія, мы не рѣшаемся сказать, какъ и вообще вопросъ о коптскомъ т намъ не представляется окончательно рѣшеннымъ.

X.

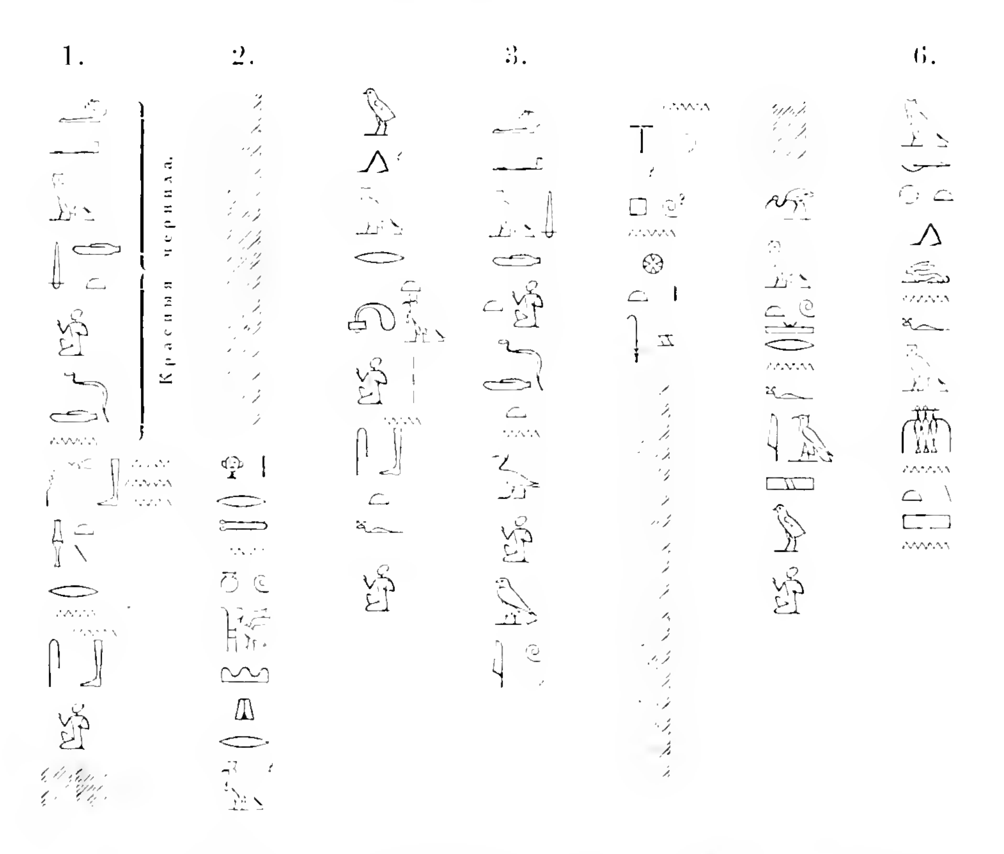
Два новыхъ литературныхъ имени эпохи Средняго Царства.

Въ Московскомъ Музеѣ изящныхъ искусствъ хранится небольшой (28 × 21 сант.) кусокъ папируса (№ 4654) съ остатками шести (двухъ на

[1] Sitzungsberichte Preuss. Akad. 1905, II, 804. Grammatik der Denderatexte, 37. § 48.

[2] Бругшъ (Thesaurus Inscriptionum, V, IX), не обративъ вниманія на это употребленіе, долженъ былъ перевести: «ging er in den Tempel von Te», превративъ суффиксъ въ собственное имя (чей?). Между тѣмъ уже Birch, Archaeologia, XXXIX, даетъ единственно возможный переводъ: «to my temple».

одной сторонѣ и 4-хъ на другой) вертикальныхъ строкъ[1] характернаго іератическаго письма Средняго царства типа классической эпохи конца XII дин., напримѣръ иллахунскихъ папирусовъ, отчасти берлинской рукописи Синухета и т. п. Текстъ, содержащійся на этомъ листкѣ, слѣдующій:



(1) *Начало словесъ, изреченныхъ* жрецомъ (богини) Сахметъ Ранъ-сенбомъ (Rn-snb). (2) . . . . надъ нижнимъ Ретену (Сиріей), начальникъ казны[2] Сенебтифи (Snb-tîfî). (3) Начало словесъ, изреченныхъ Си-Горомъ (S;-Ḥr), (4) гражданиномъ Южнаго Города[3], ... (5) имя его найдено. Возгласили его, (6) когда онъ былъ предъ . . . .

Предъ нами заглавія двухъ сборниковъ изреченій («λόγια») двухъ египетскихъ мудрецовъ, имена которыхъ столь типичны для эпохи Средняго царства. Первый, названный жрецомъ богини Сахметъ[4], поставленъ въ

[1] Имѣются слѣды не менѣе пяти изглаженныхъ строкъ, можетъ быть другого текста.

[2] Ср. Mariette, Catal. d'Abydos № 734.

[3] См. Legrain, Note sur Nouit-Risit. Recueil de travaux, XXVII, 183. Ѳивы.

[4] Жрецы Сахметъ въ это время вообще кажется пользовались славой ученыхъ. См. Papyr. Ebers, 99, 2.

какую то связь, для насъ неясную, въ виду порчи текста, съ Сепебтифи, начальникомъ Спріи (?). Этотъ титулъ прибавляетъ еще одно показаніе въ пользу болѣе интенсивныхъ, чѣмъ мы думаемъ, сношеній въ эту эпоху Египта съ Азіей. «Нижнее Ретену» кажется въ эту эпоху встрѣчается вообще впервые; въ эпоху XVIII д. оно служитъ обозначеніемъ равнины у Евфрата.

XI.

Къ формулѣ статуэтокъ «ушебти».

Хотя «ушебти» распространены по всѣмъ музеямъ и коллекціямъ въ огромномъ количествѣ, превосходящемъ другіе предметы египетской древности, и хотя ими занимаются еще съ шестидесятыхъ годовъ[1], до сихъ поръ не только нѣтъ еще посвященнаго имъ обстоятельнаго изслѣдованія, но и самое происхожденіе и значеніе ихъ остаются не вполнѣ выясненными. Поэтому болѣе или менѣе существенные варіанты текстовъ, начертанныхъ на нихъ, все еще могутъ быть полезны и должны быть собираемы. Случаи, когда VI гл. Книги Мертвыхъ или краткая надпись съ именемъ замѣняется другимъ текстомъ, конечно, рѣдки[2]. Кромѣ извѣстныхъ и указывавшихся, приведемъ еще два, подмѣченные нами среди богатой и разнообразной коллекціи «ушебти» голенищевскаго собранія.

а) Девять ушебти хорошей работы изъ крашеной глины, 18—19 см. в., принадлежащія жрецу Мина и относящіяся къ эпохѣ XIX дин. даютъ только одинъ разъ текстъ VI главы; остальныя восемь имѣютъ краткія надписи, называющія покойнаго ỉmȝḫy у 4-хъ геніевъ и Анубиса или влагающія въ уста ихъ обращеніе къ покойному, какъ на стѣнкахъ саркофаговъ. Подобное же мы встрѣтили на одной деревянной ушебти также жреца Мина, гдѣ начертана формула обращенія генія Мести. Ср. Boeser, Beschreibung... in Leiden, V, 30—31.

б) На двухъ небольшихъ (11 см. в.) фаянсовыхъ позднихъ статуэткахъ нѣкоего Псамметика имѣется сдѣланная черниломъ іератическая над-

---

[1] Birch, On sepulchral figures. Zeitschr. f. ägypt. Sprache, 1864—5 (едва ли не лучшая статья!). Mariette, Catalogue l'Abydos, 45—81. Loret, Les statuettes funéraires du Musée de Boulaq. Recueil de travaux, IV и V. И др.

[2] Кромѣ общеизвѣстнаго употребленія заупокойной формулы при XVIII дин., отмѣтимъ V главу на одной казанской статуэткѣ (№ 44 по моему описанію). 30-ю главу «сердца» — на 75 стр. собранія lady Meux (Budge, 159); обращеніе Гора къ мертвому Осирису обычнаго типа утреннихъ гимновъ «ты пробуждаешься» — (см. нашу 1-ую замѣтку и Erman, Hymnen an das Diadem. Abhandl. Preuss. Acad. 1911. 16—17) — Mariette, Catal. Abydos, 51.

пись, дающая совершенно особую формулу: [hieroglyphs] ?.. [hieroglyphs] «дѣлать»? . . съ Осирисомъ. (Одинъ знакъ неясенъ).

в) Надпись сзади одной небольшой (12, 7 см.) фигурки изъ зеленаго фаянса саисскаго времени даетъ только: sḥd Wsr [hieroglyphs] «да будетъ озаряемъ Осирисъ Pꜣ-dppt, дѣлающій свою (м. б. «дѣлай его» работу».

Изъ варіантовъ VI гл. Книги Мертвыхъ эпохи Новаго Царства остановлюсь только на двухъ.

1. Нижняя часть большой ушебти «писца божественной книги» (іерограммата) въ храмѣ Амона — Хонсу содержитъ тщательно начертанную VI главу, конецъ которой, вмѣсто обычнаго такъ какъ. . . «я здѣсь» даетъ: [hieroglyphs] «я — второй Осирисъ, Хонсу».

2. Довольно большая статуэтка изъ лиловато-синяго фаянса съ бѣлыми іероглифами, нѣкоего [hieroglyphs] даетъ интересное сочетаніе VI-й главы съ частью древняго обращенія къ богамъ свиты Осириса, которое Birch издалъ по фигуркамъ Аменхотепа III въ Британскомъ музеѣ[1]. Послѣ фразы о перевозѣ песка на западъ, читаемъ:

[hieroglyphs]

«находясь предъ лицомъ[2] достойнаго, Осириса Anin, ... (скажи)[3] «я здѣсь». Поминайте меня[4] ежедневно предъ лицомъ Онуфрія».

Отмѣтимъ еще на одной большой деревянной статуэткѣ нѣкоего [hieroglyphs], носившаго титулъ [hieroglyphs] въ формулу sḥd [hieroglyphs] = «да просвѣтится лицо м. р.» и, наконецъ на двухъ замѣчательныхъ раскрашенныхъ деревянныхъ портретныхъ ушебти жреца [hieroglyphs], вар. [hieroglyphs] въ ногахъ изображеніе колѣнопреклоненныхъ Исиды и Нефтиды.

---

[1] Zeitschrift für aegyptische Sprache 1864, 91.

[2] Возможно и чтеніе [hieroglyphs], какъ у Аменхотепа, что будетъ означать: «когда является».

[3] Ср. Mariette, Catalogue d'Abydos, № 424—427, 427.

[4] Возможно: «да воспоминается онъ». . .

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О строеніи органической эвтектики.

Н. Н. Ефремова.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 2 сентября 1915 г.).

Часть II.*

Въ предыдущей статьѣ мною были изложены результаты изученія діаграммъ плавкости и микроструктуры бинарныхъ смѣсей камфоры съ:

1) бензойной кислотой, 2) паранитранилиномъ, 3) парадибромбензоломъ, 4) фталевымъ ангидридомъ, 5) нафталиномъ, 6) ацетамидомъ, 7) салициловой кислотой и 8) метиловымъ горчичнымъ масломъ, а также описаны и самые методы изслѣдованія.

Настоящее изслѣдованіе составляетъ продолженіе предыдущаго и заключаетъ въ себѣ изложеніе дальнѣйшаго опытнаго матеріала, полученнаго мной для слѣдующихъ комбинацій:

9) камфора — паратолуидинъ
10) » метанитранилинъ
11) » ортонитранилинъ
12) » метадинитробензолъ
13) » коричная кислота
14) » антраценъ
15) » тіокарбанилидъ
16) » 1-3-5 тринитробензолъ
17) » метахлорнитробензолъ
18) » ортохлорнитробензолъ.

Перехожу прямо къ описанію результатовъ опытовъ.

---

* См. ИАН. 1915, стр. 1309.

9. **Камфора — паратолуидинъ** (таблица 9, діаграмма 9).

Температура плавленія *p*-толуидина по даннымъ Штедлера[1] 42,5°. Препаратъ Кальбаума плавился у меня точно при 45,0°. Отъ прибавленія камфоры къ *p*-толуидину температура выдѣленія первыхъ кристалловъ понижается до эвтектической точки, лежащей при 2,5° и содержаніи толуидина въ 42% мол. Въ этой точкѣ діаграммы продолжительность вторичной кристаллизаціи достигаетъ максимальнаго значенія и затѣмъ быстро убываетъ, но въ смѣси въ 47,5% молекулярныхъ *p*-толуидина все же отчетливо замѣтна. Ординатѣ въ 50% мол. отвѣчаетъ переходная точка, доказывающая собой существованіе молекулярнаго соединенія (1 : 1) состава $C_{10}H_{16}O . p\text{-}CH_3C_6H_4NH_2$, плавящагося съ разложеніемъ.

На кривой охлажденія въ 50% мол. имѣется лишь одна остановка при температурѣ 3,8°, замѣтная также и во всѣхъ слѣдующихъ смѣсяхъ съ

Таблица 9.

Камфора — паратолуидинъ.

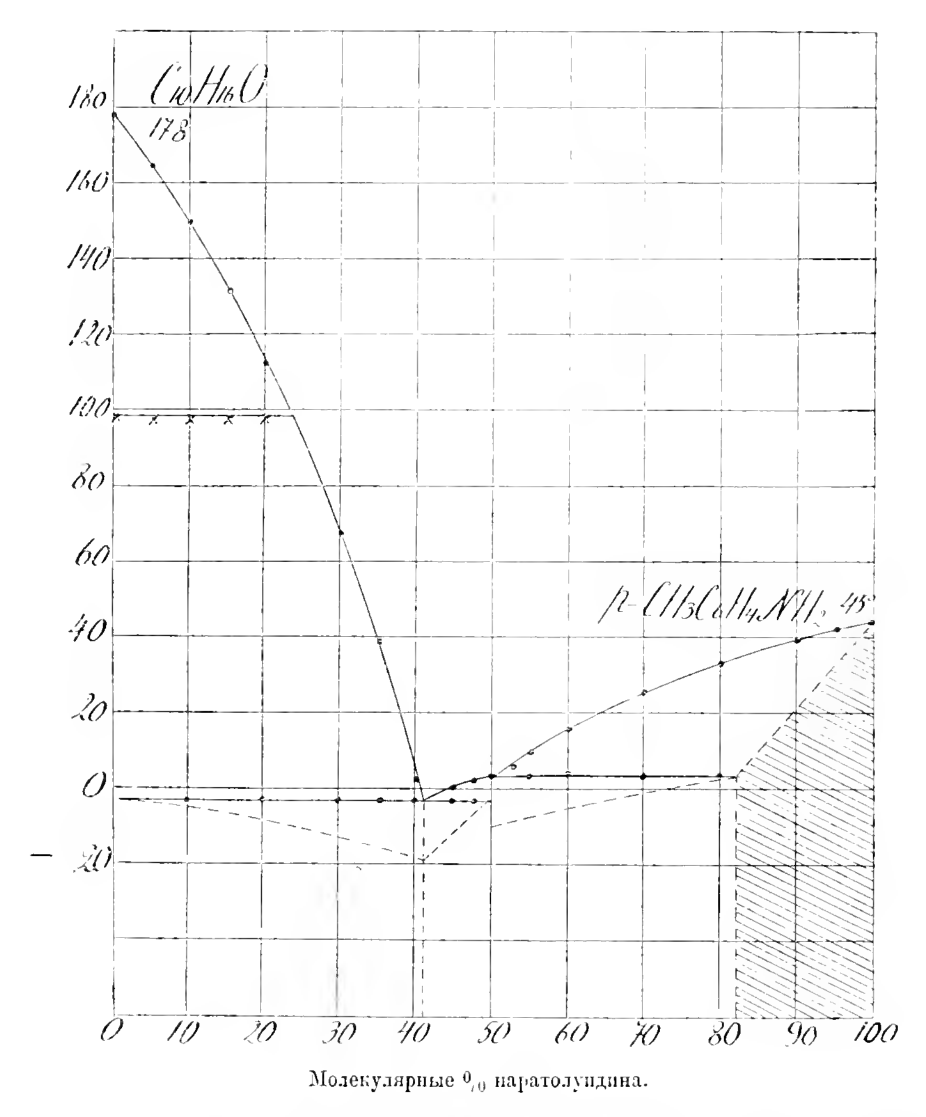
Навѣска 5 гр.

№	Содержаніе p-толуидина.		Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура затвердѣванія эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
	Молекулярные %.	Вѣсовые %.					
1	0	0	178,0°	98,1	—	—	
2	5.0	3,57	164.3	97.5	—	—	
3	10,0	7,25	150,1	97,1	—7.0°	20	
4	15.0	11.10	131,8	96,5	—5,0	30	
5	20,0	11,96	112,6	96,4	—2,5	40	
6	30,0	23.17	67,8	—	—2,5	60	
7	35,0	27.61	38,8	—	—2,5	80	Эвтектическая точка
8	40,0	31,94	2,5	—	—2,5	110	42% мол. p-толуидина.
9	45,0	37.31	0,0	—	—2,5	70	
10	47,5	39.31	2.3	—	—2,5	30	
11	50,0	41,31	3.4	—	—	200	
12	52,5	43,78	5.8	—	+3,8	180	
13	55,0	46.25	9,1	—	+3,8	160	
14	60.0	51,36	16.0	—	+3,8	120	
15	70,0	62.16	26,8	—	+3,8	80	
16	80.0	73,80	34,2	—	+3,8	30	
17	85,0	80.08	37,4	—	—	-	Предѣльная концен-
18	90.0	86,36	40.2	—	—	—	трація твердаго раствора
19	95,0	93.04	42.5	—	—	—	18% молек. камфоры.
20	100.0	100,0	45.0	—	—	—	

[1] Stadeler. Arndt. J. 1864, 125, а также Mills, Phil. Mag. (5) 14. 27 (тем. плав. 42.77°).

возрастающимъ содержаніемъ *p*-толуидина до 80% мол. и постепенно уменьшающая свою продолжительность. Графическимъ построеніемъ граница ея исчезновенія опредѣляется при содержаніи въ смѣси 82% *p*-толуидина. Изломъ кривой плавкости въ точкѣ 50% мол. такъ незначителенъ и въ

Діаграмма 9.



Молекулярные % паратолуидина.

то же время температура кристаллизаціи эвтектики — (2,5°) такъ близка къ температурѣ переходной точки (3,8°), что для выясненія вида діаграммы равновѣсія пришлось обратиться къ изученію микроструктуры. Задача эта не является простой по причинѣ отсутствія у нашего микроскопа холодильныхъ

приспособленій; приходилось выдерживать на холоду микроскопическіе препараты и затѣмъ уже по возможности быстро наблюдать ихъ въ микроскопѣ. Оказалось, что въ области 48%—80% *p*-толуидина ясно различается новая кристаллическая фаза, не похожая на кристаллы *p*-толуидина. Это обстоятельство сдѣлало несомнѣннымъ существованіе соединенія *p*-толуидинъ — монокамфора. Точно такой случай имѣлся и для системы, ранѣе изученной, именно камфора — гидрохинонъ, гдѣ правильное рѣшеніе вопроса о существованіи соединенія гидрохинонъ — монокамфора[1] возможно только при помощи систематическаго изученія микроструктуры. Камфора повидимому въ твердомъ состояніи *p*-толуидина не растворяетъ. Наоборотъ со стороны послѣдняго образуется твердый растворъ предѣльной концентраціи до 18% молек. камфоры. Полиморфное превращеніе камфоры замѣтно въ смѣсяхъ до содержанія *p*-толуидина въ 20% молек.

10. **Камфора — метанитранилинъ** (таблица 10, діаграмма 10).

Мета-нитранилинъ по Креману и Родонису[2] плавится при 110°; Кромптонъ и Витлей[3] даютъ число 114°. Кернеръ[4] — 109,9°; Гюбнеръ[5] также 114,0°. Препаратъ Кальбаума плавился у меня точно при 114,0°.

Эвтектика плавится въ этой системѣ при 49,5° и содержитъ 30% молекулярныхъ мета-нитранилина. Эвтектическая кристаллизація ясно замѣтна въ смѣси, содержащей всего лишь 5% мета-нитранилина. что вмѣстѣ съ графическимъ построеніемъ продолжительности остановки совершенно исключаетъ существованіе твердыхъ растворовъ со стороны камфоры. Полиморфное превращеніе отчетливо выражено до содержанія въ смѣсяхъ мета-нитранилина въ 23% молекулярныхъ.

Нитранилинъ съ камфорой даетъ твердый растворъ концентраціей до 8.2% молекулярныхъ.

Фотографія № 1, таблица I представляетъ препаратъ, содержащій 5% камфоры (95% мета-нитранилина). Совершенно однородные кристаллы твердаго раствора. Подъ микроскопомъ окрашены въ желто-коричневые

---

[1] Н. Н. Ефремовъ. Камфора и фенолы. Изв. С.-Пб. Политехническаго Института. И. П. В. 1912 г. Т. XVIII, 391.

[2] Kremann u. Rodonis. Monatsh. f. Chem. **27**. 125. 1906.

[3] Crompton a. Whiteley. Journ. Chem. Society. **67**, 327, 1895.

[4] Körner. Beilstein's Handb. B. II. 318, III Aufl.

[5] Hübner. Lieb. Annal. **208**, 298.

Таблица 10.

Камфора — метанитранилинъ.

Навѣска 7 гр.

№	Содержаніе *m*-нитранилина. Молекулярные %.	Содержаніе *m*-нитранилина. Вѣсовые %.	Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
1	0	0	178,0°	98,1	—	—	
2	1,0	0,90	174,8	98,0	—	—	
3	3,0	2.73	169,1	97,8	49,2°	20	
4	5,0	4,56	162,9	97,4	49,7	35	
5	10.0	9,17	145,3	97,6	49,5	80	
6	20,0	18,50	104.6	96,8	49,7	200	
7	25,0	23,23	81.7	—	49,5	280	
8	30,0	28,01	57,6	—	51,0	350	Эвтектическая точка 31,4% мета-нитранилина.
9	32,0	29,93	51,0	—	—	380	
10	35,0	32,85	57,1	—	50,0	350	
11	40,0	37,70	61,9	—	50,0	290	
12	45,0	42,62	72,0	—	50,0	250	
13	50,0	47,58	78,1	—	50,0	220	
14	60,0	57,66	87,0	—	51,0	150	
15	70,0	67,93	95,1	—	49,0	80	
16	80.0	78,41	101,0	—	50,0	60	
17	90,0	89,10	107,2	—	50,0	20	
18	95,0	91,45	110,5	—	—	—	Предѣльная концентрація твердаго раствора 8,2% мол. камфоры.
19	97,0	96,72	112,1	—	—	—	
20	100	100	114,0	—	—	—	

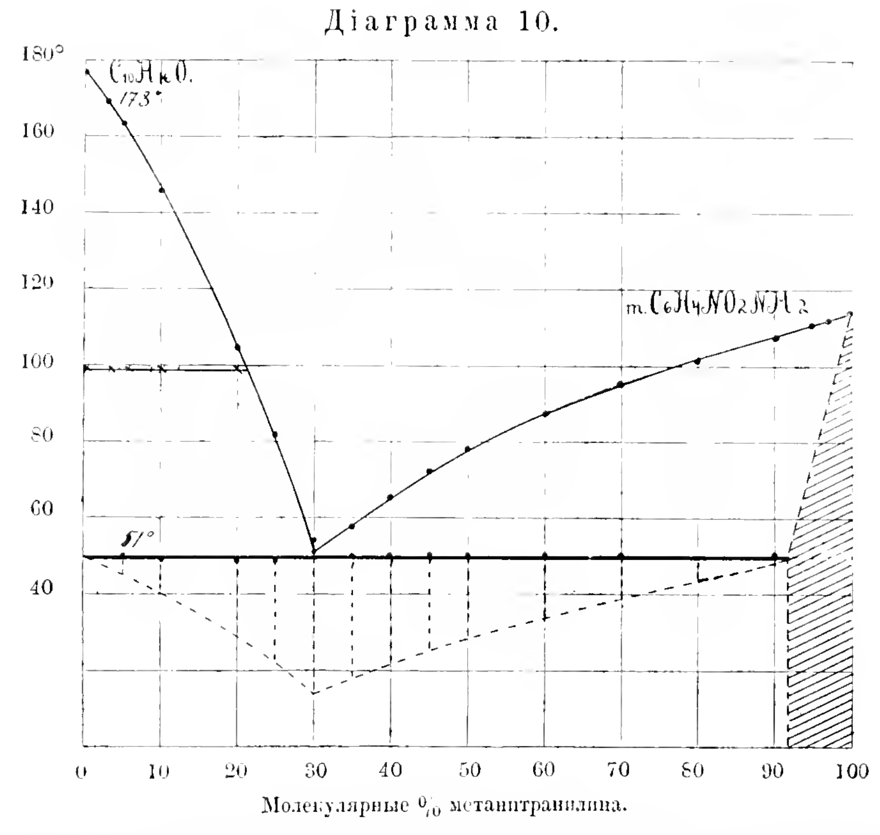
тона. Благодаря различной окраскѣ, грани между отдѣльными кристаллами видны совершенно отчетливо. Свѣтъ простой; увеличеніе 60.

Фотографія № 4, таблица I — 20% мета-нитранилина. Крупныя, свѣтлыя звѣзды камфоры на фонѣ болѣе темной флюидной эвтектики.

Фотографія № 3, таблица I — та же самая картина, но въ поляризованномъ свѣтѣ. Здѣсь уже выдѣленія камфоры темны, а эвтектика сравнительно ярко окрашена; обѣ ея составляющія непосредственно подъ микроскопомъ видны совершенно отчетливо. Увеличеніе въ обоихъ случаяхъ 75. Препаратъ охлаждался въ обыкновенныхъ условіяхъ (сравнительно быстро) и именно по этой причинѣ эвтектика носитъ сферолитовый характеръ. При медленномъ охлажденіи структура ея получается перлитовая, что и видно на фотографіи № 2.

Фотографія № 2, таблица I. Чистая эвтектика при большомъ увеличеніи. Чрезвычайно тонкій слой; сиягъ промежутокъ между кристаллами мета-нитранилина. Подъ микроскопомъ камфора рѣзко отличается отъ кристалликовъ мета-нитранилина, благодаря различной поляризаціонной окраскѣ. Свѣтъ простой; увеличеніе 450.

Діаграмма 10.



Фотографія № 1, таблица II—60% мета-нитранилина. Увеличеніе 90, свѣтъ простой. Свѣтлые (ярко-желтые) характерные призматическіе кристаллы твердаго раствора предѣльной концентраціи, не отличающіеся по виду отъ чистаго мета-нитранилина. Между ними болѣе темная эвтектика. При значительномъ избыткѣ въ смѣси мета-нитранилина въ эвтектической массѣ кристаллики нитранилина получили наибольшее развитіе и видны совершенно отчетливо. Камфора, неимѣющая при застываніи эвтектики центровъ кристаллизаціи, заняла подчиненное положеніе и заполняетъ пустоты и промежутки между кристаллами. Картина весьма характерная и *нормальная* для тѣхъ случаевъ, когда компоненты обладаютъ различной скоростью кристаллизаціи.

11. **Камфора — ортонитранилинъ** (таблица 11, діаграмма 11).

Температура плавленія орто-нитранилина по Креману и Родонису[1] 68.0°; по Ванъ-деръ-Линдену[2] 69,5° и по Турнеру[3] 71,5°.

---

[1] L. c.

[2] Van-der-Linden. Landolt. Bernst. Tabellen. 4 Aufl. 507.

[3] Turner. Beilstein's Handb. B. II. 318, III Aufl.

Таблица 11.

Камфора — ортонитранилинъ.

Навѣска 7 гр.

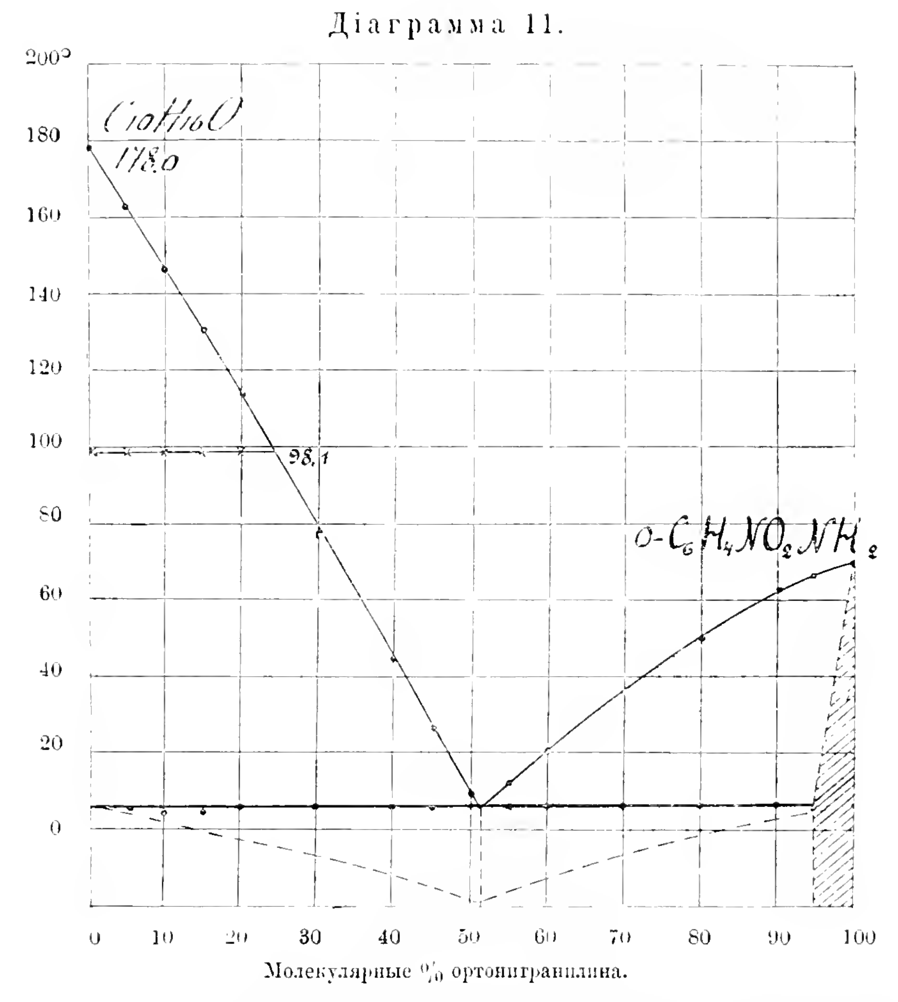
№	Содержаніе орто-нитранилина. Молекулярные %.	Вѣсовые %.	Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
1	0	0	178,0°	98.1°	—	—	
2	3,0	2,73	169,0	97.7	—	—	
3	5,0	4,56	162,7	97.5	2.5°	20	
4	10,0	9,17	146.6	96,9	3.4	40	
5	15,0	13,84	130,0	96,8	5,5	60	
6	20,0	18.50	113.5	96,6	6,0	80	
7	25,0	23,23	97.7	—	6,0	110	
8	30,0	28,01	76,5	—	6,0	140	
9	40,0	37,70	44,9	—	6,0	210	
10	45,0	42,62	27.5	—	6.0	240	Эвтектическая точка 50.5% молек. орто-нитранилина.
11	50,0	47,58	9.8	—	6,0	290	
12	60.0	57,66	20,0	—	6.5	210	
13	70,0	67,93	35.4	—	6,0	150	
14	80,0	78,41	49.9	—	6,0	80	
15	90,0	89,10	63,0	—	6,0	30	
16	95,0	94.45	66.6	—	6.0	—	Предѣльная концентрація твердаго раствора 5% молек. камфоры.
17	97,0	96,62	68,9	—	—	—	
18	100	100	69,4	—	—	—	

Препаратъ Кальбаума плавится при 69,4° и даетъ прекрасную остановку на кривой охлажденія.

Эвтектическая остановка ясно замѣтна въ смѣси съ содержаніемъ въ 5% орто-нитранилина, хотя температура ея значительно понижена противъ нормы, и только, начиная съ 20% температура кристаллизаціи эвтектики становится постоянной. Эта склонность къ переохлажденію свойственна орто-нитранилину и не имѣетъ мѣста въ смѣсяхъ камфоры съ пара и мета-нитранилинами. Эвтектика плавится при 6.0°, такъ что смѣси отъ 45% и до 55% жидки при комнатной температурѣ. Графическимъ построеніемъ продолжительности эвтектической остановки составъ эвтектики опредѣляется въ 51% молекулярныхъ орто-нитранилина. Со стороны камфоры твердыхъ растворовъ не обнаружено. Полиморфное превращеніе можно прослѣдить отъ чистой камфоры до смѣси съ содержаніемъ въ 25% молекулярныхъ орто-нитранилина.

Орто-нитранилинъ растворяетъ въ себѣ до 5% камфоры. Микроструктура вполнѣ отвѣчаетъ діаграммѣ плавкости и въ общемъ совершенно подобна той. которая имѣетъ мѣсто въ системѣ 10. Фотографированіе однако

Діаграмма 11.



Молекулярные % ортонитранилина.

здѣсь сопряжено съ нѣкоторыми неудобствами въ виду низкой температуры плавленія эвтектики, а потому снимковъ здѣсь я и не привожу. Разсматривая совмѣстно бинарныя системы камфора — три изомерные нитранилина, замѣчаемъ повышеніе способности у болѣе высокоплавкихъ изомеровъ растворять камфору въ твердомъ состояніи; такъ:

орто-нитранилинъ плавится при	69.4°	растворяетъ	5%	камф.
мета-нитранилинъ » »	114,0°	»	8,2%	»
пара-нитранилинъ » »	147.4°	»	10,5%	»

Здѣсь замѣтна даже нѣкоторая пропорціональность, именно: повышеніе температуры плавленія между орто и мета изомерами 44.6° увеличиваетъ концентрацію твердаго раствора на 3,2%. Повышенію же температуры плавленія между мета и пара въ 33,4° по этой пропорціи должно соотвѣт-

ствовать увеличеніе концентраціи на 2,42%; въ дѣйствительности концентрація увеличивается на 2,5%.

Составы эвтектикъ въ этихъ трехъ системахъ и температуры ихъ плавленія таковы:

орто	51%	температура плавленія	6.0°
мета	30%	» »	49.5°
пара	31.5%	» »	76.0°

О самыхъ препаратахъ нитранилиновъ нужно замѣтить слѣдующее. Послѣ двукратной перекристаллизаціи небольшихъ ихъ количествъ изъ горячей воды, температуры плавленія ихъ не повысились; всѣ они превосходно кристаллизуются и даютъ совершенно горизонтальную остановку на кривыхъ охлажденія.

Это обстоятельство, являясь лучшимъ показателемъ высокой степени чистоты нитранилиновъ, позволило пользоваться ими для градуировки свѣточувствительной бумаги пирометра.

12. **Камфора — метадинитробензолъ** (таблица 12, діаграмма 12).

Температура плавленія мета-динитробензола по Шредеру[1] — 89,8°, по Креману[2]—89,5° и 91,0; по Кромптону и Витлею[3] — 90,2° и по Б. Н. Меншуткину[4] — 90°. Перекристаллизованный изъ спирта препаратъ Кальбаума плавился при 90,1°. Эвтектическая точка при температурѣ 50,5° отвѣчаетъ содержанію мета-динитробензола въ 38,5% молек. Со стороны камфоры твердыхъ растворовъ не обнаружено. Полиморфное превращеніе удается прослѣдить въ смѣсяхъ до 25% молекулярныхъ метадинитробензола. При дальнѣйшемъ увеличеніи его содержанія изъ расплавленной массы выдѣляется прямо гексагональная модификація камфоры. Мета-динитробензолъ растворяетъ въ твердомъ состояніи до 8% молекулярныхъ камфоры.

Фотографія № 5, таблица I и № 6, таблица I представляютъ одно и то же мѣсто препарата съ 5% мета-динитробензола, но № 6 снята въ простомъ свѣтѣ, а № 5 въ поляризованномъ.

Въ первомъ случаѣ на рисункѣ видны крупныя, свѣтлыя поліэдры

---

[1] Schröder. Zeitschr. physik. Chem. 11, 456, 1893.
[2] Kremann. Monatsh. f. Chem. 29, 863, 1908; 25, 1246, 1904.
[3] Crompton a. Whiteley. Journ. Chemic. Society 67, 327, 1895.
[4] Б. Н. Меншуткинъ. Извѣст. С.-ПБ. Политехн. Инст. Т. XIII. 411. 1910.

Таблица 12.

Камфора — метадинитробензолъ.

Навѣска 7 гр.

№	Содержаніе мета-динитробензола. Молекулярные %.	Вѣсовые %.	Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	3,0	3,30	168,5	97,8	—	—	
3	5,0	5.50	164,0	97.7	46.0°	40	
4	10.0	10.93	149,1	97,2	49.6	60	
5	15.0	16,27	133.5	96,9	50,0	100	
6	20,0	21,64	117,0	96,8	51.0	150	
7	25,0	27,00	100,5	—	50.5	200	
8	30,0	32.14	82,2	—	50,5	250	
9	35.0	37,28	64,3	—	50,5	270	
10	40,0	42,42	51,4	—	50,5	380	Эвтектическая точка 38,5$^0/_0$ мол. мета-динитробензола.
11	45,0	47,46	54.1	—	50,5	330	
12	50,0	52,50	57,4	—	51,0	290	
13	60,0	62,38	64,9	—	51,0	200	
14	70,0	72,06	71,0	—	51,5	120	
15	80,0	81.55	77.5	—	49,5	70	
16	90,0	90,86	83,7	—	48,5	—	Предѣльная концентрація твердаго раствора 8$^0/_0$ молек. камфоры.
17	95,0	95,45	87,4	—	—	—	
18	97,0	97,27	88,6	—	—	—	
19	100	100	90,1	—	—	—	

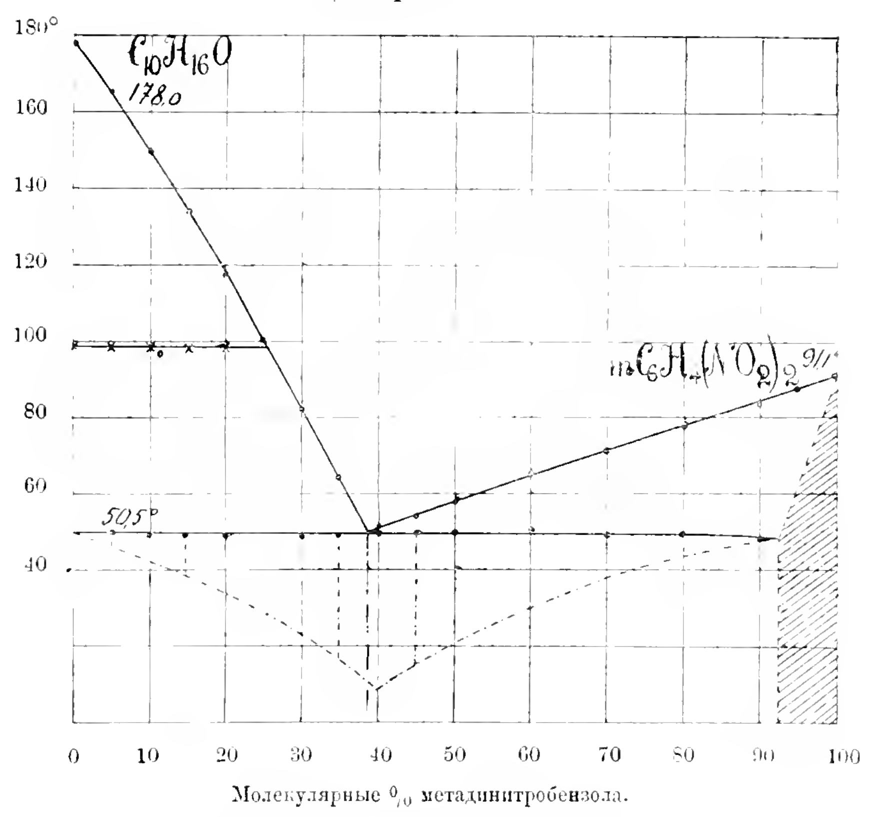
камфоры и между ними тонкія, темныя прослойки эвтектики, расположенныя между гранями зеренъ. Что эти темныя линіи представляютъ именно эвтектику явствуетъ изъ микрофотографіи № 5. Здѣсь въ поляризованномъ свѣтѣ зерна камфоры представляются темными, эвтектика же, заключающая въ себѣ значительное количество мета-динитробензола, сильно дѣйствующаго на поляризованный свѣтъ, на этомъ снимкѣ является свѣтлой. Непосредственно подъ микроскопомъ картина еще болѣе рѣзкая, такъ какъ зерна камфоры сѣраго цвѣта (въ поляризованномъ свѣтѣ), а эвтектика окрашена ярко въ желтые, зеленые и красные тона. Если бы между гранями кристалловъ не была заключена эвтектика, а просто было ничѣмъ незаполненное пространство, то въ поляризованномъ свѣтѣ оно представлялось бы совершенно черными линіями и, наоборотъ, болѣе свѣтлыми оказались бы поліэдры камфоры. Увеличеніе 80.

Фотографія № 2, таблица II. Препаратъ съ 20$^0/_0$ мета-динитробензола. Свѣтъ простой; увеличеніе 90.

Очень крупные прекрасно развитые кристаллы камфоры; замѣтны три



Діаграмма 12.



Молекулярные % метадинитробензола.

направленія роста кристалловъ. Промежутки заполнены прекрасно образованной точечной эвтектикой очень тонкаго нѣжнаго строенія. Подъ микроскопомъ картина въ высшей степени красива: въ эвтектической массѣ отчетливо видны сѣровато-желтые кристаллики камфоры и очень ярко окрашенныя таблички мета-динитробензола. Уже на ранѣе приведенныхъ фотографіяхъ встрѣчалась подобная структура. Она чрезвычайно типична не только для органическихъ веществъ, но и для металловъ и солей. Увеличеніе 90: свѣтъ простой.

Фотографія № 1, таблица III снимокъ съ препарата въ 40% молекулярныхъ мета-динитробензола (почти чистая эвтектика). Обычно (это явленіе наблюдается не только въ приводимыхъ въ настоящей статьѣ системахъ, но и во многихъ другихъ, структуру которыхъ приходилось изучать), чистая эвтектика двухъ органическихъ веществъ представляетъ собой въ расплавленномъ состояніи сравнительно густую жидкость. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ, напр. въ смѣсяхъ камфоры съ гидрохинономъ, пирокатехиномъ, ментоломъ, бензофенономъ, она густотой напоминаетъ касторовое

масло. Въ смѣси же камфоры съ азобензоломъ получается темно-красная жидкость (студень), невыливающаяся изъ пробирки и не при какихъ условіяхъ не кристаллизующаяся. При быстромъ охлажденіи подобныя жидкости могутъ застывать въ стекло. При медленномъ охлажденіи она кристаллизуется въ сферолитахъ, при чемъ иногда всего лишь отъ одного, двухъ центровъ кристаллизаціи. Иногда прикосновеніемъ холодными щипчиками къ покровному стеклышку микроскопическаго препарата удается вызвать образованіе одного центра кристаллизаціи и тогда растущій отъ него сферолитъ покрываетъ собой все стеклышко. Примѣры подобной кристаллизаціи были приведены въ статьѣ: «Камфора и фенолы»[1]. Конечно, въ смѣсяхъ, содержащихъ избыточный компонентъ противъ состава эвтектики, условія кристаллизаціи всегда будутъ нѣсколько иныя, ввиду присутствія центровъ кристаллизаціи для эвтектики (послѣ выдѣленія 1-хъ кристалловъ). Къ этому вопросу еще придется вернуться подробнѣе ниже въ особой главѣ. На приводимой здѣсь фотографіи представлены такіе сферолиты чистой эвтектики (камфора — мета-динитробензолъ). Видны 2 центра кристаллизаціи и одинъ малый, почти правильно развившійся сферолитъ. Въ зависимости отъ толщины застывшаго слоя, а также отъ расположенія мельчайшихъ кристалликовъ (составляющихъ эвтектики) самые сферолиты имѣютъ различную окраску, но всегда лишь желто-коричневыхъ тоновъ. Свѣтъ простой; увеличеніе 30.

Фотографія № 2, таблица III 60% мета-динитробензола. Длинныя, свѣтлыя иглы твердаго раствора (камфоры въ мета-динитробензолѣ) предѣльной концентраціи и въ промежуткахъ темная, толстая лучистая масса эвтектики; двойственная структура послѣдней видна не отчетливо; причина этого явленія лежитъ въ большой, скорости кристаллизаціи мета-динитробензола, въ сравненіи съ камфорой. Вторичное его выдѣленіе изъ эвтектической магмы опредѣлило собой лучистое направленіе кристалловъ, а камфора, выдѣлившаяся нѣсколько позже, заняла подчиненное положеніе, заполнивъ лишь капиляры между мелкими иголочками мета-динитробензола; такая структура уже описана въ системѣ камфора-фталевый ангидридъ. Свѣтъ простой; увеличеніе 60.

Фотографія № 3, таблица III — 70% мета-динитробензола; увеличеніе 70; свѣтъ простой. Свѣтлыя иглы того же твердаго раствора, но количество ихъ нѣсколько больше. Шлифъ замѣтно тоньше, чѣмъ предыдущій и здѣсь въ темной массѣ эвтектики, даже на фотографіи, замѣтны обѣ

---

[1] Н. Н. Ефремовъ. Камфора и фенолы. Изв. С.-ПБ. Политехническаго Института Т. XVIII, 391, 1912 г.

структурныя составляющія эвтектики. Препаратъ охлаждался весьма медленно и подъ микроскопомъ сравнительно крупные кристаллики камфоры видны совершенно отчетливо.

13. **Камфора — коричная кислота** (таблица 13, діаграмма 13).

Коричная кислота приготовлена въ нашей лабораторіи по методу Перкина; дважды перекристаллизованная изъ горячей воды она плавится при 133,0°. Эвтектика содержитъ 36,5% молекулярн. коричной кислоты и плавится при температурѣ 71,5°. Эвтектическая остановка отчетливо выражена при содержаніи въ смѣси 5% молекулярн. коричной кислоты. Кривая продолжительности вторичной кристаллизаціи пересѣкаетъ ординату чистой камфоры, что указываетъ на полное отсутствіе твердыхъ растворовъ со стороны камфоры, наоборотъ, коричная кислота растворяетъ въ твердомъ видѣ до 12,5% молекулярныхъ камфоры.

Таблица 13.

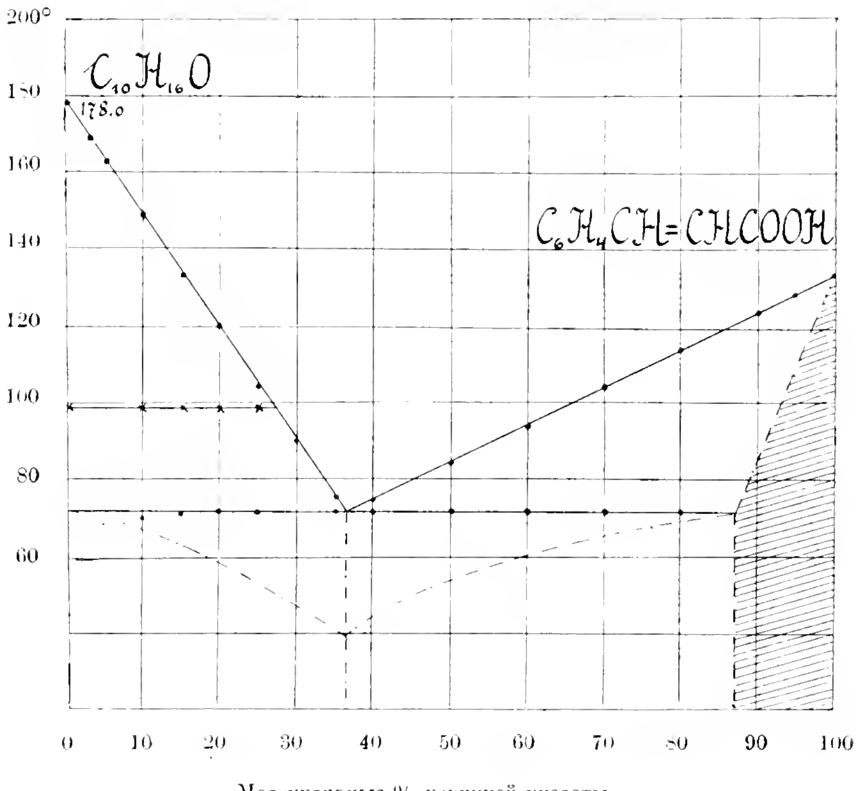
Камфора — коричная кислота.

Навѣска 5 гр.

№	Содержаніе коричной кислоты. Молекулярные %	Содержаніе коричной кислоты. Вѣсовые %	Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура застыванія эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	3,0	2,96	168,7	98,0	?	—	
3	5,0	4,87	162,4	98,0	68,5°	30	
4	10,0	9,76	147,0	97,8	70,0	60	
5	15,0	14,67	132,6	98,0	71,0	100	
6	20,0	19,58	118,6	97,7	71,5	150	
7	25,0	24,51	104,0	—	71,5	210	
8	30,0	29,44	88,8	—	71,5	260	Эвтектическая точка 36,6% молек. коричной кислоты.
9	35,0	34,40	75,1	—	72,0	310	
10	40,0	39,36	74,8	—	72,0	350	
11	50,0	49,33	84,0	—	71,5	170	
12	60,0	59,36	98,4	—	71,5	100	
13	70,0	69,43	103,5	—	71,5	50	Предѣльная концентрація твердаго раствора 12,5% молек. камфоры.
14	80,0	79,50	114,0	—	71,5	20	
15	90,0	89,62	123,2	—	—	—	
16	95,0	94,86	128,3	—	—	—	
17	100	100	133,0	—	—	—	

Полиморфное превращеніе замѣтно до 25% молекулярн. коричной кислоты.

Діаграмма 13.



Молекулярные % коричной кислоты.

Фотографія № 4, таблица III снята съ препарата, содержащаго 70% коричной кислоты. Бѣлые, широкіе призматическіе кристаллы твердаго раствора предѣльной концентраціи (12,5% камфоры) и болѣе темная эвтектика, застывшая сравнительно толстымъ слоемъ. Тѣмъ не менѣе даже здѣсь можно въ темной массѣ различить мелкіе кристаллики камфоры. Увеличеніе 90; свѣтъ простой.

Фотографія № 1, таблица IV — 60% коричной кислоты. Очень удачный тонкій препаратъ. Картина въ сущности та же, что и на предыдущемъ снимкѣ, но въ промежуткахъ между прекрасно развитыми длинными свѣтлыми кристаллами первыхъ выдѣленій, ясно видны обѣ структурныя составляющія эвтектики. При чемъ здѣсь даже и самое распредѣленіе мелкихъ кристалликовъ камфоры и коричной кислоты (твердаго раствора) почти равномѣрно и лишь возлѣ самыхъ крупныхъ кристалловъ замѣтно нѣкоторое скопленіе камфоры. Подъ микроскопомъ отличіе въ окраскѣ очень рѣзко. Вообще эту картину нужно признать весьма типичной; даже для металличе-

скаго сплава трудно получить болѣе отчетливую картину. Увеличеніе 90; свѣтъ простой.

Фотографія № 5, таблица III. Почти чистая эвтектика (35% молекулярныхъ коричной кислоты).

Какъ и слѣдуетъ ожидать, эвтектика закристаллизовалась въ сферолитахъ. Въ срединѣ фотографическаго снимка видѣнъ частью такой лучистый сферолитъ, совершенно подобный представленному на фотографіи № 1, таблицѣ III. Центръ его кристаллизаціи находится внѣ площади рисунка. Этотъ сферолитъ (а также и снятые на фотографіи № 1) повидимому совершенно однороденъ; но однородность эта кажущаяся. Если разрѣзъ сферолита происходитъ по иной плоскости, то мелкіе кристаллики, обусловливающіе собой лучистый видъ сферолита оказываются разсѣченными перпендикулярно направленіямъ роста и неоднородность такого «эвтектическаго сферолита» сразу становится замѣтной: онъ имѣетъ тогда точечную явно неоднородную структуру. Это явленіе совершенно одинаково съ тѣмъ, имѣющимъ мѣсто въ металлическихъ сплавахъ, когда перлитовая (полосчатая) эвтектика, при разсмотрѣніи въ плоскости перпендикулярной направленію роста, становится точечной. На фотографіи эти «точечные» сферолиты видны по краямъ рисунка: малый въ лѣвой части и большой въ правой. Непосредственно подъ микроскопомъ — средній сферолитъ окрашенъ въ переходящіе желто-коричневые тона, въ то время, какъ крайніе (точечные) имѣютъ очень ярко окрашенные въ красные, синіе и зеленые цвѣта точечки рядомъ съ такими же точечками сѣраго цвѣта (камфора). Увеличеніе 90. Свѣтъ простой.

Фотографія № 6, таблица III — 20% коричной кислоты. Вполнѣ типичная картина. Крупныя, свѣтлыя звѣзды камфоры и болѣе темная, очень нѣжнаго строенія флюидная эвтектика. Увеличеніе 60; свѣтъ простой.

Фотографія № 2, таблица IV—5% коричной кислоты (95% камфоры). Очень крупные, прекрасно развитые кристаллы камфоры. Между ними болѣе темная эвтектика. Количество ея незначительно и въ мѣстахъ болѣе толстыхъ двойственная ея структура не отчетлива. Въ болѣе же тонкихъ частяхъ видна точечная эвтектика. Подъ микроскопомъ, благодаря различію въ окраскѣ, картина совершенно убѣдительна. Въ общемъ фотографія эта напоминаетъ о фотографіи № 1, таблицы I-ой въ 1-ой статьѣ; такой видъ имѣютъ всѣ препараты съ большимъ (90—95%) содержаніемъ камфоры. Увеличеніе 80, свѣтъ простой.

14. Камфора — антраценъ (таблица 14, діаграмма 14).

Рудольфи[1], Гарелли[2] и Виньонъ[3] даютъ для температуры плавленія антрацена одинаковое число 213°. Креманнъ[4] — 212°. Антраценъ былъ очищенъ возгонкой и показалъ температуру плавленія 213°.

Эвтектическая точка въ этой системѣ лежитъ при 19,5% молекулярныхъ антрацена и температурѣ 116,5°. Эвтектическая остановка появляется при содержаніи въ смѣси 5% молекулярныхъ антрацена. Въ смѣси 20% она имѣетъ наибольшую продолжительность, а при содержаніи въ 80% антрацена ея уже не замѣтно. Графическое построеніе продолжительности

Таблица 14.

Камфора-антраценъ.

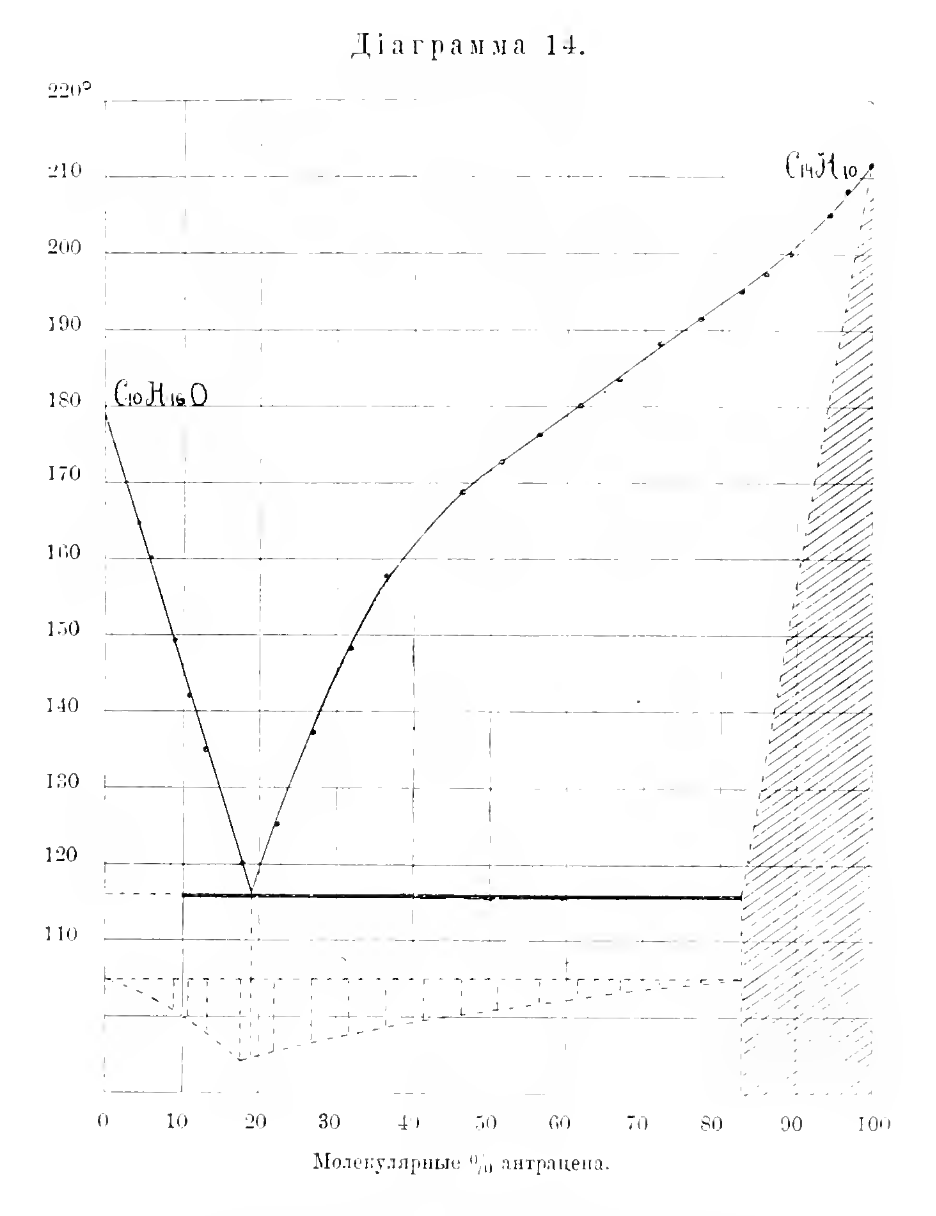
Навѣска 6 гр.

№	Содержаніе антрацена. Молекулярные %.	Содержаніе антрацена. Вѣсовые %.	Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
1	0	0	178,0°	—	—	
2	2,57	3,0	170,5	—	—	
3	4.30	5,0	164,6	117.0°	20	
4	8.72	10,0	150.0	117,0	80	
5	10,87	12,5	142,3	116.0	110	
6	13.09	15,0	135,1	115,5	140	
7	17,58	20,0	119,9	116.0	220	Эвтектическая точка 19,5% антрацена.
8	22.15	25,0	125,2	116.0	200	
9	26,80	30,0	137.1	116.0	180	
10	31.54	35.0	147.9	117,0	150	
11	36,27	40,0	157,6	116,0	130	
12	46,06	50.0	168,3	116,0	95	
13	51,00	55,0	172,5	116,0	80	
14	56,18	60,0	176,4	116,6	60	
15	61,33	65,0	180,0	116,0	40	
16	66,58	70.0	183.6	116,0	20	
17	71,92	75.0	188.5	116,0	—	
18	77.35	80,0	191.5	—	—	
19	82,87	85,0	195,0	—	—	
20	88,62	90,0	199,2	—	—	Предѣльная концентрація твердаго раствора 17,5% молек. камфоры.
21	94.20	95,0	205.0	—	—	
22	96,51	97,0	208,1	—	—	
23	100	100	213.0	—	—	

[1] Rudolfi. Zeitschr. Phys. Chem. **66**. 723, 1909.
[2] Garelli. Gazz. chim. Ital. **24**, II, 263.
[3] Vignon. Bull. Soc. Chim. **6**. 387, 1891.
[4] Kremann. Wien. Berich. **113**, 116, 1085.

кристаллизаціи опредѣляетъ предѣльную концентрацію твердаго раствора камфоры въ антраценѣ въ 82,5% молекулярныхъ антрацена (17,5% молекулярн. камфоры). Полиморфное превращеніе камфоры удается прослѣдить

Діаграмма 14.



Молекулярные % антрацена.

до смѣси въ 50% молекулярныхъ антрацена. Микроструктура въ этой системѣ обычнаго типа совершенно согласна съ діаграммой плавкости. Но вслѣдствіе легкой сублимаціи антрацена, особенно при расплавленіи смѣси на предметномъ стеклышкѣ, микроскопическіе препараты получаются не-

равномѣрной толщины и вообще замѣтно хуже, чѣмъ въ другихъ системахъ, а потому фотографіи я и не привожу.

15. **Камфора — тіокарбанилидъ** (таблица 15, діаграма 15).

Бамбергеръ[1] для температуры плавленія тіокарбанилида даетъ число 153°; Лельманнъ[2] — 150,5°. Я приготовилъ тіокарбанилидъ изъ анилина и сѣроуглерода обычнымъ способомъ. Препаратъ перекристаллизованный изъ спирта плавится при температурѣ 150,2°.

Эвтектическая кристаллизація появляется въ смѣси съ содержаніемъ въ 5% молекулярныхъ (7,32% вѣса) тіокарбанилида, достигаетъ максимальной продолжительности въ смѣси съ 25% и исчезаетъ, наконецъ, начиная съ 80% молекулярныхъ тіокарбанилида. Графическое построеніе продолжительности вторичной кристаллизаціи опредѣляетъ собой составъ эвтектики

Таблица 15.

Камфора — тіокарбанилидъ.

Навѣска 5 гр.

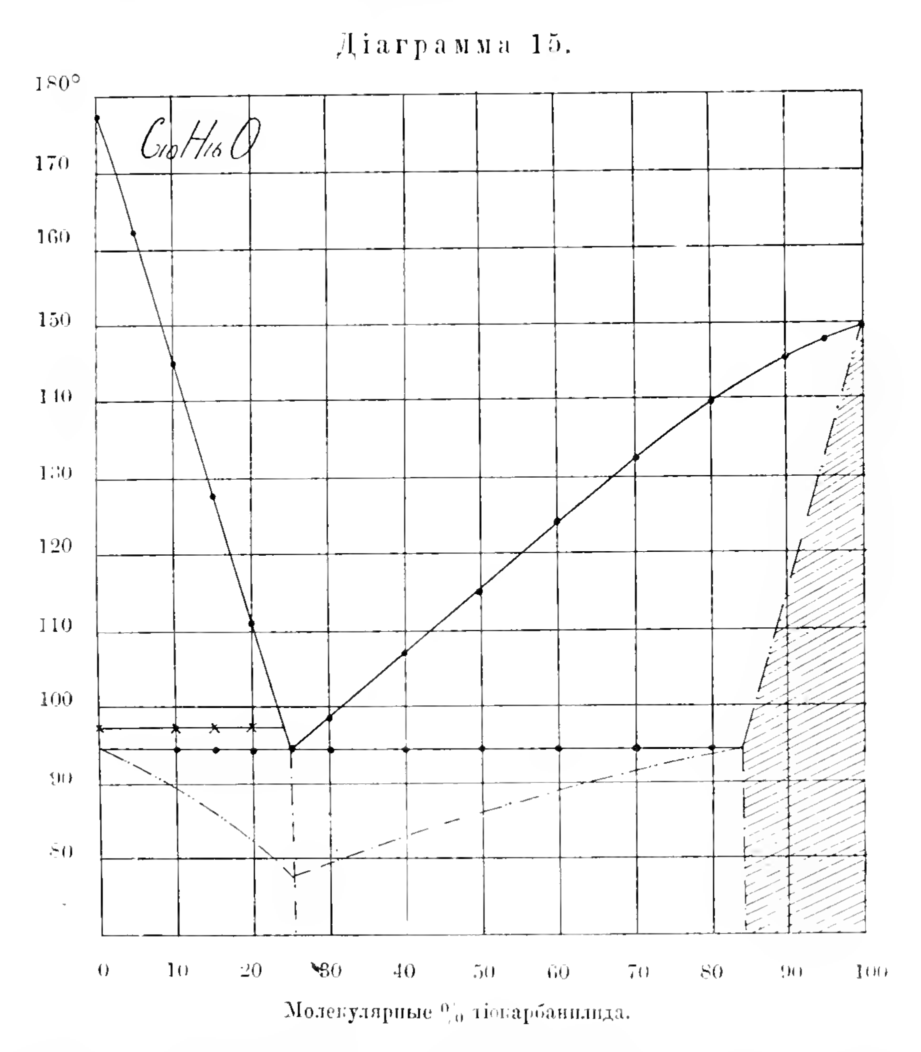
№	Содержаніе тіокарбанилида.		Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура застыванія эвтектики.	Продолжительность эвтектической остановки въ секундахъ.	Примѣчаніе.
	Молекулярные %.	Вѣсовые %.					
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	5.0	7,32	162,4	97,7	91.1	50	
3	10,0	14,28	144,8	97,9	92,6	110	
4	20,0	27.27	110,1	97,6	94.4	280	
5	25,0	33,33	96.0	—	—	360	Эвтектическая точка 25,5% молек. тіокарбанилида.
6	30,0	39,07	98,8	—	94,4	320	
7	40,0	50,00	106,7	—	94.4	270	
8	45,0	55,10	110,2	—	94,4	240	
9	50.0	60,0	114,8	—	94,4	210	
10	60,0	69,23	124,0	—	94,4	150	
11	70,0	77,77	132,2	—	94,4	90	
12	75,0	81,34	135,8	—	94.4	60	
13	80,0	85.71	139,6	—	94.6	-	Предѣльная концентрація твердаго раствора 16% молек. камфоры.
14	90,0	93,10	145,8	—	—	—	
15	95,0	96,61	117,8	—	—	—	
16	100	100	150,2	—	—	—	

[1] Bamberger. Berl. Berichte. **14**. 2638.
[2] Lellmann. Lieb. Annal. **221**. 21.

въ 25,5% молекулярныхъ тіокарбанилида (при температурѣ 94,4°), а также и предѣльную концентрацію твердаго раствора камфоры въ тіокарбанилидѣ — именно 84% тіокарбанилида (16% камфоры).

Полиморфное превращеніе камфоры при 98,1° въ этой системѣ замѣтить удается, но оно выражено гораздо менѣе рѣзко, чѣмъ въ другихъ случаяхъ, потому что температура превращенія весьма близка къ температурѣ

Діаграмма 15.



Молекулярные % тіокарбанилида.

застыванія эвтектики (94,4°) и на стеклышкѣ микроскопа оба эти процесса часто совпадаютъ: въ смѣсяхъ до 20% тіокарбанилида температура превращенія нѣсколько понижена (97,7—97,6°). Причина этого обстоятельства можетъ находиться въ томъ, что камфора даетъ съ ацетанилидомъ твердый растворъ очень незначительной концентраціи (десятыя доли %): но болѣе вѣ-

роятно предположить, что такое запаздываніе превращенія происходить отъ близости температуръ превращенія и кристаллизаціи, тѣмъ болѣе, что молекулярная депрессія камфоры при раствореніи въ ней тіокарбанилида, нисколько не меньше, чѣмъ при раствореніи въ ней другихъ веществъ, совершенно не дающихъ съ камфорой твердыхъ растворовъ.

Микроструктура вполнѣ отвѣчаетъ діаграммѣ плавкости. До 25% молекулярныхъ тіокарбанилида первыми выдѣленіями являются уже представленныя на фотографіяхъ звѣздочки камфоры различной степени крупности въ зависимости отъ состава смѣси, и вокругъ нихъ лучистая, тонкаго строенія, эвтектика. Начиная съ 30% и до 80% первыми выдѣленіями являются зернистые кристаллы предѣльнаго твердаго раствора, похожіе на зерна твердаго раствора въ системѣ камфора-ацетамидъ, и въ промежуткахъ—эвтектика; отъ 80% и до чистаго тіокарбанилида подъ микроскопомъ видны совершенно однородные крупные кристаллы твердаго раствора (16% молекулярныхъ камфоры), отдѣленные другъ отъ друга отчетливо очерченными гранями.

16. **Камфора — тринитробензолъ** (1. 3. 5) (таблица 16, діаграмма 16).

Таблица 16.

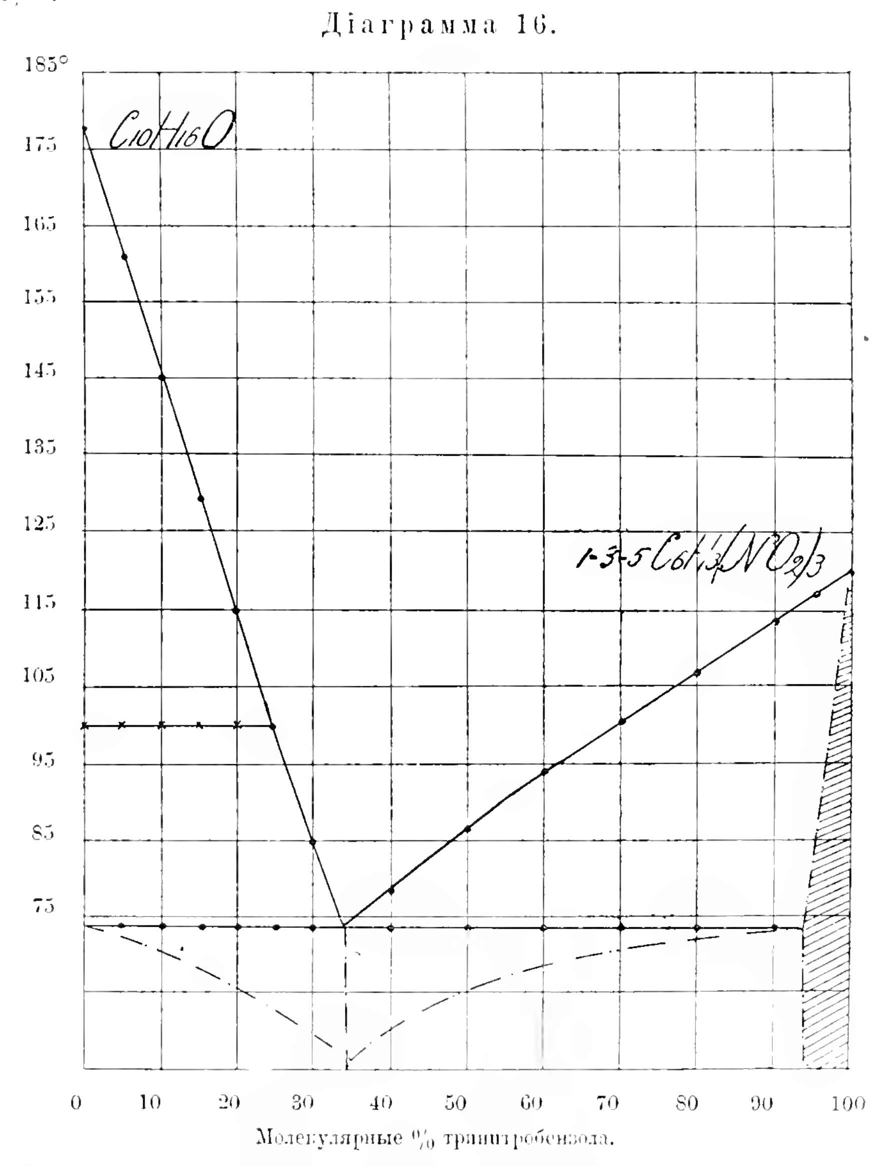
Камфора — 1—3—5 тринитробензолъ.

Навѣска 7 гр.

№	Содержаніе 1—3—5 тринитробензола.		Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура застыванія эвтектики.	Продолжительность эвтектической кристаллизаціи въ секундахъ.	Примѣчаніе.
	Молекулярные %.	Вѣсовые %.					
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	3,0	4,16	167,8	98,0	73,3°	—	
3	5,0	6,87	161,5	98,0	73,8	48	
4	10,0	13,47	143,7	97,8	73,8	84	
5	15,0	19,64	129,7	97,7	73,8	132	
6	20,0	25,94	113,6	97,7	73,8	180	
7	30,0	37,52	82,8	—	73,8	330	Эвтектическая точка
8	35,0	43,00	73,8	—	—	550	34,7% молекулярныхъ
9	40,0	48,29	78,4	—	73,8	400	1—3—5 тринитро-бензола.
10	45,0	53,41	82,5	—	73,8	—	
11	50,0	58,36	86,4	—	73,8	180	
12	60,0	67,76	94,4	—	73,8	120	
13	70,0	76,58	100,6	—	73,8	80	
14	80,0	84,86	106,9	—	73,8	40	
15	90,0	92,66	113,7	—	73,8	15	Предѣльная концен-
16	95,0	96,38	116,9	—	69,7	—	трація твердаго раствора
17	100	100	120,7	—	—	—	6% молек. камфоры.

Симметрическій тринитробензолъ имѣетъ температуру плавленія по Ванъ-деръ-Линдену[1] 121°; по Фридлендеру[2] 121—122°; Зюдборужъ и Биръ[3] даютъ число 121: препаратъ Кальбаума у меня плавился при 120,7°.

Діаграмма 16.



Молекулярные % тринитробензола.

Эвтектическая остановка появляется совершенно ясно уже при содержаніи 5% молекулярныхъ тринитробензола и затѣмъ во всѣхъ смѣсяхъ до

[1] Van der Linden. Berl. Berichte. 45, 231, 1912.
[2] Friedländer. Beilstein's Handb. B. II, 82, III Aufl.
[3] Sudborough a. Beard. Journ. Chem. Society. 97, 773, 1910.

90% очень отчетливо выражена. Эвтектика представляетъ собой очень подвижную (негустую) жидкость и температура ея застыванія очень постоянна (не переохлаждается).

Эвтектическая точка при температурѣ 73,8° отвѣчаетъ содержанію въ смѣси 34% молекулярныхъ тринитробензола. Со стороны камфоры твердые растворы совершенно отсутствуютъ; тринитробензолъ растворяетъ въ твердомъ состояніи значительныя количества камфоры. Графическимъ построеніемъ продолжительности вторичной кристаллизаціи предѣльная концентрація твердаго раствора опредѣляется въ 6% камфоры (94% тринитробензола).

Полиморфное превращеніе можно прослѣдить до 20% молекулярныхъ тринитробензола.

Микроструктура сплавовъ подтверждаетъ полученные результаты. На камфарной вѣтви первыми выдѣленіями являются извѣстныя уже свѣтлыя звѣздочки камфоры различной крупности, въ зависимости отъ ея содержанія въ сплавѣ, на фонѣ тонкой точечной эвтектики. На вѣтви тринитробензола выдѣляются широкія призмы твердаго раствора предѣльной концентраціи и между ними болѣе темная лучистая эвтектика.

17. **Камфора — метахлорнитробензолъ** (таблица 17, діаграмма 17).

Таблица 17.

Камфора — метахлорнитробензолъ.

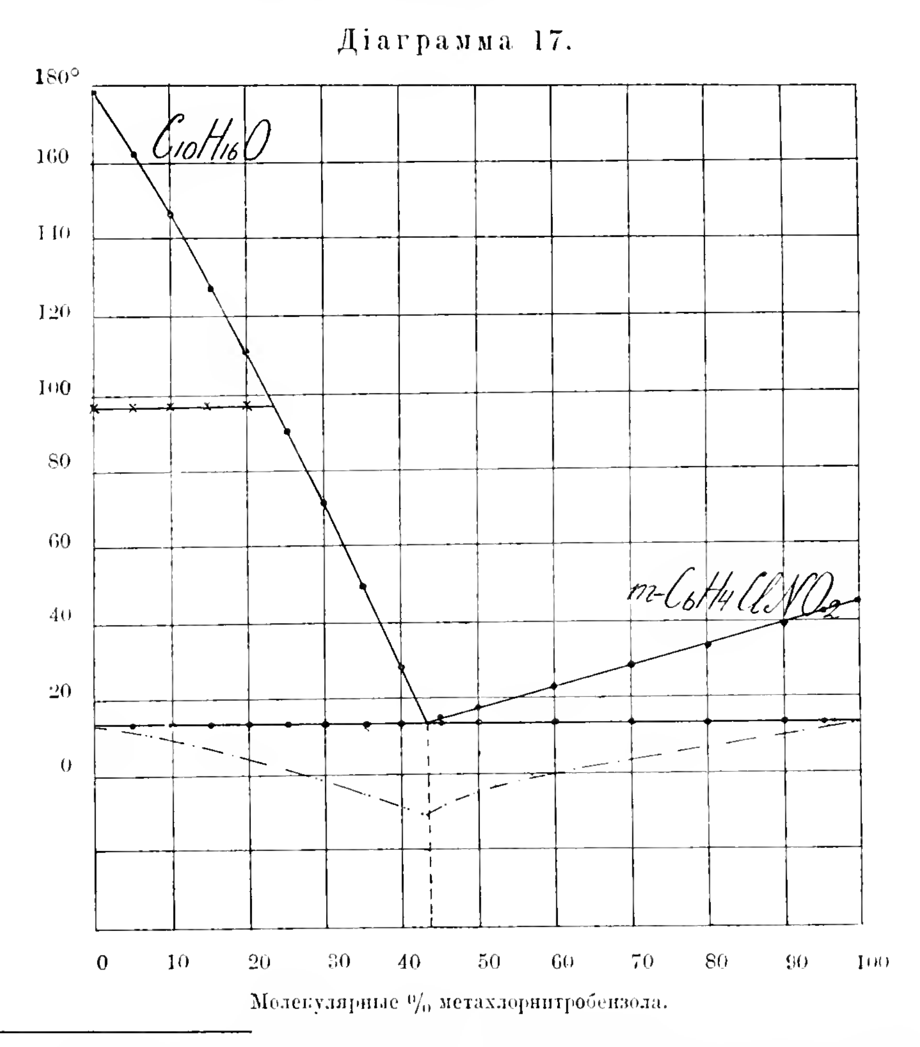
Навѣска 6 гр.

№	Содержаніе метахлорнитробензола въ %.		Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической кристаллизаціи въ секундахъ.	Примѣчаніе.
	Молекулярные %.	Вѣсовые %.					
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	3,0	3,10	169,1	98,1	—	—	
3	5,0	5,17	161,7	98,0	5,6°	40	
4	10,0	10,32	145,8	98,0	11,5	80	
5	15,0	15,46	126,3	97,7	11,5	120	
6	20,0	20,57	110,4	97,3	11,5	180	
7	25,0	25,67	91,3	—	11,5	220	
8	30	30,75	71,7	—	11,5	300	
9	35,0	35,81	50,6	—	11,5	360	
10	40,0	40,85	27,8	—	11,5	410	Эвтектика 43,6% молекулярныхъ мета-хлорнитробензола.
11	45,0	45,86	14,1	—	11,5	400	
12	50,0	50,88	17,0	—	11,5	340	
13	60,0	60,85	22,4	—	11,5	250	
14	70,0	70,74	28,2	—	11,5	170	
15	80,0	80,56	32,8	—	11,5	100	
16	90,0	90,31	37,3	—	11,5	60	
17	95,0	95,17	40,3	—	16,3	20	
18	100	100	43,9	—	—	—	

Температура плавленія мета-хлорнитробензола по литературнымъ даннымъ 44,4—44,5° [1]. Препаратъ Кальбаума у меня плавился при 43,9° и при кристаллизаціи, несмотря на помѣшиваніе, замѣтно переохлаждался. Поэтому при записываніи кривыхъ охлажденія дѣлались прививки кристалловъ чистаго мета-хлорнитробензола во всѣхъ смѣсяхъ до эвтектической, которой отвѣчаетъ содержаніе мета-хлорнитробензола въ 43% молекулярныхъ и температура 11,5°.

Эвтектическая кристаллизація также запаздываетъ, почему послѣ выдѣленія первыхъ кристалловъ, дѣлалась вторая прививка уже мельчайшими

Діаграмма 17.



[1] Beilstein's Handb. B. II, 83, II Aufl.; Б. Н. Меншуткинъ. Изв. С.-ПБ. Политехн. Инст. 11, 273, 1909; Богоявленскій. Chem. Centralbl. 1905 г., II, 946; Laubenheimer. Berl. Berichte. 8, 1622.

кристалликами камфоры. Въ этихъ условіяхъ переохлажденіе замѣтно уменьшается. Температура застыванія чистой эвтектики опредѣлена кромѣ того нормальнымъ термометромъ въ приборчикѣ Жукова. Термометръ опускался до 8° и затѣмъ происходило повышеніе температуры до 11,5°. Эта температура и принята для кристаллизаціи эвтектики.

Эвтектическая кристаллизація отчетливо замѣтна уже въ смѣсяхъ въ 5% мета-хлорнитробензола и 95% мета-хлорнитробензола: продолжительность ея очень значительна: такъ какъ при навѣскѣ въ 5 въ смѣси 40% мета-хлорнитробензола эвтектика кристаллизовалась въ теченіе 410 секундъ. Графическое построеніе продолжительности второй остановки исключаетъ возможность существованія какъ со стороны камфоры, такъ и со стороны мета-хлорнитробензола твердыхъ растворовъ даже малыхъ концентрацій и это подтверждается микроскопически. При содержаніи въ смѣси 2% камфоры на шлифѣ ясно видны прослойки эвтектики между игольчатыми кристаллами мета-хлорнитробензола.

18. **Камфора — ортохлорнитробензолъ** (таблица 18, діаграмма 18).

Таблица 18.

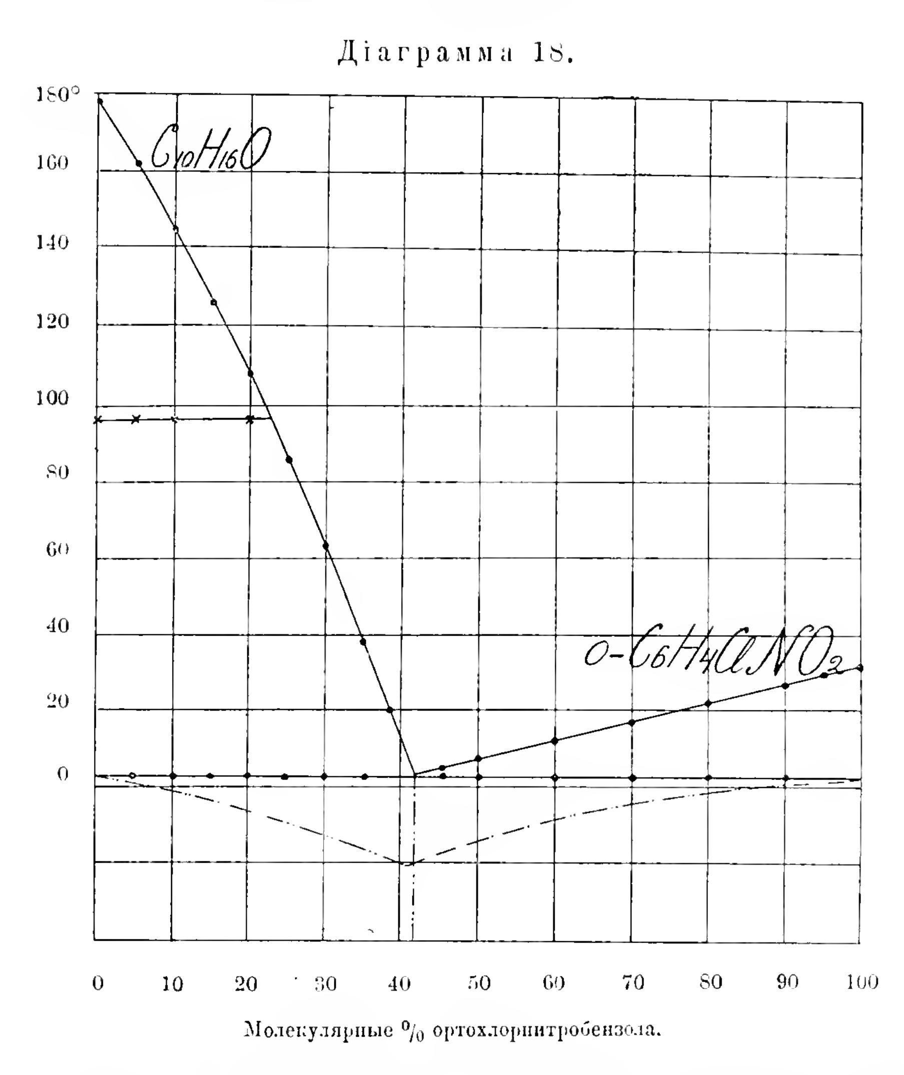
Камфора — ортохлорнитробензолъ.

Навѣска 5 гр.

№	Содержаніе ортохлорнитробензола.		Температура 1-хъ выдѣленій кристалловъ.	Модификація.	Температура кристаллизаціи эвтектики.	Продолжительность эвтектической кристаллизаціи въ секундахъ.	Примѣчаніе.
	Молекулярные %.	Вѣсовые %					
1	0	0	178,0°	98,1°	—	—	
2	3,0	3,10	169,1	98,0	—	—	
3	5.0	5.17	161,5	98,0	1.2°	60	
4	10.0	10,32	145,3	97.6	2,6	100	
5	15,0	15,46	125,8	97.4	2.6	135	
6	20,0	20,57	106,8	97.2	2,6	200	
7	25.0	25,67	85,1	—	2,6	250	
8	30,0	30,75	62,8	—	2.6	300	
9	35,0	35,81	37.7	—	2,6	350	
10	40,0	40,85	10,9	—	2,6	420	Эвтектика 41,5% молек. орто-хлорнитробензола.
11	45,0	45,86	4,0	—	2,6	380	
12	50,0	50,88	6,9	—	2.6	300	
13	60,0	60,85	11,9	—	2,6	220	
14	70,0	70.74	17,3	—	2,6	160	
15	80.0	80,56	22,6	—	2.9	100	
16	90.0	90,31	26,9	—	3,0	70	
17	95,0	95.17	29,9	—	3,2	30	
18	100	100	31.5	—	—	—	

Температура плавленія орто-хлорнитробензола 31,5° [1]. Эвтектическая точка лежитъ при температурѣ 2,6° и содержаніи орто-хлорнитробензола 41,5% молекулярныхъ. Въ этой системѣ также наблюдается переохлажденіе, которое устранялось двукратной прививкой, какъ описано выше.

Діаграмма 18.



Молекулярные % ортохлорнитробензола.

Твердые растворы здѣсь также отсутствуютъ. Полиморфное превращеніе камфоры можно прослѣдить до содержанія въ смѣси 20% ортохлорнитробензола.

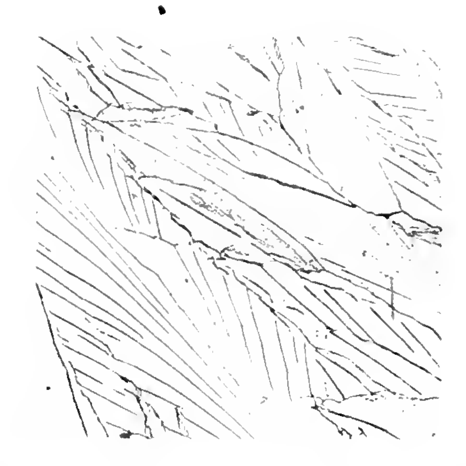
Заканчивая этой статьей изложеніе полученнаго мною опытнаго матеріала, слѣдующую статью (3-ью) я намѣреваюсь посвятить выясненію во-

---

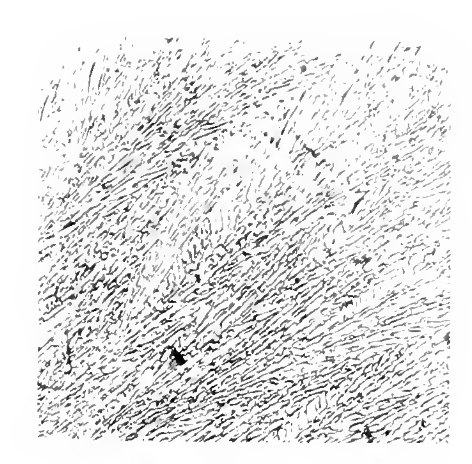
[1] Б. Н. Меншуткинъ даетъ 32,5°. Изв. С.-ПБ. Политехн. Инст. 11, 273, 1909.

проса объ общихъ свойствахъ органической эвтектики, условіяхъ ея кристаллизаціи и тѣмъ особенностямъ, которыя неизбѣжно должны имѣть для нея мѣсто, въ силу физическихъ свойствъ ея компонентовъ, рѣзко отличающихся отъ металловъ.

Петроградъ. Политехническій
Институтъ Императора Петра Великаго.
Лабораторія Общей Химіи.
10 мая 1915 г.



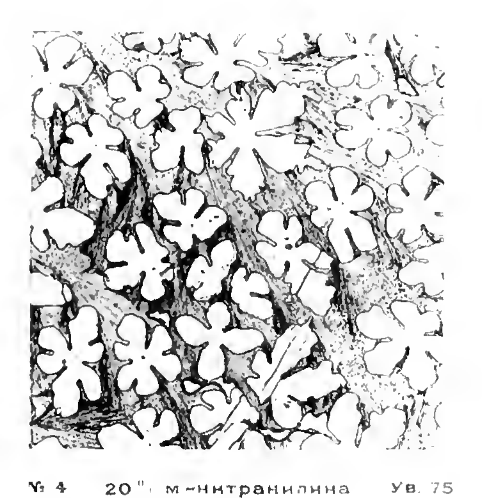
№ 1. 5 % камфоры (95 % м. н. а.) Ув. 60



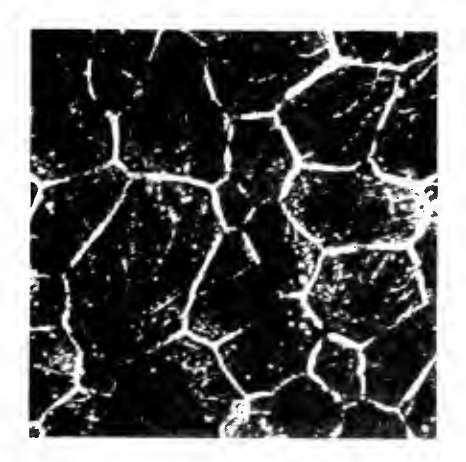
№ 2. 30 % м-нитранилина. Ув. 450



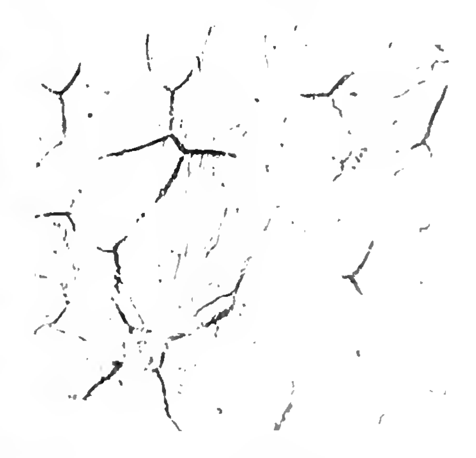
№ 3. 20 % м-нитранилина. Ув. 75
св. поляризованный.



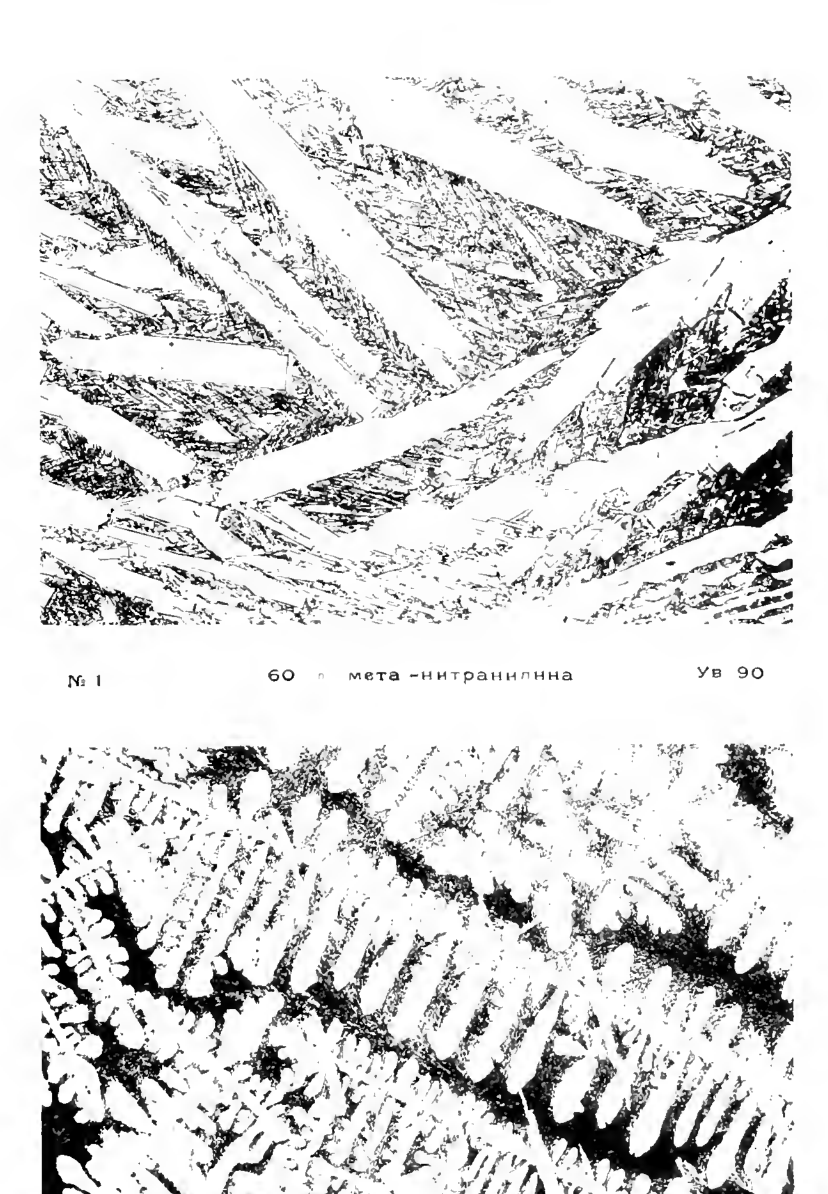
№ 4. 20 % м-нитранилина. Ув. 75



№ 5. 5 % м-динитробензола. Ув. 80
св. поляризованный.



№ 6. 5 [illegible] м-динитроб[illegible]ла. Ув.
св. прос[illegible]



№ 1 60 % мета-нитранилина Ув 90

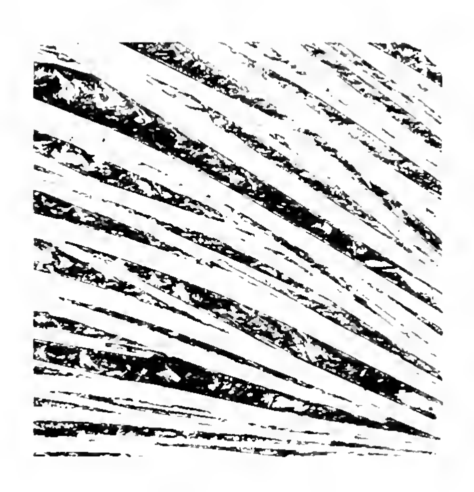
№ 2 20 % мета-динитробензола Ув 90



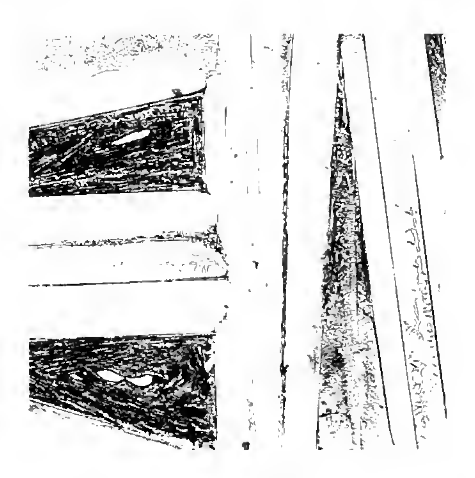
№ 1 40 % м-динитробензола Ув. 30.



№ 2 60 м-динитробензола Ув. 60.



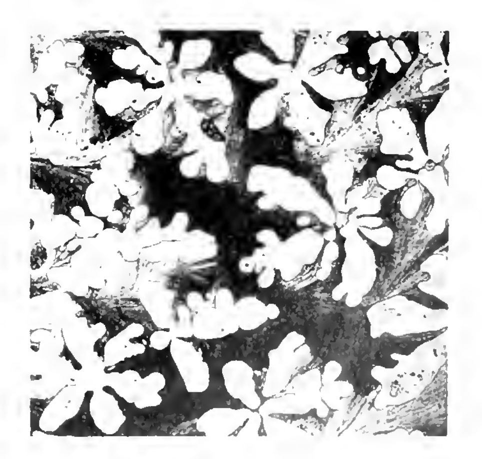
№ 3 70 м-динитробензола Ув. 70.



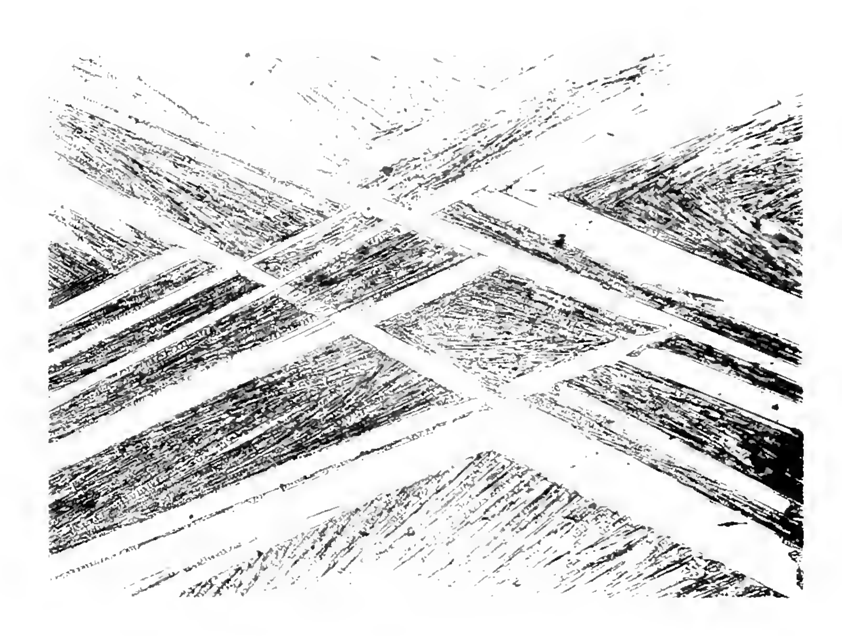
№ 4 70 % Коричной кислоты Ув. 90



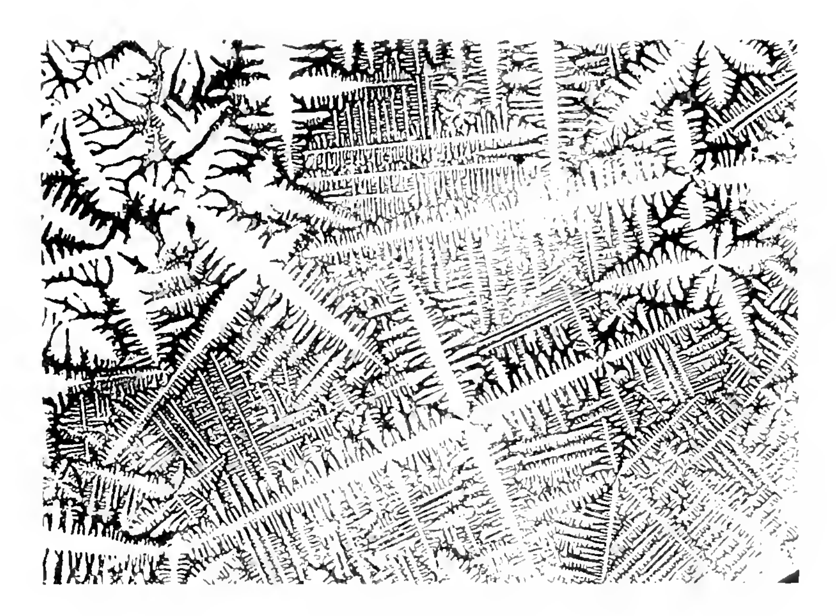
№ 5 35 Коричной кислоты Ув. 90



№ 6 20 Коричной кислоты Ув. 60



№ 1 60 °/₀ Коричной кислоты Ув. 90



№ 2 5 °/₀ Коричной кислоты Ув 80

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Делесситъ окрестностей Кварцханскаго мѣднаго мѣсторожденія Батумской области.

Н. П. Безбородько.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 18 ноября 1915 г.).

Во время экскурсіи со студентами Новочеркасскаго Политехническаго Института въ Кварцханы Батумской области лѣтомъ 1912 года я заинтересовался отмѣченнымъ мною въ изверженныхъ породахъ изслѣдуемаго района[1] минераломъ изъ группы *лептохлоритовъ* — *делесситомъ*. Этотъ минералъ встрѣчался въ первичныхъ порахъ и миндалинахъ темно-зеленой мелкокристаллической породы, развитой въ западной сторонѣ прилегающей къ руднику мѣстности. Въ виду неполноты свѣдѣній въ литературѣ о кавказскомъ делесситѣ позволяю себѣ изложить здѣсь результаты изученія своей находки съ параллельнымъ описаніемъ петрографическихъ условій, въ которыхъ встрѣчается делесситъ.

Упомянутая изверженная темнозеленая порода отличается своимъ плотнымъ строеніемъ; въ ней невооруженнымъ глазомъ можно лишь отмѣтить едва замѣтныя полоски *плагіоклазовъ* около 1 мм. длины. Порода несетъ въ себѣ много первичныхъ округлыхъ или же эллипсоидальныхъ пустотъ, въ заполненіи которыхъ важную роль играетъ делесситъ. Величина пустотъ варіируетъ, достигая иногда 2 снт.

Подъ микроскопомъ изслѣдуемая порода представляется трахитоиднаго сложенія съ двумя генераціями полевого шпата. Длина оси болѣе крупныхъ порфировыхъ кристалловъ плагіоклаза лежитъ въ предѣлахъ 0,5 — 1,0 мм. Мелкіе кристаллы плагіоклаза, образующіе свѣтлую часть основной массы породы, имѣютъ обычный размѣръ около 0,2 мм. Вслѣдствіе одинаковаго

[1] П. С. Успенскій. Кедабекскій типъ мѣдныхъ мѣсторожденій на Кавказѣ. Изв. О-ва Гор. Инж. СПб. 1910. Также К. Сербинскій. Къ геологіи Кварцхан. мѣдн. мѣстор. Батум. Об. Изв. Нов. Алекс. Пол. Инст. 1911. Т. III, вып. 2.

направленія осей плагіоклазовъ обѣихъ генерацій, порода пріобрѣтаетъ характерную флюидальную структуру. Темную часть основной массы породы составляетъ авгитъ аналогичнаго съ плагіоклазами столбчатаго строенія.

Основная масса породы перекрещивается во всѣхъ направленіяхъ игольчатыми, иногда скелетообразными, кристаллами, вѣроятно *титанистаго желѣзняка*, образующими въ шлифахъ благодаря закономѣрному расположенію своихъ осей густую темную рѣшетку. Тамъ же въ большомъ количествѣ встрѣчаются кристаллы *магнетита*. Взятые образцы породы отличаются своею свѣжестью; *кальцитъ* попадается изрѣдка; мѣстами замѣчается лишь незначительная хлоритизація *авгита*.

Вся основная масса кристаллическая; некристаллизованныхъ стекловатыхъ участковъ нигдѣ въ шлифахъ встрѣчено не было. Кварцъ всюду отсутствовалъ.

Порфировые кристаллы полевого шпата, то въ видѣ простыхъ двойниковъ, то какъ отдѣльные индивудуумы, иногда слабо каолинизированы; содержатъ включенія желѣзной руды. Въ разрѣзахъ $\perp \alpha$ и $\perp \gamma$ наблюдаются слѣдующіе углы погасанія:

$\perp \alpha$ — 73°	$\perp \gamma$ — 13°
74°	17°
77°	18°

Согласно этому составъ порфировыхъ плагіоклазовъ отвѣчаетъ *андезину* съ уклоненіемъ въ сторону лабрадора и олигоклаза-андезина.

Мелкіе плагіоклазы основной массы въ разрѣзахъ по тѣмъ же направленіямъ даютъ слѣдующіе углы погасанія:

$\perp \alpha$ — 77°	$\perp \gamma$ — 5°
78°	11°
79°	18°

Въ соотвѣтствіи съ этими данными мелкіе плагіоклазы относятся къ *олигоклазамъ-андезинамъ* съ уклоненіемъ состава какъ въ сторону олигоклаза, такъ и въ сторону андезина.

Столбчато-лучистые желтовато-зеленые кристаллы *авгита* обладаютъ иногда кристаллографическими очертаніями на обоихъ своихъ концахъ. Обычная величина ихъ лежитъ въ предѣлахъ 0,5 мм. Порфировые кристаллы авгита встрѣчаются лишь въ рѣдкихъ случаяхъ. Авгитъ узнается въ шлифѣ по большому углу погасанія, достигающему 45—50°. Плеохроизмъ замѣтенъ весьма слабо и то лишь на большихъ кристаллахъ. Двой-

ники не наблюдались. Изрѣдка замѣтна слабая наклонность къ образованію характерной структуры песочныхъ часовъ.

Титанистый желѣзнякъ и магнетитъ встрѣчаются въ обычномъ вышеупомянутомъ видѣ.

Для болѣе подробнаго сужденія о данной породѣ было произведено студентомъ мѣстнаго Института П. А. Можаевымъ[1] по моей просьбѣ и подъ моимъ наблюденіемъ опредѣленіе содержащейся въ породѣ кремнекислоты. Результаты анализа слѣдующіе:

$$SiO_2 = 54,34\%$$

На основаніи такого относительно большого количества кремнекислоты въ породѣ, а также на основаніи ея структуры и другихъ вышеприведенныхъ микроскопическихъ данныхъ, разсматриваемую породу можно отнести къ авгитовымъ андезитамъ и признать въ ней эффузивную фацію развитой въ окрестностяхъ Кварцханы діоритово-андезитовой магмы[2].

Шлифы описываемой породы прорѣзываются прожилками незначительной длины, выклиниваніе которыхъ наблюдается тутъ же подъ микроскопомъ; ширина же ихъ достигаетъ 0,2 мм. Прожилки эти интересны въ томъ отношеніи, что обычно среди своей выполняющей массы содержатъ кристаллы первичнаго хлорита, по внѣшнему виду аналогичнаго нижеописываемому делесситу. Главная выполняющая масса прожилокъ состоитъ изъ *полевого шпата*, въ которомъ можно различать два рода, отличающихся другъ отъ друга какъ структурными особенностями, такъ и составомъ и моментомъ ихъ кристаллизаціи. Одни изъ нихъ выступаютъ въ видѣ тонкихъ кристалловъ, вполнѣ аналогичныхъ кристалламъ общей массы породы, другіе же — съ широкими, расплывчатыми гранями безъ рѣзко выраженныхъ контуровъ, въ видѣ аггрегатнаго, натечнаго состоянія. Тѣ и другіе обычно образуютъ двойники. Отношеніе обоихъ родовъ полевыхъ шпатовъ другъ къ другу указываетъ на болѣе раннее возникновеніе тонкихъ idioморфныхъ кристалловъ среди аггрегатной полевошпатовой массы. Одновременно можно наблюдать, что idioморфные игольчатые кристаллы имѣютъ тѣсную связь съ окружающей породой. Они то входятъ въ окружающую породу, внѣдряясь въ нее своими концами, то выходятъ изъ нея. Очевидно, что для нихъ былъ тотъ же магматическій порядокъ образованія, что и для аналогичныхъ кристалловъ общей массы породы. Такое же отношеніе къ про-

---

[1] За что я приношу здѣсь П. А. Можаеву мою благодарность.

[2] Ср. работу Успенскаго: Кедабекскій типъ и т. д.

жилкамъ можно наблюдать также со стороны порфировыхъ кристалловъ той же общей массы породы. Послѣдніе то нацѣло пересѣкаютъ описываемые прожилки, то наполовину вростаютъ своими концами внутрь прожилка.



Рис. 1. Увелич. 50. Ник. параллельны.

На фотографіи рис. 1 изображается общая микроскопическая картина авгито-андезитовой породы, пересѣкающейся описываемымъ прожилкомъ; слѣва сверху внѣдряется внутрь прожилка порфировый кристаллъ полевого шпата. Въ правой расширенной части среди бѣлой полевошпатовой массы прожилка наблюдаются темныя кристаллическія пластинки делессита. Такимъ образомъ заполненіе прожилка полевымъ шпатомъ шло насчетъ магматическаго состава окружающей породы; самый же процессъ формированія прожилокъ протекалъ уже тогда, когда еще не былъ законченъ ростъ порфировыхъ кристалловъ общей массы породы.

Оптическія свойства идіоморфныхъ кристалловъ полевого шпата внутри прожилокъ одинаковы съ такими же свойствами тѣхъ же кристалловъ, выполняющихъ общую массу породы.

Аггрегатный полевой шпатъ прожилокъ образовался въ болѣе позднюю стадію, шедшую, повидимому, непосредственно за стадіей образованія только что описанныхъ идіоморфныхъ кристалловъ. Въ отношеніи генезиса интересна ихъ аггрегатная натечная структура. Характеръ химическаго состава аггрегатнаго полевого шпата остался не вполнѣ выясненнымъ. Не лишнее указать здѣсь на его низкій показатель преломленія (ниже канадскаго бальзама).

Хлоритъ описанныхъ прожилковъ встрѣчается то въ видѣ изображенныхъ на рис. 1 кристаллическихъ пластинокъ, собирающихся въ отдѣльныя группы, то въ видѣ отдѣльныхъ мелкихъ кристалликовъ, изолированно разсѣянныхъ среди полевошпатовой массы. Тѣ и другіе пріурочиваются къ аггрегатному полевому шпату. Отношеніе хлорита къ аггрегатному полевому шпату, съ одной стороны, и къ игольчатымъ кристалламъ съ другой — неодинаково. Хлоритъ занимаетъ обычно срединную часть прожилокъ (ср. рис. 1) и, располагаясь среди аггрегатнаго полевого шпата, раздвигаетъ его лишенные кристаллическихъ контуровъ зерна; хлоритъ здѣсь является въ качествѣ какъ бы болѣе ранней стадіи кристаллизація, нежели кристаллическій аггрегатъ полевошпатовыхъ зеренъ. Отношеніе же хлорита къ идіоморфнымъ иглообразнымъ кристалламъ полевого шпата тѣхъ же прожилокъ иное: иглы полевого шпата внѣдряются внутрь хлорита, иногда же обростаются пластинками хлорита. Такимъ образомъ кристаллизація хлорита, возникая въ начальную стадію образованія аггрегатнаго полевого шпата, въ то же время запаздывала по отношенію къ стадіи образованія игольчатыхъ полевыхъ шпатовъ тѣхъ же прожилокъ.

Описываемый первичный хлоритъ полевошпатовыхъ прожилокъ по своему внѣшнему виду и оптическимъ свойствамъ отвѣчаетъ макроскопически наблюдаемому делесситу, микроскопическій и химическій анализъ котораго приводятся ниже.

Полевошпатово-делесситовые прожилки въ генетическомъ отношеніи тѣсно связаны съ макроскопическими эллипсоидальными жеодами делессита, упомянутыми въ началѣ работы. Переходной стадіей между тѣми и другими являются въ свою очередь видимыя лишь въ шлифахъ микроскопическія жеоды того же минералогическаго состава. Фотографія рис. 2 изображаетъ такую жеоду.

Периферическая часть содержимаго жеодъ занята аггрегатнымъ полевымъ шпатомъ, внутреннее же ядро состоитъ изъ хлорита — *делессита*. Соотношеніе между полевымъ шпатомъ и делесситомъ то же, что наблюдалось въ прожилкахъ. На фотографіи можно также наблюдать внѣдреніе кристаллическаго плагіоклаза внутрь хлорита. Все это указываетъ на прежнее тѣсное сростаніе обоихъ минераловъ. Отличіе минералогическаго характера данной жеоды отъ раньше описанныхъ прожилокъ заключается съ одной стороны, въ почти исключительномъ преобладаніи аггрегатнаго полевого шпата надъ игольчатыми кристаллами, съ другой — въ отсутствіи прежняго тѣснаго проростанія окружающей породы и жеоды одними и тѣми же порфировыми и игольчатыми кристаллами полевого шпата. Хотя граница между

минералогическимъ составомъ жеодъ и прилегающей породой выражена все еще недостаточно рѣзко (ср. рис. 2, порфировый плагіоклазъ слѣва почти внѣдряется однимъ своимъ краемъ внутрь жеоды), однако пневматолитическій моментъ образованія этихъ жеодъ запаздывалъ по сравненію съ моментомъ образованія прожилокъ.



Рис. 2. Увелич. 75. Ник. параллельны.

Переходимъ къ описанію большихъ макроскопическихъ жеодъ и ихъ отношенія къ окружающей породѣ. Прежде всего надо отмѣтить существованіе большого сходства между ними и только что описанными жеодами. Минералогическій составъ большихъ делесситовыхъ жеодъ остается прежнимъ; подъ микроскопомъ изученныя делесситовыя жеоды помимо делессита содержатъ также полевой шпатъ. Въ жеодахъ съ преобладающимъ количествомъ делессита этотъ полевой шпатъ играетъ подчиненную роль, зажатъ внутри делесситовыхъ пластинокъ то въ видѣ недифференцированной на отдѣльные кристаллы полевошпатовой массы, то въ видѣ мелкихъ игольчатыхъ кристалловъ: та и другая разновидности полевого шпата отвѣчаютъ аггрегатному полевому шпату предыдущихъ случаевъ. Граница между содержимымъ жеодъ и матеріаломъ окружающей породы отмѣчается здѣсь вполнѣ рѣзко.

Оптическія свойства делессита подъ микроскопомъ слѣдующія. Плеохроизмъ его очень отчетливый:

$$\gamma \quad = \quad \beta \quad > \quad \alpha$$

травяно-зеленый — блѣдно-желтый

Направленіе угасанія уклоняется отъ прямого на 7°. Направленіе наименьшей упругости совпадаетъ съ направленіемъ спайности минерала. Двойное лучепреломленіе невелико и лежитъ вблизи 0,012. Уголъ оптическихъ осей незначительный. Направленіе острой биссектрисы располагается приблизительно перпендикулярно къ плоскости спайности минерала: съ направленіемъ острой биссектрисы совпадаетъ направленіе наибольшей оптической упругости минерала.

Химическій анализъ былъ произведенъ мною въ Лабораторіи Кабинета Прикладной Геологіи П. И. надъ отобраннымъ отъ примѣсей веществомъ делессита изъ одной большой делесситовой жеоды. Основнымъ руководствомъ при выполненіи анализа служилъ Гиллебрандъ[1]. Полуторные окислы опредѣлялись при введеніи въ ходъ анализа уксуснонатровой соли. По полученіи же общей суммы полуторныхъ окисловъ желѣзо титровалось, и Al_2O_3 опредѣлялся изъ разности. Двойное осажденіе предшествовало опредѣленію CaO и MgO. FeO опредѣлялось въ отдѣльной порціи по методу Митчерлиха[2]. Малая величина навѣсокъ вызвана недостаткомъ матеріала.

Навѣска для полнаго анализа = 0,4214.
Навѣска для опредѣленія FeO = 0,0762.

SiO_2	27,86
Al_2O_3	10,78
Fe_2O_3	15,27
FeO	18,87
CaO	0,85
MgO	15,91
H_2O при 100°	0,84
H_2O при прокаливаніи	9,26[3]
	99,64

Анализъ близко подходитъ къ анализамъ делессита, приведеннымъ въ трудѣ Гинтце[4]. Единственное замѣтное отличіе нашего делессита заключается въ повышенномъ содержаніи окисловъ желѣза и одновременномъ пониженіи содержанія магнія.

[1] Hillebrand, Analyse der Silikat- und Karbonatgesteine, Leipzig. 1910.

[2] Hillebrand, o. c., стр. 167.

[3] Поправка въ указанное число (9.26). въ связи съ содержаніемъ въ пробѣ FeO, не введена.

[4] Hintze: Handbuch der Mineralogie, т. II, стр. 751.

Окончательная характеристика генезиса нашего первичнаго хлорита, поскольку она выясняется на основаніи вышеприведеннаго изслѣдованія, слѣдующая. Описанная кристалличность хлорита, нахожденіе его среди свѣжихъ кристалловъ полевого шпата и, наконецъ, соотношеніе между нимъ и полевымъ шпатомъ исключаетъ предположеніе иного не-первичнаго его происхожденія[1]. Принимая же во вниманіе связь делессита съ аггрегатнымъ полевымъ шпатомъ вышеуказанной натечной структуры, можно считать, что какъ тотъ, такъ и другой возникли въ позднѣйшую пневматолитическую стадію кристаллизаціи магмы, когда послѣдняя была обогащена магматическими водами.

Новочеркасскъ, Алексѣевскій
Донской Политехническій Институтъ.

[1] Ср. В. И. Вернадскій. Минералогія. 1912. Вып. II. стр. 489.

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ 15—31 декабря 1915 года).

95) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin....... VI Série). 1915. № 18, 15 декабря. Стр. I+I+XIII—XVII+1877—1972. 1915. lex. 8°. — 1615 экз.

96) **Записки И. А. Н.** по Физико-Математическому Отдѣленію. (Mémoires...... VIII Série. Classe Physico-Mathématique). Томъ XXVI, № 5. Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи 1900—1903 гг., подъ начальствомъ барона Э. В. Толля. Отдѣлъ В: Географія физическая и математическая. Вып. 5. (Résultats scientifiques de l'Expédition Polaire Russe en 1900—1903, sous la direction du baron E. Toll. Section B: Géographie physique et mathématique. Livr. 5). А. М. Бухтѣевъ. Приливы у сибирскаго побережья Сѣвернаго Ледовитаго Океана по наблюденіямъ Русской Полярной Экспедиціи въ 1900—1903 гг. II. Приливы у острововъ Анжу или Ново-Сибирскихъ, въ лагунѣ Перпалахъ на западномъ берегу о-ва Котельнаго. Съ 1 чертежемъ въ текстѣ, 2 картами и 3 діаграммами (II+16 стр). 1915. 4°. — 800 экз. Цѣна 60 коп.; 60 cop.

97) **Записки И. А. Н.** по Физико-Математическому Отдѣленію. (Mémoires...... VIII Série. Classe Physico-Mathématique). Томъ XXVI, № 6. Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи 1900—1903 гг., подъ начальствомъ барона Э. В. Толля. Отдѣлъ В: Географія физическая и математическая. Вып. 6. (Résultats scientifiques de l'Expédition Polaire Russe en 1900—1903, sous la direction du baron E. Toll. Section B: Géographie physique et mathématique. Livr. 6). А. Бялыницкій-Бируля. Aurora borealis. II. Журналъ наблюденій надъ полярными сіяніями во время второй зимовки Русской Полярной Экспедиціи въ 1901—1902 гг. въ губѣ Нерпичьей у западнаго берега о-ва Котельнаго (Ново-Сибирскіе о-ва). Съ 1 картой (II+92 стр.). 1915. 4°.—800 экз. Цѣна 1 руб.; 1 rbl.

98) **Труды Ботаническаго Музея Императорской Академіи Наукъ.** (Travaux du Musée Botanique de l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd). Выпускъ XIV. Съ 6 таблицами и 7 рисунками въ текстѣ (I + 179 стр.). 1915. 8°. — 500 экз. Цѣна 2 руб. 50 коп.; 2 rbl. 50 cop.

99) **Bibliotheca Armeno-Georgica. V.** Рукописные отрывки армянской версіи Ветхаго Завѣта лапидарнымъ письмомъ съ палеографической таблицею. Издалъ епископъ Месропъ (V + IV + 32 стр.). 1915. 8°. — 350 экз.
Цѣна 1 руб.; 1 rbl.

100) **Труды В. Г. Васильевскаго.** Томъ третій (06 + CCLXXXVIII + 122 стр.). 1915. 8°. — 615 экз. Цѣна 2 руб. 50 коп.; 2 rbl. 50 cop.

101) **Отчетъ о дѣятельности Императорской Академіи Наукъ** по Физико-Математическому и Историко-Филологическому Отдѣленіямъ за 1915 годъ, составленный Непремѣннымъ Секретаремъ академикомъ С. Ѳ. Ольденбургомъ и читанный въ публичномъ засѣданіи 29 декабря 1915 года (362 + I + 28 стр. Съ однимъ портретомъ). 1915. 8°. — 815 + 25 вел. экз.
Въ продажу не поступаетъ.

102) **Отчетъ о дѣятельности Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ за 1915 годъ.** Составилъ академикъ В. Н. Перетцъ (II + 88 стр. Съ однимъ портретомъ). 1915. 8°. — 815 + 25 вел.
Въ продажу не поступаетъ.

Оглавленіе. — Sommaire.

Статьи: / **Mémoires:**

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Январь 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 2.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

1 ФЕВРАЛЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

1 FÉVRIER.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ, — семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей.

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.

ИЗВЛЕЧЕНІЯ

ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ АКАДЕМІИ.

ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ.

XI засѣданіе, 28 ноября 1915 года.

Исполняющій должность Управляющаго дворомъ въ Бозѣ почившаго Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Константиновича письмомъ отъ 27 ноября за № 1472 сообщилъ Вице-Президенту Академіи:

«По поводу передачи въ Императорскую Академію Наукъ согласно завѣщанія Великаго Князя Константина Константиновича всѣхъ дневниковъ Его Высочества имѣю честь сообщить Вашему Превосходительству, что предпослѣдняя книжка дневника, писанная во время пребыванія Великаго Князя въ Германіи лѣтомъ 1914 года, осталась вмѣстѣ съ остальнымъ багажемъ на станціи Гумбиненъ при возвращеніи Его Высочества въ Россію уже послѣ объявленія войны намъ Германіею. Весь багажъ этотъ нужно считать утеряннымъ. По возвращеніи въ Павловскъ Великій Князь началъ новую книгу дневника, которая и препровождена въ Академію какъ 66 книга».

Положено сообщить объ изложенномъ Министру Иностранныхъ Дѣлъ на случай возможнаго разысканія дневника послѣ окончанія военныхъ дѣйствій.

Ярославская Губернская Земская Управа отношеніемъ отъ 4 ноября за № 8613 сообщила:

«Губернское земское собраніе послѣдней очередной сессіи въ засѣданіи 5 февраля 1915 года постановило ходатайствовать передъ Академіей Наукъ о скорѣйшей разработкѣ основаній реформы по упрощенію русскаго правописанія. Исполняя это постановленіе, губернская управа позволяетъ указать на крайнюю практическую важность упомянутой реформы въ видахъ успѣшнаго развитія школьнаго дѣла».

Положено передать въ Комиссію по вопросу о Русскомъ правописаніи.

Георгій Карловичъ Гегеръ-Нелюбинъ принесъ въ даръ Академіи свой трудъ: «Свѣтлой памяти К. Р.». Петроградъ 1915, экземпляръ № 39/А.

Положено благодарить жертвователя, а книгу передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Владиміръ Владиміровичъ Ламанскій обратился къ Вице-Президенту Академіи съ письмомъ отъ 26 ноября:

«Послѣдніе годы жизни и ученой дѣятельности нашего покойнаго отца, академика В. И. Ламанскаго, тѣсно связаны съ Императорской Академіей Наукъ.

«Въ виду этого у насъ, дѣтей покойнаго, возникла мысль украсить стѣны Академіи его портретомъ.

«Принося въ даръ Императорской Академіи Наукъ стѣнное изображеніе покойнаго, исполненное по нашему заказу художницей Е. Б. Барсуковой, мы желали бы, чтобы это изображеніе было присоединено къ галлереѣ портретовъ покойныхъ академиковъ».

Непремѣнный Секретарь напомнилъ, что въ большомъ Конференцъ залѣ Академіи находится Лазаретъ, и что въ виду этого торжественное годовое засѣданіе Академіи 29 декабря тамъ устроено быть не можетъ, и просилъ указаній ОС., въ какомъ изданіи Академіи должна быть напечатана рѣчь академика В. И. Палладина, предназначенная къ произнесенію въ означенномъ Собраніи.

Положено засѣданіе 29 декабря устроить въ маломъ Конференцъ-залѣ, а предположенную къ произнесенію рѣчь академика В. И. Палладина не читать, а лишь напечатать при отчетѣ за 1915 годъ.

Въ виду истеченія срока полномочій члена Постоянной Комиссіи для пособія нуждающимся ученымъ, литераторамъ и публицистамъ академика Н. А. Котляревскаго и кандидата въ члены той же Комиссіи академика А. С. Лаппо-Данилевскаго были произведены выборы члена-академика отъ Общаго Собранія въ означенную Комиссію и кандидата въ члены, при чемъ членомъ Комиссіи оказался

избраннымъ академикъ Н. А. Котляревскій и кандидатомъ въ члены Комиссіи — академикъ М. М. Ковалевскій.

Положено сообщить объ этомъ въ Постоянную Комиссію для пособія нуждающимся ученымъ, литераторамъ и публицистамъ и въ Правленіе Академіи.

Приложенie къ протоколу XI засѣданія Общаго Собранія Императорской Академіи Наукъ 28 ноября 1915 года.

Господину Непремѣнному Секретарю Императорской Академіи Наукъ.
Чиновника особыхъ порученій В. А. Рышкова

РАПОРТЪ.

Имѣю честь представить Вашему Превосходительству полученные мною сего числа предметы изъ конторы въ Бозѣ почившаго Великаго князя Константина Константиновича, переданные въ Императорскую Академію Наукъ на основаніи завѣщанія Его Императорскаго Высочества, согласно описи, на которой мною учинена расписка въ полученіи:

1) Собраніе автографовъ русскихъ писателей.
2) Альбомъ Бартенева.
3) » писемъ по поводу «Гамлета».
4) » » » » стихотвореній К. Р.
5) Рукописи стихотвореній и литературныхъ и критическихъ трудовъ, 6 пакетовъ.
6) 5 пакетовъ съ бумагами.
7) Ящикъ съ 66 книгами дневника.
8) Перстень А. С. Пушкина.
9) Перо А. А. Фета.
10) Двѣ картины работы Я. П. Полонскаго.

Чиновникъ особыхъ порученій Вл. Рышковъ.

24 ноября 1915 г. № 43.

На поляхъ рукописная приписка: «Сдать перо и перстень на храненіе казначею въ кассѣ. Непремѣнный Секретарь Сергѣй Ольденбургъ». 24/XI 1915.

«Перстень и перо для храненія въ кассѣ принялъ 24/XI 1915. Рышковъ».

Содержаніе портфеля съ собраніемъ автографовъ.

На внутренней сторонѣ крышки портфеля имѣется написанное собственноручно Великимъ Княземъ Константиномъ Константиновичемъ «содержаніе» портфеля, не вполнѣ точно указывающее содержимое конвертовъ, а именно:

1) Автографовъ Императрицы Екатерины II — 11, съ 8 листами копій (конв. № 1).

2) Въ конвертѣ № 5 не автографъ Пушкина, а старинный списокъ, съ замѣткой О. А. Новиковой.

3) Въ конвертѣ № 7—12 автографовъ Пушкина.

4) Въ конвертѣ № 8—не автографъ Имп. Николая I, а старинный списокъ.

5) Въ конвертѣ № 11 автографы: князя А. А. Вяземскаго, князя А. С. Меншикова, 2 князя Вяземскаго, Т. Н. Грановскаго, Н. В. Кукольника, М. Н. Загоскина, Жуковскаго, М. П. Погодина, В. П. Боткина, графа М. М. Сперанскаго, Lavalette, Mazzini, Lesseps, Napoléon, адм. Рикорда (2); Antonelli (2), Beust (2), С. П. Свѣчиной, И. И. Лажечникова, Parny (списокъ).

Остальное въ записи отвѣчаетъ точно содержимому портфеля.

Сергѣй Ольденбургъ. Вл. Рышковъ. Б. Модзалевскій.

«Ключъ отъ портфеля для храненія въ кассѣ принялъ Рышковъ».

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТДѢЛЕНІЕ.

XV засѣданіе, 18 ноября 1915 года.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что 16 октября нов. ст. въ Вюрцбургѣ скончался на 54 году жизни членъ-корреспондентъ Академіи по разряду біологическихъ наукъ (съ 29 декабря 1906 г.) Теодоръ Бовери (Theodor Boveri).

Некрологъ покойнаго будетъ прочитанъ въ слѣдующемъ засѣданіи академикомъ В. В. Заленскимъ.

Память покойнаго почтена вставаніемъ.

Деканъ Медицинскаго факультета Императорскаго Казанскаго Университета при отношеніи отъ 7 ноября за № 692 препроводилъ въ Академію Наукъ три объявленія о конкурсѣ на каѳедру систематическаго и клиническаго ученія о нервныхъ и душевныхъ болѣзняхъ (по отдѣлу психіатріи) въ Императорскомъ Казанскомъ Университетѣ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Швейцарское Общество Естественныхъ Наукъ (La Société Helvétique des Sciences Naturelles) прислало слѣдующее обращеніе на имя Президента Академіи:

«Monsieur et très honoré Confrère,

«La Société Helvétique des Sciences Naturelles vient de commémorer, au cours de la réunion annuelle de ses membres tenue les 12, 13, 14 et 15 septembre 1915 à Genève, le centième anniversaire de sa fondation en octobre 1815 dans cette ville.

«Les circonstances actuelles l'ont obligée à donner à cette solennité un caractère de stricte intimité et l'ont par conséquent empêchée, à son grand regret, d'y convier des délégations des Corps Savants de l'Association Internationale des Académies, avec lesquels elle entretient des relations régulières.

«En portant ces faits à la connaissance de votre illustre Compagnie, le Comité Central de la Société Helvétique des Sciences Naturelles la prie de bien vouloir accepter l'hommage du volume spécial de «Notices Historiques et Documents» édité à cette occasion.

«Veuillez agréer, Monsieur et très honoré Confrère, l'assurance de notre considération la plus distinguée.

«Genève, le 31 Octobre 1915.

Pour le Comité Central:

«Le Président: Ed. Sarasin. Le Secrétaire: Ph. A. Guye».

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что книга принята въ Библіотеку Академіи подъ расписку директора II Отдѣленія.

Положено благодарить Общество.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Е. Романской (S. Romanskaja) «Ephéméride approchée pour chercher la comète d'Encke pendant son mouvement dans la partie supérieure de son orbite». (Приближенная эфемерида для отысканія кометы Энке во время ея движенія въ верхней части ея орбиты).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью члена-корреспондента Академіи О. Д. Хвольсона (O. D. Chwolson) «Sur les poids atomiques» (Объ атомныхъ вѣсахъ).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. М. Ляпуновъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Sur les séries des polynomes» (О рядахъ полиномовъ).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Н. Н. Безбородько «Делессить окрестностей Кварцханскаго мѣднаго мѣсторожденія Батумской обл.» (N. Bezborodko. Délessite de Kvarzhany, distr. de Batum).

Къ статьѣ приложены 2 рисунка.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Геологическаго Музея» свою статью «Гигантскія колоніи корненожекъ *(Nubecularia)* въ среднесарматскихъ пластахъ Южной Россіи» [N. I. Andrusov. Sur les colonies gigantesques des foraminifères *(Nubecularia)* dans le sarmatique moyen de la Russie Méridionale].

Къ статьѣ приложены 3 рисунка и 8 таблицъ.

Положено напечатать въ «Трудахъ Геологическаго Музея».

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что въ отвѣтъ на обращеніе къ лицамъ и учрежденіямъ, приглашаемымъ къ участію въ Комиссіи по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи, вновь получены увѣдомленія о назначеніи:

26) отъ Императорскаго Минералогическаго Общества — горнаго инженера Н. Н. Степанова;

27) отъ Императорскаго Ботаническаго Сада Петра Великаго: 1) главнаго ботаника Сада кс. Бориса Алексѣевича Федченко, 2) старшаго консерватора Сада сс. Владимира Леонтьевича Комарова и 3) старшаго консерватора Сада кс. Владимира Николаевича Любименко.

Положено полученныя заявленія передать въ Комиссію по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что въ отвѣтъ на обращеніе къ учрежденіямъ, приглашаемымъ къ участію въ работахъ Съѣзда ботаническихъ учрежденій въ Россіи, получены увѣдомленія о назначеніи:

2) отъ Воронежскаго Сельскохозяйственнаго Института — профессора Бориса Александровича Келлера;

3) отъ Императорскаго Ботаническаго Сада Петра Великаго — главнаго ботаника, магистра ботаники кс. Бориса Александровича Федченко и старшихъ консерваторовъ: доктора ботаники сс. Владимира Леонтьевича Комарова и магистра ботаники кс. Владимира Николаевича Любименко;

4) отъ Бюро по микологіи и фитопатологіи — младшаго специалиста Николая Александровича Наумова;

5) отъ Общества Естествоиспытателей при Императорскомъ Юрьевскомъ Университетѣ — дѣйствительнаго члена, привата-доцента Н. Н. Попова;

6) отъ Сухумской садовой и сельскохозяйственной опытной станціи — завѣдующаго В. П. Марковича;

7) отъ Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи — профессора Николая Васильевича Цингера;

8) отъ Московскаго Сельскохозяйственнаго Института — профессора С. Н. Ростовцева;

9) Рижское Общество Естествоиспытателей увѣдомило, что вслѣдствіе военнаго положенія оно лишено возможности избрать представителя или вообще участвовать въ предстоящемъ Съѣздѣ;

10) Императорскій Юрьевскій Университетъ увѣдомилъ, что не можетъ командировать никого, такъ какъ каѳедра ботаники въ немъ вакантна.

Положено сообщить академику И. П. Бородину.

Директоръ Зоологическаго Музея читалъ:

«Имѣю честь просить ходатайствовать передъ Постоянной Комиссіей для выдачи пособія нуждающимся литераторамъ, ученымъ и публицистамъ о назначеніи пожи-

зненной пенсіи вдовѣ скончавшагося корреспондента Зоологическаго Музея К. А. Сатунина, извѣстнаго маммаліолога, много потрудившагося по изученію отечественной фауны млекопитающихъ, преимущественно Кавказа».

Память покойнаго К. А. Сатунина почтена вставаніемъ.

Положено возбудить соотвѣтствующее ходатайство передъ Постоянной Комиссіей и выразить соболѣзнованіе Кавказскому Музею по случаю смерти К. А. Сатунина.

Академикъ В. И. Вернадскій сообщилъ о занятіяхъ Комиссіи по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.

Вмѣстѣ съ тѣмъ согласно постановленію редакціонной комиссіи «Матеріаловъ къ познанію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» академикъ В. И. Вернадскій просилъ ходатайствовать о такомъ порядкѣ продажи «Матеріаловъ», чтобы доходъ отъ очерковъ поступалъ на изданіе самихъ очерковъ.

Положено сообщить въ Правленіе для возбужденія соотвѣтствующаго ходатайства.

Академикъ В. А. Стекловъ читалъ докладъ Комиссіи, избранной Физико-Математическимъ Отдѣленіемъ Императорской Академіи Наукъ, по вопросамъ, касающимся преподаванія математики въ средней школѣ.

Положено напечатать докладъ въ приложеніи къ настоящему протоколу и имѣть сужденіе въ экстраординарномъ засѣданіи Отдѣленія 26 ноября.

Приложеніе къ протоколу XV засѣданія Физико-Математическаго Отдѣленія Императорской Академіи Наукъ 18 ноября 1915 года.

Докладъ Комиссіи по обсужденію нѣкоторыхъ вопросовъ, касающихся преподаванія математики въ средней школѣ.

Комиссія въ составѣ шести членовъ: академиковъ А. А. Маркова, А. М. Ляпунова, В. А. Стеклова и членовъ-корреспондентовъ Академіи Наукъ профессоровъ Н. Я. Цингера, Д. К. Бобылева и А. Н. Крылова имѣла три засѣданія: 26 октября, 9 и 16 ноября 1915 года, и послѣ всесторонняго обсужденія вопроса пришла единогласно къ заключеніямъ, которыя съ подробными соображеніями изложены въ нижеслѣдующемъ докладѣ.

1. Въ трехъ книжкахъ Журнала Министерства Народнаго Просвѣщенія (февраль, мартъ, апрѣль 1915 г.) напечатанъ проектъ члена Совѣта Министра Народнаго Просвѣщенія П. А. Некрасова и директора Урюпинскаго Реальнаго Училища П. С. Флорова о введеніи въ курсъ средней школы теоріи вѣроятностей, сводъ мнѣній нѣсколькихъ лицъ, оффиціально запрошенныхъ по поводу этого проекта Департаментомъ Министерства Народнаго Просвѣщенія (цирк. за № 60964 отъ 23 декабря 1913 г.), и обработка этого матеріала съ примѣчаніями и заключеніями П. А. Некрасова.

Несостоятельность этого проекта для спеціалистовъ математиковъ очевидна, но является серьезное опасеніе, что служебное положеніе одного изъ авторовъ можетъ способствовать проведенію проекта въ жизнь школы.

Министерство по поводу проекта произвело оффиціальную «анкету» среди отдѣльныхъ лицъ, намѣченныхъ Департаментомъ Народнаго Просвѣщенія. При этомъ не были опрошены наиболѣе авторитетныя учрежденія: Академія Наукъ и Россійскіе Университеты.

Возможность осуществленія проекта нисколько не отрицалась, а одинъ изъ его авторовъ, въ видахъ скорѣйшаго осуществленія, указывалъ даже на возможность проведенія двухчасового курса, какъ предпріятія внутривѣдомственнаго, безъ санкціи законодательныхъ учрежденій (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915, стр. 124).

Нѣкоторыя изъ опрошенныхъ лицъ также признали осуществленіе проекта желательнымъ или допустимымъ въ видѣ опыта, хотя ни одинъ изъ опрошенныхъ не далъ надлежащей оцѣнки проекта по существу.

Это обстоятельство заставило академика А. А. Маркова дать краткую, но опредѣленную оцѣнку разсматриваемаго «проекта» (Журн. Мин. Нар. Просв., май, 1915 г.).

Такая оцѣнка, а также статья проф. К. А. Поссе, касающаяся того же вопроса (Журн. Мин. Нар. Просв., сентябрь, 1915 г.), вызвали появленіе двухъ новыхъ статей П. А. Некрасова (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль и октябрь, 1915 г.), гдѣ авторъ пытается провести свое толкованіе основныхъ понятій и опредѣленій анализа, входящихъ въ настоящее время уже въ курсъ средней школы, а именно понятій о предѣлахъ и о безконечно-малыхъ величинахъ.

Взгляды П. А. Некрасова давно извѣстны математикамъ, но, пока они находили мѣсто лишь въ спеціальныхъ математическихъ журналахъ, ихъ можно было считать безвредными.

Дѣло мѣняется, когда распространителемъ ихъ является оффиціальный органъ, который не можетъ не считаться авторитетнымъ руководителемъ въ научно-педагогическихъ вопросахъ для учителей средней школы.

Поэтому Академія Наукъ, какъ первенствующее ученое сословіе Россійской Имперіи (Уставъ, § 1), могущее входить во все касающееся просвѣщенія (§ 8) и обязанное имѣть попеченіе о распространеніи просвѣщенія вообще и о направленіи онаго ко благу общему (§ 2, п. б), обязана высказать свое сужденіе объ основныхъ ошибкахъ и неправильныхъ (а потому и вредныхъ) идеяхъ, распространяемыхъ П. А. Некрасовымъ съ цѣлью проведенія ихъ въ обиходъ средней школы.

Прежде чѣмъ перейти къ вопросу о введеніи въ курсъ средней школы теоріи вѣроятностей, которое находится пока еще въ проектѣ, Комиссія остановится на толкованіи П. А. Некрасовымъ основныхъ началъ анализа, преподаваніе которыхъ уже введено въ курсъ среднихъ школъ.

2. Не входя пока въ подробности по этому предмету, Комиссія считаетъ нужнымъ отмѣтить, прежде всего, слѣдующее:

П. А. Некрасовъ стремится установить существованіе двухъ различныхъ направленій въ математической наукѣ, двухъ различныхъ научныхъ школъ, расходящихся въ пониманіи основныхъ началъ науки и борящихся между собою. Онъ противопоставляетъ одну школу, съ дурной теоріей познанія (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль, 1915 г., стр. 15), другой, во главѣ которой будто бы стояли академикъ В. Г. Имшенецкій и проф. Н. В. Бугаевъ (письмо П. А. Некрасова къ Вице-Президенту Академіи Наукъ), къ которой причисляетъ и себя; въ другихъ случаяхъ «пристраиваетъ» себя къ какой-то линіи «Лапласъ-Лагранжъ-Коши-Чебышевъ-Некрасовъ-Пирсонъ», противопоставляя ее — линіи «Лапласъ-Бьэнэмэ-Чебышевъ-Марковъ» (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль, 1915 г., стр. 10 и 11),

съ прибавленіемъ еще имени Я. Бернулли. П. А. Некрасовъ рѣшается утверждать на страницахъ Журнала Министерства, что дурная теорія познанія, проповѣдуемая школой, противъ которой борется онъ, «пустила довольно глубокіе корни въ Петроградскихъ болотахъ, заволакивающихъ вредными испареніями дѣйствительныя свѣтила науки и ея преподаванія» (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль, 1915 г., стр. 15). Онъ говоритъ о какомъ-то особомъ «анализѣ безконечно-малыхъ А. А. Маркова» (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль, 1915 г., стр. 15), о терминологіи Эйлера, которую, повидимому, реставрируетъ А. А. Марковъ, противупологая эту терминологію «истинной терминологіи Лагранжа» (т. XXVIII Матем. Сборн., стр. 459) и т. д.

П. А. Некрасовъ упрекаетъ А. А. Маркова и «его единомышленниковъ», что они «не дѣлаютъ различія между двумя понятіями о безконечно малыхъ величинахъ» (ibid., стр. 15), вразумляетъ приверженцевъ «дурной школы» «все сводящей къ пустотѣ пустотъ и къ иллюзіонизму» (ibid.), что существуетъ не одинъ, а «два первообразныхъ рода безконечно-малыхъ, ибо существуютъ два типа измѣненій: сплошное и прерывное», и т. п.

Конечно, для лицъ, пользующихся заслуженнымъ авторитетомъ въ ученомъ мірѣ, неправильность этихъ утвержденій не нуждается въ опроверженіи.

Но полемика П. А. Некрасова преслѣдуетъ иныя, болѣе широкія, практическія цѣли, выходитъ изъ области замкнутаго круга возможныхъ споровъ ученыхъ спеціалистовъ, разсчитана на болѣе широкій кругъ вообще образованныхъ людей, работающихъ и могущихъ оказывать вліяніе на постановку дѣла преподаванія и просвѣщенія.

Поэтому Комиссія считаетъ долгомъ заявить, что никакихъ двухъ различныхъ направленій въ пониманіи основныхъ началъ математики, двухъ различныхъ школъ не существуетъ. Нѣтъ никакого особаго анализа безконечно-малыхъ А. А. Маркова, нѣтъ никакой особой школы В. Г. Имшенецкаго и т. п. Никакихъ новшествъ, по существу дѣла, въ теорію предѣловъ ни А. А. Марковъ, ни кто-либо другой изъ признанныхъ за свои ученыя заслуги научныхъ авторитетовъ со временъ Коши не вводилъ и не можетъ вводить.

Существуетъ единственное всѣмъ ученымъ міромъ принятое опредѣленіе основныхъ понятій предѣловъ и безконечно-малыхъ, установленное со временъ Коши.

Этимъ опредѣленіемъ руководствуются всѣ ученые въ своихъ изслѣдованіяхъ и такія опредѣленія, почти дословно тождественныя, даются во всѣхъ классическихъ трактатахъ по дифференціальному и интегральному исчисленіямъ, а также и во всѣхъ наилучшихъ курсахъ современныхъ ученыхъ.

А. А. Марковъ, К. А. Поссе, всѣ профессора всѣхъ университетовъ даютъ въ сущности то же опредѣленіе безконечно-малыхъ, какое дано Коши въ его «Алгебраическомъ Анализѣ», а именно: «On dit qu'une quantité variable devient infiniment petite lorsque sa valeur numérique décroit indéfiniment de manière à converger vers sa limite zéro» (Cauchy, Analyse Algébrique, 1821).

Въ качествѣ образца пріемовъ, при помощи которыхъ П. А. Некрасовъ пытается разоблачить вредное направленіе «школы дурного познанія», Комиссія считаетъ полезнымъ привести слѣдующій:

По поводу опредѣленія безконечно-малаго числа, котораго держатся, какъ сказано выше, математики со временъ Коши и которое было приведено и проф. К. А. Поссе въ его статьѣ «Нѣсколько словъ о статьѣ П. А. Некрасова и т. д.» (Журн. Мин. Нар. Просв., сентябрь, 1915), П. А. Некрасовъ говоритъ:

«Свое опредѣленіе К. А. Поссе называетъ яснымъ; но на самомъ дѣлѣ его слѣдуетъ назвать только краткимъ по формѣ выраженія, по существу же оно, прикрытое дымкою логики «тождества неразличимыхъ», является очень туманнымъ. Какъ монистическое, оно, выключая изъ науки комбинаціонныя моральныя цѣнности такъ называемаго дуалистическаго міросозерцанія (см. Г. И. Челпановъ: Введеніе въ философію), непосредственно ведетъ къ монизму «Міровыхъ загадокъ» Геккеля. Станетъ ли К. А. Поссе защищать позицію, занятую этими загадками?

«Въ самомъ зародышѣ своей теоріи познанія Геккелевскій монизмъ убиваетъ понятія о единствахъ высшаго порядка, о которыхъ учитъ математика, не желающая въ своихъ опредѣленіяхъ измѣнять истиннымъ классическимъ гуманитарнымъ основамъ, направленнымъ въ сторону, противоположную тому, что называется варварствомъ, каннибальствомъ, первороднымъ грѣхомъ, съ коимъ борется гражданская наука и христіанская цивилизація съ единственной цѣлью совершенствованія человѣческой природы («будьте совершенны, какъ совершенъ Отецъ Вашъ Небесный»)».

3. Такъ какъ проповѣдь ошибочныхъ толкованій основныхъ началъ науки, которую П. А. Некрасовъ ведетъ неустанно, можетъ оказать весьма вредное вліяніе именно въ томъ случаѣ, если эти заблужденія проникнутъ въ среднюю школу, Комиссія считаетъ своей обязанностью войти въ дальнѣйшія подробности по этому предмету.

Заблужденія П. А. Некрасова по основнымъ вопросамъ анализа, входящимъ теперь въ обиходъ средней школы, ярко проявились еще около пятнадцати лѣтъ тому назадъ въ его нападеніи на мемуаръ Чебышева: «О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей» и на связанныя съ этимъ мемуаромъ работы академиковъ А. А. Маркова и А. М. Ляпунова.

Въ статьѣ: «По поводу одной простѣйшей теоремы о вѣроятностяхъ суммъ и среднихъ величинъ» (Мат. Сборн., т. XXII) П. А. Некрасовъ, между прочимъ, пишетъ: «Характеръ неточностей результатовъ мемуара Чебышева: «О двухъ теоремахъ относительно вѣроятностей» и связанныхъ съ этимъ мемуаромъ изслѣдованій А. А. Маркова и А. М. Ляпунова нуждается еще въ одномъ поясненіи. Это поясненіе сдѣлаетъ болѣе понятнымъ, почему эти неточности ускользали изъ ихъ вниманія. Выводы упомянутыхъ авторовъ опредѣляли при извѣстныхъ условіяхъ числовую величину предѣла вѣроятности P неравенствъ (11), каковой предѣлъ, по ихъ мнѣнію, всегда есть интегралъ вида (12). Но какъ понимать здѣсь слово «предѣлъ»?

«Въ своихъ изслѣдованіяхъ и въ приведенной выше теоремѣ я ставлю это понятіе въ связь съ понятіемъ объ эквивалентности вѣроятности P и величины L, къ кото-

рой P въ предѣлѣ стремится: величина P и ея предѣлъ должны быть эквивалентны, т. е. отношеніе $L:P$ должно стремиться къ 1. Такое пониманіе слова предѣлъ проникаетъ и черезъ весь анализъ безконечно-малыхъ, т. е. черезъ дифференціальное и интегральное исчисленіе, и лишь это пониманіе слова «предѣлъ» я считаю плодотворнымъ и вполнѣ достойнымъ научнаго изслѣдованія. Но съ этимъ понятіемъ о предѣлѣ очень часто расходятся выводы вышеупомянутыхъ авторовъ. Чтобы выводы ихъ сдѣлать формально правильными, нужно другое болѣе грубое понятіе о предѣлѣ, довольствующееся лишь соблюденіемъ требованія, чтобы разность $P-L$ между количествомъ P и его предѣломъ стремилась къ нулю, при чемъ P и L могутъ оказаться и неэквивалентными въ указанномъ смыслѣ, если они стремятся сами къ нулю. При такомъ грубомъ понятіи о предѣлѣ любое количество вида x^n при $n>0$ можно, напримѣръ, считать за предѣлъ $\sin x$ при убываніи абсолютной величины дуги x до нуля. Должно сказать, что съ такимъ понятіемъ о предѣлѣ выводы вышеупомянутыхъ авторовъ никогда не расходятся».

Во всемъ сказанномъ вѣрно лишь то, что выводы Чебышева, А. А. Маркова и А. М. Ляпунова не только очень часто, но и всегда расходятся съ понятіемъ П. А. Некрасова о предѣлѣ, точно такъ же, какъ съ нимъ расходятся всѣ безошибочные выводы ученыхъ всего свѣта.

Все же остальное въ только что приведенной цитатѣ представляетъ лишь извращеніе основныхъ опредѣленій и понятій анализа, что въ свое время было уже отмѣчено акад. А. М. Ляпуновымъ (Записки Импер. Харьк. Университета, Харьковъ, 1901).

П. А. Некрасовъ смѣшиваетъ, съ одной стороны, малыя величины съ безконечно-малыми и съ ихъ предѣломъ, а съ другой — понятіе о предѣлѣ съ понятіемъ объ асимптотическомъ выраженіи функцій, и все это принимаетъ за болѣе тонкое проникновеніе въ глубину науки.

Въ XXVIII томѣ Математическаго Сборника (1911 г., стр. 459) онъ вновь развиваетъ свои идеи въ слѣдующихъ фразахъ: «Слово предѣлъ въ примѣненіи къ дифференціальному исчисленію продолжаю понимать не въ смыслѣ Эйлеровой терминологіи, которую, повидимому, реставрируетъ А. А. Марковъ (стр. 11—12 «Отповѣди»), а въ смыслѣ Лагранжевой истинной терминологіи, опредѣляющей, напримѣръ, производную $f'(x)$ какъ предѣлъ извѣстнаго выраженія $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$, при чемъ по этой теоріи можно и должно говорить о предѣлѣ количества $\Delta f(x)$ не какъ о нулѣ, а какъ о малой величинѣ, эквивалентной количеству $f'(x)\Delta x$, пока $f'(x)$ не есть нуль; если же $f'(x)$ есть нуль, то приходится обратиться къ $\frac{1}{2}f''(x)\Delta x^2$ и т. д.».

Здѣсь указанное выше смѣшеніе понятій выражено еще отчетливѣе и подкрѣпляется какой-то истинной Лагранжевой терминологіей и теоріей.

Можетъ быть, подобныя взгляды и раздѣляются тѣми или иными лицами, мнѣнія которыхъ не имѣютъ научнаго вѣса, но ни въ трудахъ извѣстнаго французскаго ма-

тематика Жозефа Луи Лагранжа, ни въ трудахъ акад. В. Г. Имшенецкаго, на котораго ссылается П. А. Некрасовъ, ничего подобнаго найти нельзя.

Лагранжъ не только не развивалъ какой-либо теоріи, подобной той, на которую ссылается П. А. Некрасовъ, но даже въ нѣкоторыхъ своихъ изслѣдованіахъ совсѣмъ устраняетъ понятіе о безконечно-малыхъ или исчезающихъ величинахъ именно для того, чтобы достигнуть возможной простоты и ясности и освободиться отъ всякой метафизики[1] (см. «Lagrange: Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables», Nouveaux Mémoires de l'Acad. Royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1772, также Oeuvres de Lagrange, T. IX, Théorie des fonctions analytiques, 1881 г.).

П. А. Некрасовъ, наоборотъ, злоупотребляя математическимъ терминомъ безконечно-малое и всякими другими терминами схоластической философіи, заволакиваетъ свои разсужденія туманомъ метафизики.

Примѣрами такого злоупотребленія терминомъ безконечно-малое, котораго не можетъ допустить математикъ, заботящійся о строгости своихъ сужденій, могутъ служить слѣдующія мѣста изъ его второго изданія «Теоріи вѣроятностей»[2] (стр. 64, 65):

«Если числа Δx_1, $\Delta x_2, \ldots$ несоизмѣримы, то въ популярномъ смыслѣ мѣры h не существуетъ, математики же считаютъ эту мѣру h безконечно-малою. Сверхъ того, если перемѣнное x аналитически непрерывно, то математики, разсматривая разность смежныхъ значеній непрерывно возрастающаго перемѣннаго, обозначаютъ эту разность символомъ dx, считая dx величиною безконечно-малою; она же есть величина h» (стр. 64).

«Пусть перемѣнное $x = \dfrac{p}{q}$, гдѣ p и q суть цѣлыя взаимно простыя числа. Иначе говоря, x обнимаетъ совокупность всѣхъ чиселъ, кромѣ чиселъ несоизмѣримыхъ съ единицей. Въ этомъ случаѣ вышеуказанная мѣра h будетъ неуловимымъ безконечно-малымъ числомъ δx» (стр. 65).

Необходимо еще разъ напомнить, что самъ П. А. Некрасовъ считаетъ толкованіе «отвлеченныхъ математическихъ началъ, предлагаемыхъ учащимся для вытверживанія» предметомъ государственной важности (Журн. Мин. Нар. Просв., окт., 1915, стр. 98).

«Плодотворность началъ теоріи предѣловъ и дифференціальнаго и интегральнаго исчисленія», говоритъ онъ далѣе, «обусловлена въ среднемъ образованіи прежде всего полнотою и связностью опредѣленія главныхъ родовъ и видовъ дифференціаловъ перемѣнныхъ величинъ, независимыхъ и зависимыхъ. При этомъ должны быть при-

[1] Вліяніе таковой, конечно, еще сказывалось около 150 лѣтъ тому назадъ, въ первое время послѣ открытія метода безконечно-малыхъ, но со временъ Коши всѣ недоразумѣнія, о которыхъ еще упоминаетъ Лагранжъ въ 1772 году, отошли въ область исторіи.

[2] Это второе изданіе слѣдуетъ отличать отъ перваго, которое не содержитъ тѣхъ несообразностей, которыми переполнено второе.

няты въ соображеніе два различныхъ типа измѣненій: измѣненіе *сплошное* (непрерывное) и измѣненіе *несплошное* (прерывное). Здѣсь, у признанія основного значенія этихъ двухъ видовъ измѣненія зачинается рѣзкое различіе двухъ *первообразныхъ* родовъ *исчезающихъ дифференціаловъ:* дифференціалы потенціальные, соотвѣтствующіе измѣненію сплошныхъ перемѣнныхъ и способные достигать *вплотную* «абсолютнаго нуля» (таково разстояніе между зеноновской черепахой и вплотную догоняющимъ ее Ахиллесомъ), и дифференціалы актуальные, никогда не достигающіе нуля въ предѣлѣ, хотя могущіе стремиться къ нулю неограниченно (такова длина стороны c_n правильнаго n - угольника, вписаннаго въ данный кругъ при возрастаніи n до безконечности)».

Естественно возникнетъ у учениковъ предположеніе, что существуетъ нѣсколько «родовъ и видовъ дифференціаловъ перемѣнныхъ». Изъ нихъ разсматриваются далѣе только два «первообразныхъ рода исчезающихъ дифференціаловъ»; значитъ, возможны еще какіе-то непервообразные роды и виды не только исчезающихъ, но и неисчезающихъ дифференціаловъ.

Перваго рода «потенціальные дифференціалы» способны «достигать вплотную абсолютнаго нуля». Ученикъ задумается прежде всего надъ тѣмъ, что значитъ «достигать вплотную», и какимъ образомъ можно «достигать невплотную», а затѣмъ сейчасъ же наталкивается на какой-то «абсолютный нуль».

Когда же ученикъ дойдетъ до «актуальнаго дифференціала», который «никогда не достигаетъ нуля даже и въ предѣлѣ, хотя и можетъ стремиться къ нулю неограниченно», то, надо думать, окончательно станетъ въ тупикъ, особенно если вспомнитъ, что въ первомъ случаѣ рѣчь шла о какомъ-то «абсолютномъ нулѣ», смыслъ котораго и послѣ примѣра зеноновской черепахи отнюдь не разъяснился, а здѣсь говорится просто о «нулѣ», безъ прибавки термина «абсолютный».

Примѣръ стороны правильнаго n - угольника, длина которой будто бы и въ предѣлѣ, при возрастаніи n до безконечности, все-таки не достигаетъ нуля, хотя бы и не «абсолютнаго», конечно, еще болѣе запутываетъ дѣло.

Во избѣжаніе недоразумѣній необходимо отмѣтить, что возможность прерывныхъ измѣненій безконечно-малыхъ никто и не помышляетъ отрицать, и это зачастую отмѣчается въ курсахъ дифференціальнаго исчисленія (см., напр., C. Jordan, Cours d'Analyse; t. I, 1893, p. 16). Точно такъ же многіе авторы, для удобства, не причисляютъ къ совокупности значеній безконечно-малаго числа его предѣлъ «нуль» (см., напр., Bertrand, Traité de Calcul Différentiel, p. 1; А. А. Марковъ, Лекціи по диффер. исчисл., 1898 г., стр. 42); но, конечно, не эти простыя и ясныя вещи имѣетъ въ виду П. А. Некрасовъ, выдвигая именно противъ прочно установленныхъ со временъ Коши ясныхъ и точныхъ опредѣленій свои собственныя.

Комиссія сожалѣетъ, что ей приходится тратить трудъ и время на разборъ указанныхъ выше несообразностей, но считаетъ тѣмъ не менѣе своей обязанностью сдѣлать это именно потому, что здѣсь дѣло идетъ, какъ утверждаетъ и самъ П. А. Некрасовъ, дѣйствительно о «предметѣ государственной важности»: о возможности

пагубнаго вліянія разсматриваемыхъ заблужденій на преподаваніе математики въ средней школѣ.

4. Переходя къ вопросу о преподаваніи теоріи вѣроятностей въ средней школѣ, Комиссія не считаетъ возможнымъ входить въ разсмотрѣніе этого сложнаго вопроса по существу, независимо отъ упомянутаго въ началѣ доклада проекта П. А. Некрасова и П. С. Флорова, хотя нѣкоторые члены Комиссіи и высказывались принципіально противъ введенія въ программу средней школы курса теоріи вѣроятностей въ какомъ-бы то ни было видѣ.

Что же касается подлежавшаго обсужденію проекта П. А. Некрасова и П. С. Флорова, то отрицательный отзывъ о немъ былъ уже данъ акад. А. А. Марковымъ (Журн. Мин. Нар. Просв., Май, 1915).

Комиссія, признавая этотъ отзывъ вполнѣ правильнымъ, считаетъ нужнымъ сдѣлать еще слѣдующія дополнительныя замѣчанія.

Даже программа двухчасового общаго курса, предлагаемая проектомъ, окажется непосильной ученику средняго учебнаго заведенія при настоящей постановкѣ преподаванія математики и не внушитъ ему ничего, кромѣ трудно поправимой путаницы въ мысляхъ.

Начинать съ какого-то основного закона теоріи вѣроятностей, не говоря о сложеніи и перемноженіи вѣроятностей, и выводить съ самаго начала теорему Я. Бернулли нѣтъ никакихъ основаній.

Далѣе, превращеніе формулы бинома Ньютона изъ основной теоремы алгебры въ предложеніе теоріи вѣроятностей не только странно, какъ это замѣтилъ и проф. А. В. Васильевъ въ своемъ отзывѣ (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915), но прямо недопустимо въ курсахъ, преслѣдующихъ педагогическія цѣли. Нельзя также ничѣмъ оправдать выпущеніе изъ общаго курса алгебры такого важнаго и элементарнаго отдѣла, какъ теорія непрерывныхъ дробей, въ угоду проектируемому курсу теоріи вѣроятностей.

Кромѣ двухчасового курса предполагается еще, хотя бы въ видѣ опыта въ нѣкоторыхъ гимназіяхъ, четырехчасовой курсъ теоріи вѣроятностей. Тутъ дѣло обстоитъ еще хуже.

Здѣсь авторы не только предлагаютъ несоразмѣрно широкую программу, но и вводятъ въ педагогическую практику неправильныя толкованія предлагаемаго для изученія матеріала.

Четырехчасовой курсъ теоріи вѣротностей профессоръ П. А. Некрасовъ рекомендуетъ дополнить теоремой Чебышева «въ сопутствіи свойственной этой теоремѣ атмосферы ея статистическихъ основаній и ея статистическихъ слѣдствій» (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915, стр. 111).

П. А. Некрасовъ именуетъ эту теорему обобщеніемъ закона большихъ чиселъ (см. Теорію вѣроятностей, 2 изд., стр. 318).

Академикъ А. А. Марковъ, разсматривая статью: «Задачи и игры для дѣтскаго міра и т. д.», которая въ проектѣ П. А. Некрасова и П. С. Флорова занимаетъ видное мѣсто, уже отмѣтилъ, что вопреки ихъ утвержденіямъ, въ ней нѣтъ ни обобщенія теоремы Чебышева о среднихъ, ни упрощенія ея доказательства.

Въ настоящее время Комиссія считаетъ необходимымъ установить, на основаніи совокупности всѣхъ трудовъ П. А. Некрасова, что отношеніе его къ этой теоремѣ, представляющей по проекту главный предметъ изученія второго отдѣла четырехчасового курса, совершенно неправильно.

То, что онъ называетъ «крайне упрощеннымъ доказательствомъ теоремы въ общей, исчерпывающей формѣ, представляющей, можно сказать, универсальный принципъ теоріи познанія и воспріятія наличностей» (Журн. Мин. Нар. Просв., іюль, 1915, стр. 10), въ дѣйствительности сводится только къ начальной леммѣ Чебышева, съ указаніемъ условія, при которомъ методъ Чебышева можетъ вести къ цѣли.

Условіе это очевидно, и съ него начинается статья академика А. А. Маркова, «Распространеніе закона большихъ чиселъ на величины, зависящія другъ отъ друга» (Извѣстія Физ.-Мат. Общ. при Казанск. Универс., 1907 г.):

«А именно изъ разсужденій Чебышева ясно, что указанный законъ большихъ чиселъ долженъ оправдываться во всѣхъ тѣхъ случаяхъ, когда математическое ожиданіе квадрата разности между суммой величинъ и суммой ихъ математическихъ ожиданій, при безпредѣльномъ возрастаніи числа величинъ, возрастаетъ медленнѣе, чѣмъ квадратъ ихъ числа, такъ что отношеніе этого математическаго ожиданія къ квадрату числа величинъ имѣетъ предѣломъ нуль».

П. А. Некрасовъ устанавливаетъ то же самое условіе только въ болѣе сложномъ видѣ. Въ его «Теоріи вѣроятностей» на стр. 318 подъ заголовкомъ: «Обобщенный законъ большихъ чиселъ при обсужденіи смѣси независимыхъ и зависимыхъ перемѣнныхъ величинъ» мы находимъ слѣдующую «теорему», которая представляетъ дословное повтореніе такой же «теоремы» на стр. 301 подъ заголовкомъ: «Обобщеніе простого закона большихъ чиселъ»:

Теорема II. Если величину τ, указанную въ теоремѣ I, возможно выбрать такъ, чтобы количества $\tau\sqrt{g(1)}$ и $\frac{1}{m\tau^2}$ были весьма малы и стремились къ нулю при возрастаніи m до ∞, то вѣроятность P того, что абсолютная величина разности $\xi - a$ окажется весьма малымъ количествомъ, не превосходящимъ предѣла $\tau\sqrt{g(1)}$, будетъ болѣе $1 - \frac{1}{m\tau^2}$ и будетъ стремиться къ 1 (къ достовѣрности) при возрастаніи m до ∞».

Здѣсь $\xi = \frac{x + y + \ldots + u}{m}$, a означаетъ математическое ожиданіе числа ξ, $mg(1)$ математическое ожиданіе квадрата разности $m\xi - ma$.

Очевидно, что приведенное предложеніе ничего новаго не представляетъ, такъ какъ два условія П. А. Некрасова относительно $\tau\sqrt{g(1)}$ и $\frac{1}{m\tau^2}$, въ виду неопредѣленности положительнаго числа τ, равносильны одному условію, ясно высказанному въ началѣ вышеупомянутой статьи А. А. Маркова.

Задача именно и состоитъ въ указаніи случаевъ, когда это условіе выполняется.

Хотя статья «Общій основной методъ производящихъ функцій», гдѣ дается та же теорема, и «Теорія вѣроятностей» П. А. Некрасова появились пять лѣтъ спустя послѣ указанной статьи А. А. Маркова, однако П. А. Некрасовъ не далъ ни одного новаго случая теоремы, а остановился на исходномъ условіи статьи А. А. Маркова, приписавъ ему «исчерпывающую общность».

П. А. Некрасовъ сдѣлалъ здѣсь обычную для него ошибку, а именно: смѣшалъ условія, необходимыя для непосредственнаго примѣненія способа Чебышева, съ условіями, необходимыми для существованія самаго закона большихъ чиселъ.

Именно такой пріемъ вывода теоремы Чебышева и рекомендуется авторами проекта ввести въ элементарный учебникъ теоріи вѣроятностей для средней школы (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915, стр. 112).

Но изъ сказаннаго видно, что такой пріемъ не доставляетъ ни простоты, ни изящества, ни самой теоремы Чебышева о среднихъ, не говоря уже объ «атмосферѣ ей сопутствующей», основанъ на смѣшеніи различныхъ понятій и, конечно, не можетъ служить предметомъ изученія въ средней школѣ.

«Проектъ» настаиваетъ, далѣе, на необходимости ввести въ курсъ теоріи вѣроятностей средней школы особую главу подъ заглавіемъ: «Теорема Пирсона», при чемъ одинъ изъ авторовъ (П. А. Некрасовъ) проекта рекомендуетъ включить таковую даже въ двухчасовой курсъ (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915, стр. 114).

Академикъ А. А. Марковъ, а за нимъ и профессоръ К. А. Поссе уже указали, что такой «теоремы Пирсона» не существуетъ, но въ октябрьской книжкѣ Журн. Мин. Нар. Просв. (стр. 98) П. А. Некрасовъ «долгомъ имѣетъ вторично удостовѣрить, что указанная приближенная формула К. Пирсона есть *дедуктивная, а не эмпирическая,* и что правда, ею выраженная, есть, вопреки утвержденію К. А. Поссе, *теорема,* а не какой-либо другой видъ истины.

«Въ самомъ дѣлѣ истинность этой формулы строго доказывается на основаніи данныхъ условій только математикой, т. е. *независимо отъ опытовъ*».

Комиссія, разсмотрѣвъ вопросъ, пришла къ единогласному заключенію, что формула К. Пирсона, о которой идетъ рѣчь, дѣйствительно никакой теоремы не выражаетъ, а выводъ этой формулы, данный П. А. Некрасовымъ («Теорія вѣроятностей, стр. 518—520) никакого доказательства не представляетъ. То, что П. А. Некрасовъ называетъ строгимъ доказательствомъ, состоитъ въ замѣнѣ

конечныхъ приращеній перемѣнныхъ ихъ дифференціалами. Такимъ именно путемъ онъ получаетъ, какъ онъ самъ говоритъ, «приблизительное» уравненіе

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\beta(x-a_1)(x-a_2)},$$

которое и рѣшается назвать теоремой Пирсона (Ж. Мин. Нар. Просв., іюль и окт. 1915).

Преподносить учащимся въ средней школѣ такого рода бездоказательные выводы и неправильныя толкованія основныхъ теоремъ теоріи вѣроятностей (теорема Чебышева) въ качествѣ образовательнаго и развивающаго матеріала, само собой разумѣется, недопустимо.

5. Наконецъ, необходимо остановиться на томъ, что съ указаннымъ проектомъ введенія въ среднюю школу теоріи вѣроятностей связана попытка воздѣйствовать при помощи математики на нравственно-религіозное и политическое міросозерцаніе юношества въ напередъ заданномъ направленіи.

Такое отношеніе къ дѣлу опредѣленно высказывается весьма часто въ многочисленныхъ статьяхъ П. А. Некрасова и В. Г. Алексѣева, помѣщенныхъ не только въ чисто научныхъ и педагогическихъ журналахъ (напримѣръ, Математическій Сборникъ, Математическое Образованіе и др.) и во второмъ изданіи «Теоріи вѣроятностей» П. А. Некрасова, но и въ Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія.

Невозможно привести всѣ характерныя въ этомъ отношеніи мѣста, коими переполнены страницы «Теоріи вѣроятностей» и другихъ статей указанныхъ авторовъ. Для образца достаточно привести нѣкоторыя изъ нихъ.

На стр. 115 «Теоріи вѣроятностей» П. А. Некрасовъ пишетъ, напримѣръ: «Въ цѣломъ своемъ просвѣтительная философія вѣры, наукооборота, трудооборота и правооборота дастъ людямъ и конституцію. Цѣль этой философіи — освободиться и освободить людей отъ путъ корыстной *мистики* царства 1°, сохраняя живую *вѣру* въ приближеніе царства 2° (см. выше пунктъ I),—вѣру, въ которой таинства безкорыстны и узы священны. (Здѣсь слѣдуетъ ссылка на труды А. С. Хомякова, Кирѣевскаго, Гилярова-Платонова, Н. В. Бугаева, епископа Феофана-затворника Вышенскаго, С. Н. Трубецкого, на зигзаги мысли В. С. Соловьева). При этомъ математическая теорія вѣроятностей есть Паскалевскій и Бугаевскій мостъ, соединяющій вѣру, какъ фактъ народной психологіи и религіи, и науку другъ съ другомъ, съ подвигомъ, отвѣтомъ на спросъ и озареніемъ, съ вопросами политики и права общественнаго и частнаго».

Говоря далѣе о «примѣчательной» попыткѣ инженеръ-философа Ле-Пле «въ широкомъ масштабѣ привить, пришлифовать (допуская простительныя и искупаемыя невязки) основную религіозную мораль къ здравому смыслу естественныхъ и общественныхъ наукъ и наоборотъ», П. А. Некрасовъ продолжаетъ: «Этотъ этюдъ, а равно и опыты *просвѣщающей* политики государства, какъ педагога, на мои

взглядъ, убѣждаютъ въ возможности дальнѣйшаго культивированія этой прививки дисциплинъ науки и религіи другъ къ другу и къ дѣламъ народовъ земного шара».

Здѣсь же въ примѣчаніи, послѣ ссылки на статью В. Г. Алексѣева (Гербартъ, Штрюмпель и ихъ педагогическія системы) и самого П. А. Некрасова (Основы общественныхъ и естественныхъ наукъ въ средней школѣ), говорится: «Что касается прививки другъ къ другу принциповъ естественной науки и религіи, какъ вѣры въ Творца, то это сдѣлали съ полнымъ успѣхомъ еще Лейбницъ, Ньютонъ, Ломоносовъ, митрополитъ Филаретъ... и другіе».

Далѣе, въ § 35, стр. 369, подъ заголовкомъ «Четвертая антиномія Канта (о необходимомъ существѣ)» П. А. Некрасовъ говоритъ: «При добросовѣстномъ примѣненіи графиковъ вѣроятности и индуктивныхъ уравненій § 18 открытія («эврика») науки и откровенія религіи сходятся и дополняютъ другъ друга въ исторіи».

Приведемъ еще часть заключенія § 11-го книги III, подъ заголовкомъ «Взаимоотношеніе тройного комплекса явленій: E_0, E_1, E_2. Ритуалы записи и объективированіе критеріевъ ± сродства, соотвѣтствующихъ тройной ассоціаціи. Значеніе этихъ критеріевъ въ вопросахъ біологіи, наслѣдственности и традиціи».

Рядъ математическихъ формулъ, заполняющихъ страницы 458—460, заканчивается такими словами: «Устойчивость (статика) и, наоборотъ, морфологическая измѣняемость (превращенія) внѣшнихъ антропометрическихъ признаковъ, кровныхъ жизненныхъ свойствъ и духовныхъ способностей у чистыхъ расъ и у помѣсей изслѣдуется по схемамъ теоріи взаимоотношеній, съ помощью числовой геометріи именно *не двухъ, а обязательно трехъ измѣреній* X_0, X_1 *и* X_2, *присоединяя къ этимъ измѣреніямъ еще и четвертое* Z, *измѣряющее вѣроятности отклоненія* Δ».

«Это «четвертое» графическое измѣреніе, напоминая о погрѣшностяхъ сужденій, наблюденій, учетовъ и измѣреній, заставляетъ смотрѣть на эволюціонныя теоріи Дарвина, Геккеля и проч., какъ на фиктивныя утвержденія, требующія поправокъ, тѣмъ болѣе значительныхъ, чѣмъ дальше отъ наблюдаемыхъ фактовъ совершается теоретическая экстраполяція за предѣлы современной геологической эпохи».

Другой членъ Совѣта Министра Народнаго Просвѣщенія В. Г. Алексѣевъ находитъ нужнымъ введеніе въ курсъ средней школы теоріи вѣроятностей въ противовѣсъ тѣмъ превратнымъ ученіямъ новаго времени, въ возникновеніи коихъ будто бы повинны блестящіе успѣхи математическаго анализа и механики.

Въ своемъ «отвѣтѣ» на упомянутую въ началѣ доклада «анкету» (Журн. Мин. Нар. Просв., февраль, 1915) профессоръ чистой математики пишетъ:

«Образовательное значеніе этого курса» (т. е. теоріи вѣроятностей) «по моему мнѣнію, громадно, такъ какъ имъ открывается совсѣмъ новое міровоззрѣніе въ противовѣсъ господствующему матеріалистическому міровоззрѣнію, которое упрочилось во всѣхъ отрасляхъ знаній, незамѣтно пронизало всю нашу культуру, весь строй нашей жизни вслѣдствіе блестящихъ успѣховъ математическаго анализа и основанной на немъ механики — въ приложеніи послѣднихъ къ явленіямъ природы. Вслѣдствіе

успѣховъ этихъ приложеній, неоднократно являлась заманчивая мысль примѣнять простые аналитико-механическіе шаблоны изслѣдованія къ наукамъ біологическимъ и соціальнымъ, что породило не мало совершенно превратныхъ теорій и ученій новаго времени: соціальную физику Кетле, позитивизмъ Огюста Конта, дарвинизмъ въ его крайностяхъ, историческій матеріализмъ и т. д. При построеніи этихъ ученій, сыгравшихъ большую роль въ образованіи міровоззрѣній современной интеллигенціи, вносилась та односторонность, которая свойственна наиболѣе развившемуся и наиболѣе богатому приложеніями отдѣлу математики — математическому анализу, имѣющему дѣло не съ отдѣльными единицами, а со *сплошною* массою, съ *непрерывной* закономѣрностью. Вслѣдствіе сего, *качественные* вопросы, вопросы *формы* и *отношеній* отдѣльныхъ единицъ весьма часто получали ложное освѣщеніе при обработкѣ ихъ по шаблонамъ математическаго анализа и механики. Для этихъ вопросовъ имѣются въ математикѣ другіе образцы, другіе пріемы, заключающіе въ себѣ идею прерывности, идею соединеній или комбинацій отдѣльныхъ единицъ и, наконецъ, идею вѣроятности, при помощи которой можно учитывать даже свободно-волевыя закономѣрности той или иной группы индивидуумовъ».

Съ этими разсужденіями В. Г. Алексѣева умѣстно здѣсь сопоставить упомянутыя выше (во 2-мъ § настоящаго доклада) заявленія П. А. Некрасова о тѣхъ вредныхъ послѣдствіяхъ, къ которымъ ведетъ, по его мнѣнію, одно лишь признаніе общепринятаго въ наукѣ опредѣленія понятія о безконечно-маломъ числѣ.

Оно ведетъ, какъ оказывается, къ какимъ-то «противорѣчіямъ» (апоріямъ), къ «нуллизму» (пустота-пустотъ; Журн. Мин. Нар. Просв., стр. 100, октябрь, 1915), къ «иллюзіонизму», къ Геккелевскому монизму, убивающему «понятія о единствахъ высшаго порядка» (ibid., стр. 102), и т. п.

Въ противовѣсъ всѣмъ этимъ бѣдствіямъ, источникомъ которыхъ являются, по мнѣнію П. А. Некрасова и В. Г. Алексѣева, точныя и строго научныя опредѣленія, приведшія къ блестящимъ успѣхамъ математики въ области математическаго анализа и механики, и выдвигаются два средства:

Во-первыхъ, опредѣленія и сужденія самого П. А. Некрасова, которыя выдаются за ученія какой-то особой математики, «не желающей въ своихъ опредѣленіяхъ измѣнять истиннымъ классическимъ гуманитарнымъ основамъ, направленнымъ въ сторону противоположную тому, что называется варварствомъ, каннибальствомъ, первороднымъ грѣхомъ» (ibid., стр. 102, см. 2-й § доклада).

Во-вторыхъ, другой отдѣлъ той же самой математики — теорія вѣроятностей въ той программѣ и съ тѣми толкованіями, о которыхъ было уже сказано въ предыдущемъ §-ѣ настоящаго доклада.

Все сказанное какъ нельзя лучше подтверждается слѣдующими словами самого П. А. Некрасова:

«И будущій бакалаврскій классическій отдѣлъ *A* средней школы», говоритъ П. А. Некрасовъ (Журн. Мин. Нар. Просв., апрѣль, 1915, стр. 111), «долженъ усовершенствовать научно-философскую подготовку настолько, чтобы овладѣть грам-

матикой *чистой* догматической науки, богословской, логико-математической и юридической. Въ программу философіи этой науки долженъ войти двухчасовой курсъ теоріи вѣроятностей съ ея приложеніями къ метафизикѣ вѣры, какъ *предѣльной науки*, съ асимптотической нумерической логикой творческихъ безконечныхъ совершенствъ, проявляющихся этапами церковной исторіи. Должно сказать при этомъ, что между священной исторіей, метафизикою вѣры и естественно-историческою наукою можетъ и долженъ быть грамотно перекинутъ дружественный, спасительный для человѣческаго рода соединяющій «мостъ». Этотъ мостъ есть именно математическая теорія вѣроятностей и асимптотическая нумерическая логика, при чемъ естественный законный скепсисъ (см. Римл., гл. 14, 1—8) возникаетъ и воспитательно врачуется объясненіями, состоящими въ связи съ *индетерминизмомъ слова* (символическаго мышленія) и также *съ естественно-научнымъ и математическимъ индетерминизмомъ* $\left(\frac{1}{\infty}, \infty' - \infty, \frac{0}{0}\right.$ и пр.$\left.\right)$ въ области анализа безконечно-малыхъ и безконечно-большихъ и съ ученіемъ объ отношеніи конечнаго къ безконечно-малому $\frac{1}{\infty}$ и къ безконечнымъ ∞ совершенствамъ творческой Сущности, закрытой отъ насъ покрываломъ символовъ и нашихъ несовершенныхъ чувствъ» (Журн. Мин. Нар. Просв., апрѣль, 1915, стр. 112).

По поводу подобныхъ разсужденій Комиссія считаетъ неумѣстнымъ входить въ какіе бы то ни было комментаріи.

Ясно, что въ XX-омъ вѣкѣ возобновляются настойчивыя попытки использовать совершеннѣйшую изъ наукъ — математику — въ томъ направленіи, которому она по самой своей сущности служить не можетъ.

Такія попытки дѣлались неоднократно, напримѣръ, у насъ въ первой половинѣ прошлаго вѣка, когда старались доказывать Всемогущество Божіе при помощи разложенія въ рядъ

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots$$

при $x = 1$.

Опытъ показалъ, что всѣ эти поползновенія либо разсыпались въ прахъ передъ неумолимой строгостью точной науки, либо приводили къ результатамъ прямо противоположнымъ тѣмъ, которыхъ добивались злоупотреблявшіе математикой для цѣлей ей совершенно чуждыхъ.

Комисія полагаетъ, что вышеупомянутыя заблужденія и ошибочныя толкованія основъ науки и злоупотребленіе математикой съ предвзятой цѣлью превратить чистую науку въ орудіе религіознаго и политическаго воздѣйствія на подростающее поколѣніе, проникнувъ въ жизнь школы, принесутъ непоправимый вредъ дѣлу просвѣщенія.

Комиссія предлагаетъ Отдѣленію представить этотъ докладъ вниманію Господина Министра Народнаго Просвѣщенія и выразить пожеланіе объ опубликованіи его въ Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія, а также напечатать въ Извлеченіяхъ изъ протоколовъ засѣданій въ Извѣстіяхъ Императорской Академіи Наукъ.

Ординарный академикъ А. Марковъ.

Ординарный академикъ А. Ляпуновъ.

Ординарный академикъ В. Стекловъ.

Членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, заслуженный профессоръ Императорской Николаевской Военной Академіи, генералъ-отъ-инфантеріи Н. Цингеръ.

Членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, заслуженный ординарный профессоръ Петроградскаго Университета Д. Бобылевъ.

Членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, заслуженный профессоръ Николаевской Морской Академіи, флота генералъ-лейтенантъ А. Крыловъ.

Петроградъ, 16 ноября 1915 года.

XVI засѣданіе, 26 ноября 1615 года.

Во исполненіе постановленія ФМ. Отдѣленія состоялось разсмотрѣніе доклада Комиссіи по обсужденію нѣкоторыхъ вопросовъ преподаванія математики въ средней школѣ.

По разсмотрѣніи доклада избрана Комиссія подъ предсѣдательствомъ академика А. П. Карпинскаго изъ академиковъ А. А. Маркова, В. В. Заленскаго, С. О. Ольденбурга, А. М. Ляпунова, И. П. Бородина, В. А. Стеклова для редактированія представленія Отдѣленія на основѣ доклада Комиссіи. При этомъ положено затѣмъ послать означенное представленіе Министру Народнаго Просвѣщенія и выразить пожеланіе, чтобы оно было напечатано въ «Журналѣ Министерства Народнаго Просвѣщенія», сверхъ того помѣстить его въ «Извлеченіяхъ изъ протоколовъ засѣданій» въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Институтъ Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи (Харьковъ, Каплуновская ул., № 7) прислалъ, при циркулярѣ отъ 10 ноября за № 3515, 6 экземпляровъ объявленій о конкурсѣ на вакантныя въ Институтѣ каѳедры:

1) исторіи сельскаго хозяйства, сельскохозяйственной статистики и теоріи и политики сельскаго хозяйства,

2) лѣсоводства частнаго и энциклопедическаго курса лѣсныхъ наукъ,

3) лѣсной таксаціи, лѣсной оцѣнки и лѣсной статики,

4) государственнаго лѣсного хозяйства, лѣсной статистики и исторіи лѣсного хозяйства,

5) геодезіи и основъ высшей математики и механики,

6) ветеринаріи съ зоогигіеной,

7) дендрологіи съ географіей растеній,

8) молочнаго хозяйства,

9) луговодства съ культурой болотъ,

10) лѣсного инженернаго искусства

и 11) лѣсныхъ меліорацій,

и просилъ о распространеніи этихъ объявленій среди заинтересованныхъ въ нихъ лицъ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что въ отвѣтъ на обращеніе къ учрежденіямъ, приглашаемымъ къ участію въ работахъ Съѣзда ботаническихъ учрежденій въ Россіи, получены увѣдомленія о назначеніи:

11) отъ Императорскаго Общества Любителей Естествознанія, Антропологіи и Этнографіи, состоящаго при Московскомъ Университетѣ—непремѣннаго члена Обще-

ства и предсѣдателя Ботаническаго Отдѣленія Общества профессора Д. Н. Прянишникова;

12) отъ Императорскаго Казанскаго Университета — ординарнаго профессора В. В. Лепешкина;

13) отъ Императорскаго Московскаго Университета — ординарнаго профессора Михаила Ильича Голенкина;

14) отъ Батумскаго Ботаническаго Сада — доктора ботаники Александра Германовича Генкеля;

15) отъ Императорскаго Петроградскаго Университета — профессоровъ Х. Я. Гоби и С. П. Костычева;

16) отъ Императорскаго Московскаго Общества Испытателей Природы — дѣйствительнаго члена Общества О. В. Бухгольцъ.

17) отъ Петроградскихъ Высшихъ Женскихъ Курсовъ — профессора С. П. Костычева;

18) отъ Императорской Военно-Медицинской Академіи — ординарнаго профессора В. К. Варлиха;

19) отъ Императорскаго Лѣсного Института — ординарнаго профессора Л. А. Иванова;

20) отъ Рижскаго Политехническаго Института — профессора Ѳ. В. Бухгольца;

21) отъ Стебутовскихъ Женскихъ Сельскохозяйственныхъ Курсовъ — преподавателя курсовъ Б. Л. Исаченко;

22) отъ Кавказскаго Музея — главнаго ботаника Тифлисскаго Ботаническаго Сада П. И. Мищенко;

23) отъ Кіевскаго Политехническаго Института — ординарнаго профессора Е. Ф. Вотчала;

24) отъ Императорскаго Университета св. Владиміра — ординарнаго профессора А. В. Ѳомина.

25) отъ Общества Испытателей Природы при Императорскомъ Харьковскомъ Университетѣ — дѣйствительнаго члена Общества В. И. Таліева;

26) отъ Императорскаго Харьковскаго Университета — профессоровъ В. М. Арнольди и В. К. Залѣсскаго;

27) отъ Кавказскаго Отдѣла Императорскаго Русскаго Географическаго Общества — главнаго ботаника Тифлисскаго Ботаническаго Сада П. И. Мищенко;

28) отъ Императорскаго Томскаго Университета — профессора В. В. Сапожникова;

29) отъ Высшихъ Курсовъ П. Ф. Лесгафта — А. А. Рихтера;

30) отъ Гео-Ботанической Комиссіи при Докучаевскомъ Почвенномъ Комитетѣ — В. Н. Сукачева;

31) отъ Донского Политехническаго Института — профессора В. М. Арциховскаго;

32) отъ Императорскаго Новороссійскаго Университета — профессора Б. Б. Гриневецкаго;

33) отъ Императорскаго Варшавскаго Университета — профессора В. Ф. Хмѣлевскаго;

34) отъ Петроградскаго Медицинскаго Института — профессора Г. А. Надсона;

35) Кромѣ того, состоящее подъ Августѣйшимъ покровительствомъ Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Николая Михаиловича Уральское Общество Любителей естествознанія въ г. Екатеринбургѣ увѣдомило, что оно не имѣетъ среди своихъ членовъ, живущихъ въ г. Екатеринбургѣ такого ботаника-спеціалиста, которому оно могло бы поручить представительство на Съѣздѣ, но надѣется, что всѣ выдающіеся ботаники, удостоившіе его принятіемъ званія почетныхъ его членовъ, не упустятъ изъ виду его интересовъ при обсужденіи на Съѣздѣ вопросовъ, касающихся возможнаго участія провинціальныхъ научныхъ обществъ въ дальнѣйшемъ изслѣдованіи флоры всей Имперіи.

Положено передать академику И. П. Бородину.

Академикъ М. А. Рыкачевъ читалъ:

«Имѣю честь представить Отдѣленію первый выпускъ «Изслѣдованіе весенняго половодья 1908 года», изданный Отдѣломъ Земельныхъ Улучшеній подъ редакціею моею и профессора В. Г. Глушкова.

«Выпускъ заключаетъ въ себѣ Введеніе и Матеріалы наблюденій надъ половодьемъ 1908 года, критически обработанные Э. Ю. Бергомъ.

«Во введеніи я даю и объяснительную его записку, краткій обзоръ организаціи анкетъ Водомѣрною Комиссіею, начиная съ памятнаго своими наводненіями 1908 года, и подготовительныхъ работъ, предпринятыхъ Комиссіею для собиранія матеріала и изслѣдованія этого явленія. Тамъ же изложена и программа этого коллективнаго труда, выработанная Водомѣрною Комиссіею при участіи представителей Гидрографической части Отдѣла Земельныхъ Улучшеній.

«Въ виду важнаго не только научнаго, но и практическаго значенія предпринятаго изслѣдованія, изданіе его по соглашенію съ Водомѣрною Комиссіею приняла на себя упомянутая Гидрографическая часть.

«Матеріалы, обработанные Э. Ю. Бергомъ, заключены въ четырехъ таблицахъ:

«Въ таблицѣ I, озаглавленной «Характеръ весенняго половодья 1908 года», сообщаются свѣдѣнія о высотѣ и времени наступленія весеннихъ паводковъ въ 1908 г., включая данныя для сравненія съ половодьями за прежніе годы; здѣсь же приведены данныя о состояніи почвы.

Въ таблицѣ II даны болѣе подробныя свѣдѣнія о наводненіяхъ въ 1908 г., объ ихъ распространенности и ихъ разрушительныхъ дѣйствіяхъ.

«Въ таблицѣ III указаны отмѣченные знаки, до которыхъ достигали высокія воды 1908 г.

«Таблица IV, данная въ приложеніи, заключаетъ въ себѣ наивысшіе горизонты весеннихъ водъ и время ихъ наступленія за періодъ 1891—1908 гг. по наблюденіямъ водомѣрныхъ постовъ Управленія Внутреннихъ Водныхъ Путей и выведенные на основаніи этихъ данныхъ коэффиціенты интенсивности для каждаго года.

«Въ послѣдующіе выпуски «Изслѣдованія» войдутъ: записка Э. Ю. Берга объ интенсивности весенняго половодья 1908 г. съ приложеніемъ соотвѣтственной карты, записка В. Н. Лебедева о времени наступленія половодій въ 1908 г. съ приложеніемъ карты изохронъ максимальныхъ весеннихъ паводковъ, записка В. Н. Лебедева о состояніи почвы во время весеннихъ разливовъ съ приложеніемъ карты, записка М. А. Рыкачева о снѣговомъ покровѣ въ Европейской Россіи съ 1891 до 1908 г. въ связи съ наводненіями 1908 г., записка А. А. Каминскаго о температурѣ воздуха и почвы въ связи съ весенними половодьями и записка М. А. Рыкачева: описаніе всего явленія. Сюда войдутъ избранные планы, графики, фотографіи.

«Выпуски будутъ доставлены безплатно всѣмъ академикамъ, выразившимъ желаніе ихъ получить».

Положено принять къ свѣдѣнію, а книгу передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

ИСТОРИКО-ФИЛОЛОГИЧЕСКОЕ ОТДѢЛЕНІЕ.

XV засѣданіе, 25 ноября 1915 года.

Во исполненіе постановленія Отдѣленія (XIV. 295) академикъ М. А. Дьяконовъ читалъ некрологъ члена-корреспондента Г. Бруннера.

Положено напечатать некрологъ въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Г-жа С. Егорова (Sophie Egoroff) прислала изъ Ниццы въ даръ Академіи свою брошюру: «La loi de la nature». Nice. 1915. (16^{0}. 28 pp.).

Положено передать книгу во II Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ С. О. Ольденбургъ читалъ:

«Магистрантъ Евгеній Дмитріевичъ Поливановъ Русскимъ Комитетомъ для изученія Средней и Восточной Азіи былъ командированъ лѣтомъ 1915 г. въ Японію для изученія японскихъ говоровъ. Научное направленіе Е. Д. опредѣлилось уже передъ тѣмъ: ученикъ проф. И. А. Бодуэнъ-де-Куртенэ и приватъ-доцента Л. В. Щерба, Е. Д. примыкаетъ къ тому направленію языкознанія, которое обращаетъ особое вниманіе на изученіе народныхъ говоровъ, съ помощью примѣненія всѣхъ пріемовъ и приборовъ, выработанныхъ въ фонетическихъ лабораторіяхъ. При этомъ точное наблюденіе фактовъ живой рѣчи не является само по себѣ цѣлью, а служитъ надежнымъ основаніемъ для построенія теоріи историческаго развитія всѣхъ говоровъ данной семьи изъ одного основного говора. Работа Е. Д. нынѣшнимъ лѣтомъ въ Японіи была въ высокой степени плодотворна. Имъ детально изученъ цѣлый рядъ говоровъ, намѣчена ихъ классификація и, какъ слѣдствіе ея, картина историческаго развитія всей семьи японскихъ говоровъ. Въ лекціи, прочитанной имъ передъ факультетомъ восточныхъ языковъ Императорскаго Петроградскаго Университета, Е. Д. сообщилъ о ходѣ своихъ работъ вообще и о связи отдѣльныхъ частей, на которыя онѣ распадаются, съ указаніемъ общей цѣли ихъ и построенія исторіи японскаго языка. Одна изъ этихъ частныхъ работъ — изслѣдованіе музыкальнаго ударенія въ говорѣ города Токіо — уже напечатана въ «Извѣстіяхъ» Императорской Академіи Наукъ. Подготовляются къ печати изслѣдованія о Кіотоскомъ говорѣ, говорѣ префектуры Нагасаки и др. Всѣ эти работы безъ особаго труда могутъ быть напечатаны въ Петроградѣ. Но среди частныхъ работъ Е. Д. есть одна, которую желательно было бы печатать въ Японіи. Это — фонетическій словарь Кіото-

скаго говора. Печатаніе его обойдется несравненно дешевле въ Японіи, чѣмъ могло бы обойтись здѣсь. Въ этомъ словарѣ Е. Д. собралъ до 10000 словъ, записанныхъ общей фонетической транскрипціей, съ указаніемъ характернаго японскаго ударенія. Значенія словъ приведены японскими іероглифами.

«Такъ какъ Русскій Комитетъ для изученія Средней и Восточной Азіи не печатаетъ результатовъ организуемыхъ имъ предпріятій и не имѣетъ на этотъ предметъ суммъ, то онъ просилъ бы ассигновать до 300 руб. на напечатаніе этого изданія».

Положено разрѣшить печатаніе фонетическаго словаря Кіотоскаго говора въ Японіи и выдать академику С. О. Ольденбургу на печатаніе этого изданія авансомъ подъ отчетъ 300 руб. изъ процентовъ съ капитала К. Т. Солдатенкова, состоящихъ въ распоряженіи Отдѣленія.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Въ Комиссіи по составленію академическаго грузинскаго словаря, когда предстояло одобрить для напечатанія «Программу для собиранія матеріаловъ по нарѣчіямъ и говорамъ грузинскаго, мингрельскаго, лазскаго и сванскаго языковъ» (1914. XV. 399), совмѣстную работу мою, І. А. Кипшидзе и А. Г. Шанидзе, выяснилось, что въ виду особенностей нелитературныхъ языковъ мингрельскаго, лазскаго и сванскаго программу, касающуюся грузинскаго языка и его говоровъ и составленную І. А. Кипшидзе и А. Г. Шанидзе, слѣдуетъ выдѣлить и напечатать отдѣльно, но въ то же время мнѣ представилось цѣлесообразнымъ использовать въ качествѣ сотрудниковъ всѣхъ желающихъ и могущихъ намъ сотрудничать, хотя бы свободно владѣющихъ лишь грузинскимъ языкомъ, и въ этихъ цѣляхъ русскій текстъ программы, весьма несложный, всего въ 8 страницъ, необходимо снабдить параллельнымъ изложеніемъ ея на грузинскомъ языкѣ, что и прошу Конференцію разрѣшить».

Разрѣшено, о чемъ положено сообщить академику Н. Я. Марру и въ Типографію.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи просилъ Конференцію выразить благодарность генералу Отто Львовичу Радлову за принесенную имъ въ даръ Музею этнографическую коллекцію. Изъ числа пожертвованныхъ О. Л. Радловымъ въ отдѣлъ Китая предметовъ особую цѣнность представляютъ по работѣ старинныя копья изъ буддійскаго храма. Крайне рѣдки также старинныя охотничьи ружья китайской работы. Особенно цѣнными пріобрѣтеніями для Музея являются ружья на подобіе старинныхъ самопаловъ.

Кромѣ того, О. Л. Радловымъ принесено въ даръ Музею собраніе абиссинскаго оружія (28 предметовъ), среди котораго выдѣляются 2 кожаныхъ щита, металлическіе дротики и 2 старинныхъ меча.

Положено благодарить жертвователя.

Директоръ Азіатскаго Музея доложилъ, что привать-доцентъ Императорскаго Петроградскаго Университета Б. Я. Владимірцовъ принесъ въ даръ Азіат-

скому Музею 43 тетради монгольскихъ и ойратскихъ (калмыцкихъ) рукописей, которыя внесены въ Инвентарь 1915 г. за № 1482 и просилъ приложенный имъ списокъ напечатать въ «Извѣстіяхъ» подъ заглавіемъ «Новыя пріобрѣтенія Азіатскаго Музея».

Положено благодарить жертвователя, а списокъ напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи подъ заглавіемъ «Новыя пріобрѣтенія Азіатскаго Музея».

Директоръ Азіатскаго Музея читалъ:

«Имѣю честь донести, что младшій ученый хранитель Азіатскаго Музея приватъ-доцентъ В. М. Алексѣевъ принесъ въ даръ Музею 16 эстампажей китайскихъ стэль изъ Сианьфу и 2 — джурдженскаго письма, внесенныхъ въ Инвентарь 1915 г. №№ 1303 и 1308.

«Прилагаемый при семъ списокъ принесенныхъ въ даръ эстампажей предлагаю напечатать въ «Извѣстіяхъ» подъ заглавіемъ «Новыя пріобрѣтенія Азіатскаго Музея».

Положено благодарить жертвователя, а списокъ пожертвованныхъ г. Алексѣевымъ эстампажей напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Отъ лица «Carlsberg Fondet» завѣдующій изданіемъ «Tabeller over Skibsfart og Varetransport gennem Øresund» проф. Кр. Эрслевъ изъ Копенгагена представилъ обычный отчетъ о ходѣ работъ по снятію копій съ документовъ, ихъ группировкѣ и составленію таблицъ за 1915 годъ.

«Въ теченіе нынѣшняго года продолжалось снятіе копій съ таможенныхъ вѣдомостей, касающихся Сунда и Бельта: содержаніе ихъ съ 1720 года видимо осложняется, такъ какъ съ того времени означаются, кромѣ обычныхъ, еще грузы на корабляхъ изъ Швеціи и шведскихъ владѣній, да и составъ грузовъ вообще становится болѣе разнообразнымъ. Снятіе копій съ таможенныхъ вѣдомостей Сунда за 1693, 1698 и 1699 гг., начатое въ 1913—1914 г., завершено, а также окончены такія же работы надъ документами 1700—1711 и 1719—1721 гг.; приступлено къ списыванію данныхъ за 1730 и 1731 гг.; снятіе копій съ таможенныхъ вѣдомостей Бельта сосредоточилось на документахъ 1701—1712 и 1719—1721 гг.; всего принято во вниманіе 63.234 шкипера».

«Приведеніе въ порядокъ списаннаго матеріала по мѣсту происхожденія, отправленія и назначенія корабельныхъ грузовъ, распредѣленію ихъ движенія по мѣсяцамъ и т. п. обнимало 1687, 1691—1711 и 1719—1720 гг., при чемъ касалось 75.000 шкиперовъ».

«Составленіе таблицъ сводилось къ группировкѣ показаній о проѣзжавшихъ за 1685—1688 и 1690—1702 гг. корабляхъ, всего до 63.000, и о разновидностяхъ товаровъ за 1670 и 1680 гг. (начатой въ 1913—1914 гг.), а также за 1690—1700 и въ значительной мѣрѣ за 1710 годъ; разновидности товаровъ раз-

мѣщаются частью по мѣсту происхожденія, частью по мѣсту отправленія и назначенія кораблей.

«Въ совокупности вышеозначенныя работы, производившіяся подъ руководствомъ издательницы, продолжались 2033,25 часовъ въ Архивѣ и 3571,75 въ Бюро фонда, всего же 5605 часовъ».

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ С. О. Ольденбургъ доложилъ, что профессоръ Новороссійскаго Университета Гавріилъ Ивановичъ Танфильевъ принесъ въ даръ Академіи тибетскій ксилографъ, полученный имъ отъ лица, пріѣхавшаго съ Дальняго Востока.

Положено благодарить профессора Г. И. Танфильева, а книгу передать въ Азіатскій Музей.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Въ прошломъ году мнѣ не удалось продолжить работу по абхазскому языку, которой я имѣю возможность посвящать пока лишь рождественское вакаціонное время. Чувствуя потребность въ возобновленіи этой работы, въ частности въ видахъ устраненія ряда недоумѣній, возникшихъ у меня при печатаніи маленькаго абхазско-русскаго словаря, я прошу Конференцію командировать меня на мѣсяцъ съ 15 декабря въ Черноморскую и Кубанскую области и въ Сухумскій округъ съ тѣмъ, чтобы на случай непреодолимой трудности при настоящихъ условіяхъ сообщенія проникнуть съ сѣвера въ Абхазію я имѣлъ возможность ознакомиться на мѣстѣ, по эту сторону Кавказскихъ горъ, въ Кубанской и Черноморской областяхъ, съ нарѣчіями, родственными съ абхазскимъ, а также съ черкесскимъ языкомъ. Въ то же время я просилъ бы ассигновать мнѣ сумму на покрытіе расходовъ по командировкѣ, а также освѣдомить о ней мѣстныя власти».

Положено командировать академика Н. Я. Марра, о чемъ сообщить въ Правленіе для исполненія. Вмѣстѣ съ тѣмъ положено произвести соотвѣтствующія сношенія съ мѣстными властями.

ДОКЛАДЫ О НАУЧНЫХЪ ТРУДАХЪ.

О. О. Баклундъ. Кристаллическія породы съ сѣвернаго побережья Сибири. II. Породы западнаго побережья Таймырскаго полуострова. (Съ картой распредѣленія породъ, 6 таблицами и 15 рисунками въ текстѣ). (H. Backlund. Les roches cristallines du littoral septentrional de la Sibérie. II. Les roches du littoral occidental de la presqu'île Tajmyr. Avec une carte pétrographique, 6 planches et 15 figures).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 20 января 1916 г. академикомъ **А. П. Карпинскимъ**).

Работа О. О. Баклунда представляетъ вторую часть его изслѣдованій обширныхъ петрографическихъ матеріаловъ, собранныхъ Русской Полярной Экспедиціей, и обнимаетъ область отъ устья рѣки Пясины до мыса Челюскина. Въ обработку, кромѣ того, включены сборы съ земли Императора Николая II и Цесаревича Алексѣя, доставленные въ Геологическій Музей Гидрографической Экспедиціей Морского Вѣдомства, подъ начальствомъ флигель-адъютанта Б. А. Вилькицкаго.

Въ центральной части изслѣдованной области обнажается неправильной формы гранитный массивъ, имѣющій характеръ батолита. Главная его часть состоитъ изъ однообразнаго, сѣраго двуслюдяного гранита, съ небольшими отклоненіями дифференціаціоннаго характера въ сторону натроваго и каліеваго (отчасти пегматитоваго) гранита.

Гранититъ болѣе молодого, по сравненію съ гранитомъ, возраста играетъ подчиненную роль, выступая въ видѣ лакколита къ востоку отъ центральнаго массива.

Центральный гранитъ окруженъ ореоломъ кристаллическихъ сланцевъ, болѣе древнихъ по возрасту; по мѣрѣ удаленія отъ массива наблюдается слѣдующая смѣна: гранато-кордіеритовый, гранатовый, біотитовый и гранато-ставролитовый гнейсы; гранато-ставролитовый, гранатовый и нормальный двуслюдяные сланцы; біотитовый, гематитовый, анкеритовый, хлоритовый, пиритовый и углистый филлиты. Породы эти приняли свой современный обликъ помимо контактоваго дѣйствія.

Гранититъ окруженъ ореоломъ породъ, имѣющихъ характеръ роговиковъ, но отличающихся отъ «нормальныхъ» контактовыхъ породъ развитіемъ роговообманковой фаціи, вмѣсто пироксеновой, а именно антофиллитовыми и куммингтонитовыми породами, вмѣсто гиперстеновыхъ и діопсидовыхъ.

Цѣлый рядъ роговиковъ, какъ то кордіеритовый и біотитовый (съ той же замѣной пироксеновыхъ породъ роговообманковыми) до гроссуляро-амфиболовыхъ и эпидотовыхъ породъ включительно, по изученнымъ матеріаламъ не обнаруживаетъ прямой связи съ выходами изверженныхъ породъ, хотя контактовый характеръ ихъ едва ли подлежитъ сомнѣнію.

Въ изслѣдованной области намѣчаются четыре зоны крупныхъ тектоническихъ нарушеній. Мощность этихъ зонъ, характеръ и интенсивность измѣненій, входящихъ въ нихъ породъ, какъ кристаллическихъ сланцевъ, такъ и породъ роговиковыхъ, заставляетъ въ Западномъ Таймырѣ предполагать страну широкихъ тектоническихъ перекрытій.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ, въ серіи «Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи 1900—1903 гг.».

В. Бротерусъ, О. Кузенева и Н. Прохоровъ. Списокъ мховъ Амурской и Якутской областей. (V. Brotherus, O. Kuzeneva et N. Prochorov. Liste des mousses provenants des provinces d'Amour et de Jakutsk).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 20 января 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Работа содержитъ краткій перечень маршрутовъ, совершенныхъ въ Амурской области Н. И. Прохоровымъ и О. І. Кузеневой въ экспедиціяхъ Переселенческаго вѣдомства и командированной по Высочайшему повелѣнію Амурской за періодъ 1908—1911 гг. Изслѣдованія охватили бассейнъ средняго теченія рѣки Амура, бассейнъ средняго и верхняго теченія рѣки Зеи и югъ Якутской области въ предѣлахъ Яблоноваго хребта. Приводится краткая характеристика посѣщенной территоріи въ отношеніи орографическомъ, почвенномъ, климатическомъ, ботаническомъ и отмѣчаются главнымъ образомъ основныя черты распространенія мховъ и ихъ роль въ растительности края. Помимо маршрутныхъ наблюденій надъ мхами производились и стаціонарныя изслѣдованія.

Списокъ содержитъ 178 видовъ, изъ нихъ 7 новыхъ, и болѣе полутора тысячъ мѣстонахожденій.

Коллекція обработана В. Ф. Бротерусомъ, а матеріалъ, относящійся къ *Sphagnales*, въ большей своей части Г. Линдбергомъ.

Въ концѣ приводится сводная таблица мховъ по ихъ мѣстообитанію.

Къ работѣ прилагаются 4 таблицы новыхъ видовъ и 3 фотографіи.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Краткій отчетъ о совершенной въ 1915 г. поѣздкѣ въ Ляпинскій край Тобольской губ.

Б. Н. Городкова.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

Продолжая ботанико-географическое изслѣдованіе Тобольской губ., я въ 1915 г. на средства Императорской Академіи Наукъ совершилъ поѣздку въ Ляпинскій край. Приготовленія къ ней начались еще зимой прошлаго года, когда я, въ отвѣтъ на свое письмо, получилъ отъ Березовскаго исправника Л. Н. Ямзина свѣдѣнія о наиболѣе удобныхъ способахъ сообщенія между г. Березовомъ и Саран-пауломъ, крупнымъ селеніемъ на р. Ляпинѣ, вблизи Урала.

Изъ Петрограда удалось выѣхать только 29 мая. Начало іюня было посвящено подготовкѣ къ поѣздкѣ въ г. Тобольскѣ, куда еще раньше выѣхалъ приглашенный мною въ качествѣ помощника студентъ Петроградскаго Университета Н. С. Юрцовскій. Главная часть снаряженія была получена изъ Ботаническаго Музея Академіи Наукъ и изъ Переселенческаго Управленія, благодаря любезности Б. А. Федченко. Въ Тобольскѣ же пришлось подготовлять только то, что было неудобно везти изъ Петрограда, какъ-то: ящики, провизію, часть ботаническаго и почвеннаго снаряженія и т. п. Кромѣ того, здѣсь же я пытался нанять рабочихъ, но это не удалось. 13 іюня, съ первымъ пароходомъ, я выѣхалъ изъ Тобольска въ Березовъ, куда Юрцовскій, дожидавшійся въ Тобольскѣ анероидовъ изъ Николаевской Физической Обсерваторіи и зоологическаго снаряженія изъ Музея Академіи Наукъ, долженъ былъ прибыть со слѣдующимъ пароходомъ, выходившимъ черезъ 2—3 дня. Плаваніе на буксирномъ пароходѣ, дѣлавшемъ продолжительныя остановки на попутныхъ пристаняхъ, продолжалось 9 дней. За это время мнѣ удалось пополнить свои прошлогодніе ботаническіе сборы въ нѣкоторыхъ селеніяхъ по р. Оби. Прибывъ въ

Березовъ 22 іюня, я совершилъ однодневную поѣздку на земскомъ пароходѣ въ с. Полноватское. Вернувшись оттуда, я уже засталъ въ Березовѣ Юрцовскаго, который привезъ анероиды, но не могъ дождаться зоологическаго снаряженія. Въ этотъ же день (24 іюня), къ вечеру, на земскомъ пароходѣ «А. Станкевичъ», отправлявшемся въ с. Самаровское, мы выѣхали вверхъ по р. Сосвѣ до юртъ Шайганскихъ, гдѣ и были высажены вмѣстѣ съ двумя рабочими, нанятыми на пароходѣ. Дальнѣйшее путешествіе производилось земской гоньбой на двухъ большихъ лодкахъ. Плывя день и ночь безостановочно и мѣняя только гребцовъ, мы рано утромъ 1 іюля прибыли въ Сарап-паулъ. По пути удалось сдѣлать только небольшіе ботаническіе сборы. Два дня заняли приготовленія къ поѣздкѣ на Уралъ, наемъ проводника вогула и еще одного рабочаго — зырянина, выборы подходящей лодки, обслѣдованіе окрестностей, учрежденіе временной метеорологической станціи. 3 іюля бечевой мы двинулись вверхъ по р. Ляпину, а 4-го уже вошли въ р. Манью. 6-го появился первый перекатъ, а 7-го пересѣкли рѣзкую границу между лѣснымъ Ураломъ и низменностью. Дальнѣйшій путь по мѣрѣ подъема въ Уралъ становился все труднѣе и труднѣе, благодаря порогамъ, по которымъ рабочимъ приходилось тащить лодку на рукахъ по поясъ въ водѣ. Во все время пути мною производились ботанико-географическія и почвенныя изслѣдованія какъ въ долинѣ рѣки Маньи, такъ и на ограничивающихъ ее хребтахъ. Студентъ Юрцовскій велъ метеорологическія наблюденія и занимался при моей помощи сушкой растеній. Въ свободное время мною дѣлались возможные безъ спеціальнаго снаряженія зоологическіе сборы (почти исключительно бабочекъ), а съ 11-го іюля я началъ съемку Маньи помощью шагомѣра и компаса, идя по берегу ея. 13 іюля вечеромъ мы настолько поднялись по сильно уменьшившейся рѣкѣ, что дальнѣйшій путь на лодкѣ сдѣлался невозможнымъ. Здѣсь рѣшено было сдѣлать болѣе продолжительную остановку, чтобы произвести изслѣдованія въ горномъ (безлѣсномъ) Уралѣ, на границѣ котораго мы находились. На слѣдующій же день мы покинули палатки и направились вверхъ по Маньѣ къ высокой сопкѣ Сале-урр-ойка. Подножія ея, послѣ труднаго пути, достигли вечеромъ 14 іюля. Переночевавъ выше границы лѣса, утромъ, несмотря на сильный вѣтеръ и моросившій дождь, мы рѣшили подняться на вершину Сале-урр-ойка. Трудности подъема устрашили рабочихъ и они отказались слѣдовать дальше, дойдя только до перваго зубца хребта. Дальнѣйшій подъемъ былъ совершенъ мною вдвоемъ съ Юрцовскимъ, причемъ намъ удалось достигнуть вершины сопки, несмотря на покрывавшія ее облака. По пути производились какъ ботанико-географическія наблюденія, такъ и

связанныя съ ними гипсометрическія опредѣленія помощью анероида и гипсотермометра. Вечеромъ мы благополучно спустились уже по другому пути къ мѣсту нашей стоянки, гдѣ и заночевали. Ночью начался сильный дождь, который продолжался весь день, сильно затрудняя ботаническіе сборы и обратный путь къ палаткамъ въ долинѣ Маньи. 17 іюля провели въ палаткахъ за разборкой матеріаловъ, 18-го производилось изслѣдованіе сосѣдней сопки съ безлѣсной вершиной, а 19-го отправились пѣшкомъ въ горный Уралъ по лѣвому берегу Маньи къ ея верховьямъ. Вечеромъ достигли довольно значительной сопки на водораздѣлѣ рѣкъ Манья и Порна-я; она была изслѣдована на другой день. Прибывъ ночью на стоянку, мы слѣдующій день посвятили разборкѣ матеріаловъ и подготовкѣ къ обратному пути. 22 іюля быстро поплыли внизъ по вздувшейся отъ дождя Маньѣ, въ одинъ день сдѣлавъ $3^1/_2$ перегона передняго пути. Дальнѣйшій путь нѣсколько задерживался изслѣдованіями и съемкой шагомѣромъ. Послѣдняя продолжалась до перваго порога на Маньѣ, откуда я началъ уже лодочную съемку посредствомъ компаса и часовъ. 26-го вечеромъ, при сильномъ дождѣ, мы прибыли въ Саран-паулъ, гдѣ и остановились въ палаткахъ. 27 іюля провели въ селеніи, а 28-го, нанявъ лошадь съ нартами, я отправился въ Уралъ по Сибиряковской дорогѣ. Юрцовскій остался въ селеніи, занявшись экономическимъ обслѣдованіемъ населенія, главнымъ образомъ интересовавшимъ меня вопросомъ о взаимоотношеніи между пришлыми зырянами и мѣстными инородцами-вогулами. Преодолѣвъ довольно значительныя трудности, благодаря совершенно разрушенному болотистому тракту и плохой погодѣ, я перевалилъ въ Вологодскую губернію вечеромъ 31 іюля, а 1 августа отправился обратно. По пути, кромѣ общихъ ботаническихъ и почвенныхъ изслѣдованій, была составлена ботанико-географическая карта пройденнаго пространства, пріуроченная къ барометрической нивеллировкѣ посредствомъ анероида. Въ Саран-паулъ я вернулся 3 августа, а 4-го уже удалось выѣхать внизъ по Ляпину. Плохая погода и сильный дымъ отъ дальнихъ пожаровъ затрудняли дальнѣйшій путь. Особенно отразилось это на количествѣ фотографическихъ снимковъ и отчасти на съемкѣ. 9 августа мы вошли въ рѣку Сосву, а 18-го вечеромъ прибыли въ Березовъ. 22-го пришелъ земскій пароходъ, который долженъ былъ совершить рейсъ до села Сортыньинскаго на Сосвѣ. Желая дополнить и исправить свою съемку, я отправился на немъ снова по рѣкѣ Сосвѣ. Выѣхать на Самарово удалось только утромъ 27 числа. Въ Тобольскѣ мы были 3 сентября. Здѣсь я пробылъ $2^1/_2$ дня, занимаясь разборкой и укупоркой собранныхъ матеріаловъ. Въ Петроградъ прибылъ 11 сентября.

За все время поѣздки была обслѣдована въ ботанико-географическомъ и почвенномъ отношеніи мѣстность вдоль Сосвы и Ляпина до устья Маньи и по рѣкѣ Маньѣ до ея верховьевъ, а также Сибиряковскій трактъ до Европейско-Азіатскаго водораздѣла. Между прочимъ, была опредѣлена въ нѣсколькихъ пунктахъ высота границы лѣса на Уралѣ, верхнія границы главныхъ древесныхъ породъ и нѣкоторыхъ растительныхъ формацій (напримѣръ, торфяниковъ съ сосной), а также восточная граница своеобразныхъ рямовыхъ кедровниковъ на торфяникахъ. Закономѣрное распредѣленіе растительныхъ формацій по долинамъ рѣкъ Западно-Сибирской низменности, служившее цѣлью моихъ изслѣдованій въ прошедшіе годы, вполнѣ подтверждено наблюденіями и нынѣшняго лѣта. Были произведены также нѣкоторыя біологическія наблюденія надъ кедромъ и сосной, которыя привели къ выводамъ, объяснившимъ причину исчезновенія сосны на торфяникахъ сѣвернѣе и восточнѣе извѣстнаго предѣла и присутствія кедра на сѣверныхъ сфагновыхъ болотахъ. Собрано около 2000 листовъ гербарія, а также небольшая коллекція различныхъ *Polyporaceae* и *Agaricineae*. Считаю необходимымъ замѣтить, что необычайно ранняя весна и дождливая вторая половина лѣта отразились въ плохую сторону на сборахъ. Почвенныя изслѣдованія привели къ необходимости значительнаго перемѣщенія западной границы области ослабленнаго подзолообразованія (скрыто-подзолистой) на востокъ — за рѣку Обь. Образцы почвъ (6 монолитовъ и нѣсколько мѣшковъ) переданы въ Докучаевскій Почвенный Музей.

Съемка всего пройденнаго пути должна значительно пополнить и исправить существующія карты Ляпинскаго и Сосвинскаго края.

Студентомъ Юрцовскимъ собранъ довольно значительный матеріалъ, касающійся быта зырянъ и русскихъ въ Ляпинскомъ краѣ и ихъ попытокъ развитія огородничества и хлѣбопашества. Имъ же велись метеорологическія наблюденія за время поѣздки. Кромѣ вышеуказаннаго, мною сдѣлано 88 фотографическихъ снимковъ, преимущественно растительности края, и привезены небольшія зоологическія коллекціи, переданныя въ Зоологическій Музей Императорской Академіи Наукъ. На средства Тобольскаго Губернскаго Музея произведены покупки вещей, характеризующихъ бытъ вогуловъ Сосвы и Ляпина. Вещи переданы въ названный музей.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Nostoc coeruleum Lyngb. Строеніе его таллома и размноженіе.

И. Михайлова.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 2 сентября 1915 г.)

Въ нижеприводимомъ спискѣ литературы, какъ въ руководствахъ общаго характера, такъ и въ оригинальныхъ статьяхъ описывается размноженіе рода *Nostoc* посредствомъ «гормогоніи». Этотъ процессъ свойственъ какъ аморфнымъ *Nostoc*'амъ, такъ и шаровымъ, у послѣднихъ онъ описывается какъ болѣе сложный.

Мною разслѣдованы два вида *Nostoc*'а: 1) *N. pruniforme* Agardh и *N. coeruleum* Lyngb, преимущественно второй видъ, очень удобный для микроскопическаго изслѣдованія вслѣдствіе незначительнаго размѣра его таллома (отъ 3—5 мм.); этотъ *Nostoc* прозраченъ въ слѣдствіе отсутствія на его поверхности налета постороннихъ микроорганизмовъ.

Разслѣдованіе строенія производилось на срѣзахъ, сдѣланныхъ отъ руки; консистенція живыхъ шаровъ такова, что при извѣстномъ навыкѣ, удается получить отличные срѣзы, не прибѣгая ни къ фиксаціи, ни къ микротому. Микроскопическихъ реакцій не производилось (за исключеніемъ окраски реактивомъ Ганштейна на слизь).

Результаты разслѣдованія получились слѣдующіе: талломъ независимо отъ его величины и состоянія жизнедѣятельности оказался построеннымъ изъ совершенно гомогенной слизи и массы заключенныхъ въ ней четковидныхъ нитей синезеленой водоросли; слоистости въ слизи не замѣчалось. Реактивъ Ганштейна сильнѣе окрашиваетъ слизь въ поверхностномъ слоѣ. Въ этомъ же слоѣ находятся и включенныя въ немъ нити водоросли; подойдя къ поверхностному слою онѣ либо тянутся по нормали къ поверх-

ности таллома, либо образуютъ петлю, тоже расположенную по нормали къ поверхности.

Въ теченіе всего лѣта, начиная съ іюня до конца августа, происходитъ дѣленіе и почкованіе *Nostoc*'а (см. рис. таб. I. № 1—7 и таб. II. № 1—9).

Большое количество талломовъ *Nostoc*'а было принесено 7-го іюля въ лабораторію и помѣщено въ чашку Коха: къ 26-му іюлю большинство дѣлившихся особей распалось на дочернія особи; почкующія образовали почки.

Кромѣ этого макроскопическаго наблюденія производились многократныя микроскопическія наблюденія отдѣльныхъ, какъ дѣлящихся такъ и почкующихъ талломовъ; на перенесенныхъ въ микроаквaріумъ *Nostoc*'ахъ удалось прослѣдить за ходомъ этого процесса на одномъ и томъ же экземплярѣ (см. рисунки и ихъ описанія на прилагаемыхъ таблицахъ).

10-го VII 1915 г. принесена проба матеріала. 13-го взятъ и помѣщенъ въ микроаквaріумъ уже вытягивающійся по длинной оси талломъ *N. coerulеum;* величина 3 мм. (Рис. Т. 1 № 1). Уже 14-го VII къ 10 ч. у. можно было обнаружить слѣдующее: форма таллома овальная, процессъ роста идетъ быстро — перетяжка ясно намѣтилась (Рис. 2 Таб. I).

15-го VII 12 ч. 30 м. «Форма бисквитообразная; процессъ идетъ энергично: перетяжка углубляется. Петли нитей и нити у поверхностного слоя лежатъ по нормалямъ. Слой нитей въ плоскости дѣленія становится болѣе рыхлымъ. Видны промежутки между отдѣльными нитями и петлями. Связь между разъединяющимися талломами поддерживается 40—50 нитями (Таб. I Рис. 2; нити зарисованы не всѣ)».

16-го VII, 11 час. у. «Талломъ сильно перетянутъ; связь между дѣлящимися талломами поддерживается 18 нитями; можно наблюдать разъединеніе нитей на два участка. Расхожденіе сопровождается выпаденіемъ гетероцистъ изъ нити или разрывами нитей. Слой нитей въ области перетяжки разрыхленъ очень сильно.» (Рис. Т. II № 30).

16-го VII, 7 ч. в. «Перетяжка утоньчилась очень немного. Видны расхожденія нитей, которыя разойдясь образуютъ петли и вытягиваются по нормалямъ». (Рис. 3, Таб. I).

17-го VII, 12 ч. д. «Перетяжка еще утоньчилась; идутъ разрывы нитей». (Рис. 4, Т. I).

17-го VII, 6 ч. в. «Перетяжка очень тонка; связь поддерживается лишь двумя нитями. Дочернія особи округлой формы». (Рис. 5, Таб. I).

18-го VII, 1 ч. дня. «Материнская особь подѣлилась на двѣ дочернія, связь между ними поддерживается лишь тонкимъ слоемъ слизи». (Рис. 6, Таб. I).

19-го VII (въ теченіе всего дня). «Дочернія особи находились въ контактѣ».

20-го VII. «Дочернія талломы подъ вліяніемъ тока воды въ микроакваріумѣ распались.» (Рис. 7, Таб. I).

Почкованіе встрѣчается значительно рѣже и притомъ у талломовъ большихъ по объему; въ нѣкоторыхъ случаяхъ наблюдалось массовое ихъ почкованіе съ одной, двумя, тремя и четырьмя почками. (Рис. №№ 1—9, Т. II). Удавалось прослѣдить всѣ переходы отъ почкованія къ дѣленію.

Одинъ талломъ *Nostoc*'а съ тремя почками (Рис. 9, Т. II) былъ 7. VII помѣщенъ для наблюденія въ микроакваріумъ. Почка C — въ начальной стадіи процесса — перетяжка еще не рѣзкая. Почка B дальнѣйшая стадія процесса: перетежка сильно врѣзалась въ талломъ; нити и петли лежатъ по нормалямъ, видно разрыхленіе въ зонѣ дѣленія; только 24 нити связываютъ почку B съ материнской частью. Почка A — послѣдняя стадія дѣленія: перетяжка почти закончена и въ тяжкѣ слизи видна одна нить къ 11 ч. у. 8-го VII эта почка отпала отъ таллома. Почка B, пройдя всѣ стадіи дѣленія, тоже отдѣлилась и 10-го VII лежала въ микроакваріи отдѣльно. Почка *C* была умышленно повреждена (надрѣзанъ поверхностный слой) и къ 12-му VII началось ея сильное разложеніе.

Приведенныя выше наблюденія даютъ возможность сдѣлать слѣдующіе выводы:

1) Шаровые Nostoc'и построены изъ слизи съ включенными въ нее нитями водоросли; они обладаютъ индивидуальной структурой, ростомъ и размноженіемъ.

Списокъ литературы.

1. Borge, O. «Nordamerikanische Süsswasseralgen». Ark. Bot. Stockholm № 8. 1909.
2. Bouilhac. R. «Sur la végetation du Nostoc punctiforme en présence de différents hydrates de carbone». Paris. C. R. Ac. sc. 133. 1901.
3. Engler. A. und Prantl. K. «Die natürlichen Pflanzenfamilien». 1898. T. I. Ab. 1. p. 72—74.
4. Hieronymus, G. «Beiträge zur Morphologie und Biologie der Algen». (Cohn. Beit. z. Biol. d. Pflanz. Bd. 5. 1892. p. 461—495).
5. Kirchner, O. Kryptogamen-Flora von Schlesien. 1878.
6. Bornet, E. et Flahault, Ch. «Revision des Nostocacées heterocystes». Ann. des sc. nat. ser. T. III. VII. 1886—88.
7. Rabenhorst. «Flora Europaea Algarum». S. II. 1865.
8. de Bary, A. «Beitrag zur Kenntnis der Nostocaceen». Flora. 1863.
9. Kutzing. E. Tabulae Phycologicae. Bd. I. II. 1845. 1852.
10. Nägeli, G. Gattungen einzelliger Algen. 1849.

Объясненія къ таблицамъ.

Всѣ рисунки съ микроскопическихъ препаратовъ сняты съ помощью рисовальнаго аппарата Аббе при увеличеніи въ 97 разъ (система Цейсса *A* и окуляръ № 4). Общій видъ таллома *Nostoc'a* разсматривался надъ лупой съ увеличеніемъ въ 16 разъ.

Таблица I.

Рис. 1—7. Стадіи дѣленія *Nostoc coeruleum* Lyngb.

Рис. 1 a — 7 a. Микроскопическія картины тѣхъ же стадій развитія этого организма.

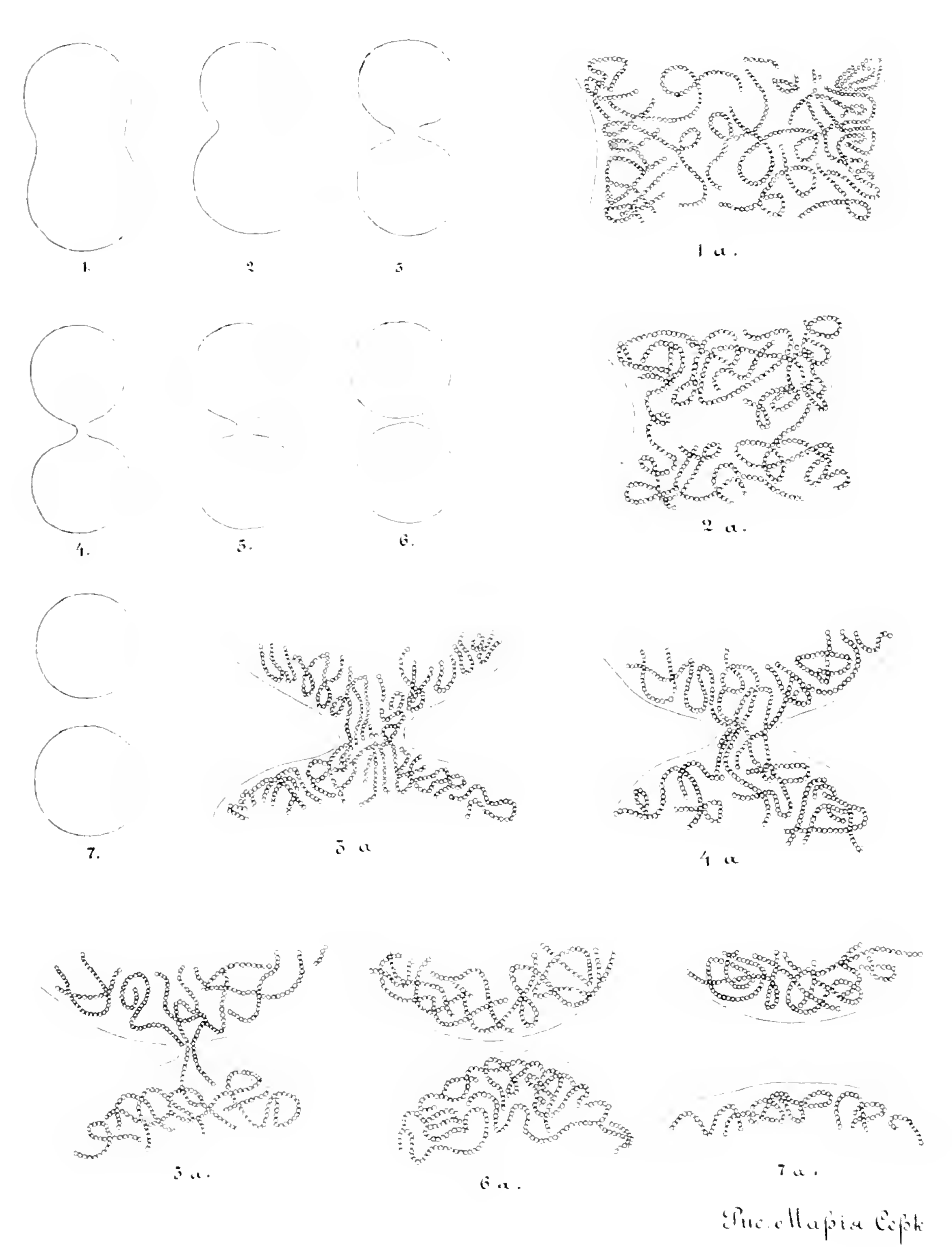
Таблица II.

Рис. 1—9. Стадіи почкованія *Nostoc coeruleum* Lyngb.

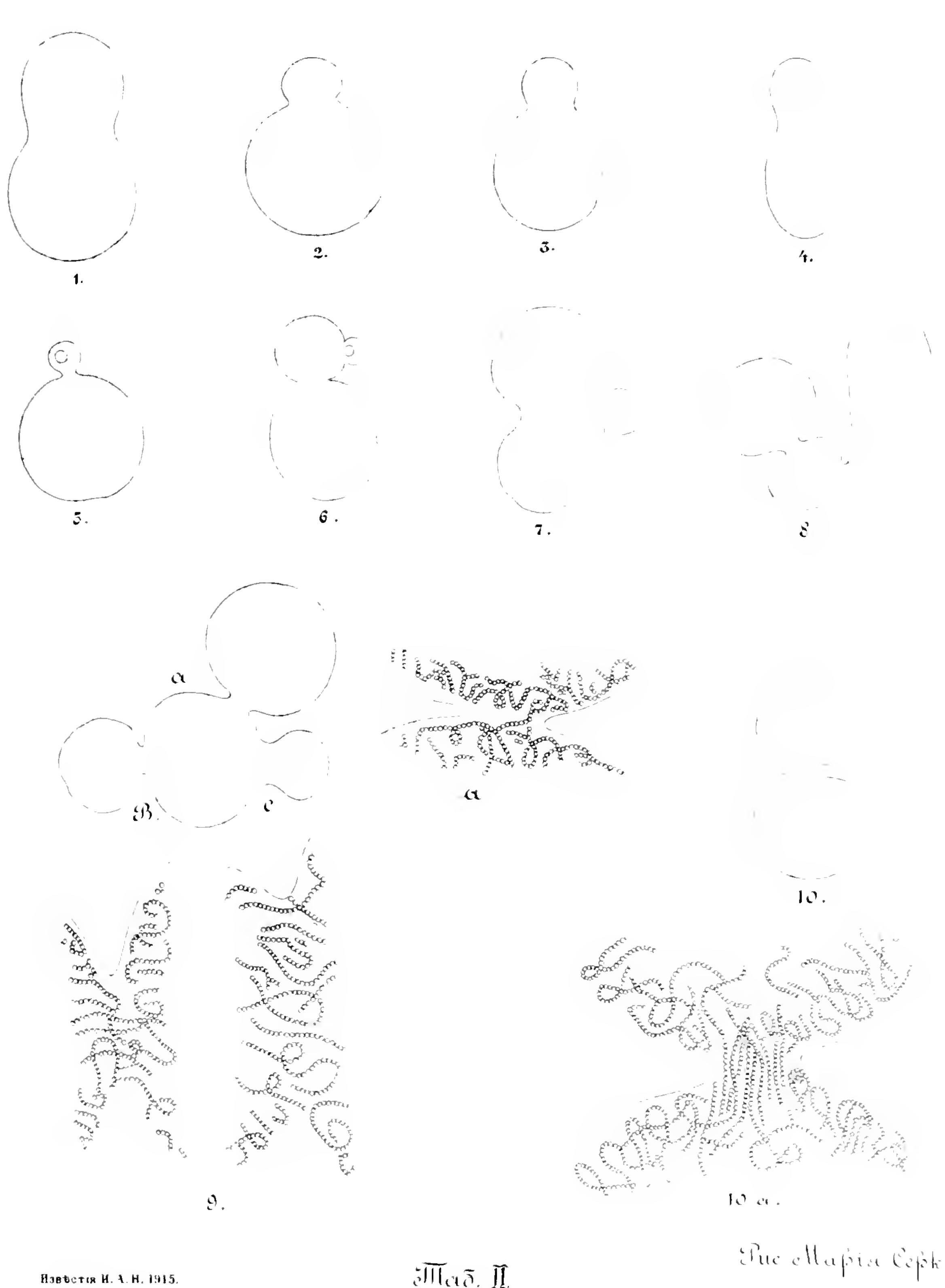
Рис. 9 a. Микроскопическая картина почкованія *Nostoc'a*, изображеннаго на рис. 9.

Рис. 10 и 10 a. Стадія дѣленія *Nostoc coeruleum* Lyngb.

И. Михайловъ. Nostoc caeruleum Lyngbye



Таб. I.


И. Михайловъ. Nostoc caeruleum Lynghye
1.
2.
3.
4.
5.
6.
7.
8.
a
B.
c
a
10.
9.
10 a.
Рис. Марiя Серк

Таб. II.

Оглавленіе.—Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.
Январь 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 3.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

15 ФЕВРАЛЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

15 FÉVRIER.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и посторонних ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,—семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Фельдшпатизація известняковъ.

П. А. Земятченскаго.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

До настоящаго времени имѣется нѣсколько работъ, въ которыхъ встрѣчаются указанія на нахожденіе полевыхъ шпатовъ, въ видѣ новообразованій, въ условіяхъ исключающихъ участіе сильно дѣйствующихъ метаморфизующихъ агентовъ — высокой температуры, большого давленія, пневматолиза и пр., именно въ породахъ осадочныхъ, на которыхъ если и видно вліяніе метаморфическихъ процессовъ, то только такихъ, какія имѣютъ мѣсто въ обычныхъ условіяхъ наружной части земной коры. Такъ Ch. Lory[1] встрѣтилъ ортоклазъ и альбитъ въ юрскихъ известнякахъ восточныхъ Альпъ. M. L. Cayeux[2] нашелъ и описалъ въ мѣлу кристаллы только ортоклаза. Онъ приводитъ рядъ соображеній и обстоятельствъ, доказывающихъ образованіе этихъ кристалловъ in Situ и отмѣчаетъ нѣкоторую связь ихъ съ количествомъ зеренъ главконита. Авторъ настоящей замѣтки описалъ нахожденіе ортоклаза и микроклина въ бурыхъ желѣзнякахъ г. Липецка[3]. Большую и обстоятельную статью по данному вопросу далъ M. F. Grand-

---

[1] Ch. Lory. Étude sur la constitution et la structure des massifs de chistes cristallins des Alpes occidentales. Grenoble. 1889, p. 10—11. Также: C. R. 1886, p. 309.

[2] M. L. Cayeux. C. R. 1895, p. 1068. Также: Contribution à l'étude micrographique des terrains sédimentaires. Lille. 1897.—A. Lacroix (Minéralogie de la France, 1897, p. 113) повидимому присоединяется къ мнѣнію M. L. Cayeux.—Э. Огъ, которому, конечно, были извѣстны изслѣдованія Cayeux, полагаетъ, что полевые шпаты могутъ образоваться въ глинистыхъ известнякахъ при высокихъ температурѣ и давленіи (Э. Огъ. Геологія. 1915; русскій переводъ, стр. 312). Я. В. Самойловъ, описавъ альбитъ съ Успенскаго рудника на Уралѣ, уклончиво касается вопроса о нахожденіи полевыхъ шпатовъ въ осадочныхъ породахъ внѣ вліянія эруптивныхъ породъ Bull. des Natur. de Moscou 1899 г. № 1, стр. 151.

[3] П. Земятченскій. О кристаллахъ ортоклаза и микроклина въ буромъ желѣзнякѣ и гидрогётитѣ изъ окрестностей г. Липецка. Тр. СПБ. Общ. Естествоисп. Т. XXXIV, в. 1-й. Также: Zeitschr. f. Kryst. 1904. 39 Bd. 4 Ht. S. 379.

jean[1]. M. F. Grandjean изслѣдовалъ 60 различныхъ известняковъ юрской, мѣловой и третичной системы. Изъ нихъ въ пяти констатировалъ присутствіе полевого шпата, именно ортоклаза, микроклина и анортоклаза, въ качествѣ новообразованій. M. F. Grandjean отмѣчаетъ своеобразныя особенности внутренняго строенія кристалловъ полевого шпата, не встрѣчающіяся въ полевыхъ шпатахъ изверженныхъ породъ.

Очень интересны находки кристалловъ полевого шпата (ортоклазъ, микроклинъ и альбитъ), сдѣланныя А. Е. Ферсманомъ и П. А. Борисовымъ[2] въ доломитизированныхъ кристаллическихъ известнякахъ. Однако находки эти относятся къ области значительно метаморфизованной. Вслѣдствіе этого сами авторы находокъ не высказываютъ опредѣленнаго взгляда на ихъ происхожденіе. Одно только, какъ мнѣ кажется, несомнѣнно, что въ послѣднемъ случаѣ полевые шпаты образовались въ условіяхъ, нѣсколько отличныхъ отъ образованія ихъ въ известнякахъ, описанныхъ выше.

M. Kišpatić[3] изслѣдовалъ пески и «terra rossa» съ острова Sansego (Сусакъ) близъ Люссина и нашелъ въ нихъ цѣлый рядъ минераловъ, между которыми полевой шпатъ встрѣченъ всюду. Пески эти и «terra rossa», по мнѣнію автора, въ противоположность мнѣнію Salmojraghi[4], произошли вслѣдствіе выщелачиванія мѣстныхъ известняковъ, какъ это наблюдалъ Fr. Tućan[5] на известнякахъ въ карстовой области Кроаціи.

C. Reidemeister[6], описывая соленосныя глины и доломиты, приходитъ къ заключенію, что вѣроятно въ глинахъ присутствуютъ полевые шпаты и что послѣдніе образовались здѣсь воднымъ путемъ.

R. Görgey[7] называетъ мнѣніе C. Reidemeister'а о возможности происхожденія полевыхъ шпатовъ воднымъ путемъ при обыкновенныхъ

---

[1] M. F. Grandjean. Le feldspath néogène des terrains sédimentaires non metamorphiques. Bull. de la Soc. franç. de Minéral. T. XXXII; p. 103. 1909.

[2] А. Е. Ферсманъ. Флогопитъ и альбитъ изъ ледник. валуновъ Московской губ. ИАН. 1910, 733.

П. А. Борисовъ. Кристаллы полев. шпата и слюды въ долом. изъ окрест. Повѣнца. Тр. СПБ. Общ. Естеств. XL. 1909; стр. 24.

[3] M. Kišpatić. Der Sand von der Insel Sansego (Susak) bei Lussin und dessen Herkunft. Verh. d. k. k. geol. Reichanst. 1910 291 — 305.

[4] Salmojraghi. Sull' origine Padana della Sabbia di Sansego nel Quarnero. R. Ist. Lombardo d. Sci. e lett. Milano. 11. 1907. Цитаты взяты изъ реферата въ N. I. f. Miner., 1913; I Bd., 3 Hf. p. 410.

[5] Fr. Tućan. Die Kalksteine und Dolomite des kroatischen Karstgebietes. Ann. geol. d. l. peninsule balcanique. Belgrad.

[6] C. Reidemeister. Ueber Salztone und Plattendolomite etc. Kali 1912, pag. 226 — 295.

[7] R. Görgey. Zur Kenntnis der Kalisalzlager von Wittelsheim im Ober-Elsass. Tscherm. Min. Mitteil. 1912; XXXI. Bd. IV, 339.

температурныхъ условіяхъ смѣлымъ и ни чѣмъ необоснованнымъ предположеніемъ, и прибавляетъ, что «вообще при чрезвычайной важности этого вопроса требуется особенная осторожность».

Такимъ образомъ изъ имѣющихся данныхъ вытекаетъ, что нѣтъ единства въ признаніи возможности образованія полевыхъ шпатовъ воднымъ путемъ при самыхъ обычныхъ условіяхъ температуры и давленія. Кромѣ того существующія указанія, исключая работу Grandjean'a, имѣютъ случайный характеръ. Изъ этихъ работъ совершенно не видно, насколько распространенъ процессъ фельдшпатизаціи, если онъ существуетъ, въ какой мѣрѣ выраженъ количественно, и насколько разнообразны полевые шпаты, образующіяся при указанныхъ условіяхъ.

Хотя изъ изслѣдованій Grandjean'a и можно вывести заключеніе о малой распространенности случаевъ новообразованія полевыхъ шпатовъ въ известнякахъ, такъ какъ изъ 60 изслѣдованныхъ имъ образцовъ, только въ пяти найденъ былъ полевой шпатъ. Однако, какъ видно будетъ ниже, такое заключеніе было бы совершенно неправильно. Напротивъ процессъ фельдшпатизаціи оказывается весьма распространенъ и нерѣдко выраженъ въ количественномъ отношеніи весьма значительно.

Кромѣ того выясняется связь фельдшпатизаціи между прочимъ съ возрастомъ породы. Въ самыхъ молодыхъ известнякахъ (третичныхъ) фельдшпатизація или совсѣмъ не видна или выражена чрезвычайно слабо и сомнительна.

Мною были изслѣдованы известняки изъ разныхъ мѣстностей Россіи, принадлежащіе силурійской, девонской, каменноугольной, пермско-каменноугольной, мѣловой и третичной системамъ. Для изслѣдованія бралось значительное количество породы (обыкновенно 100 — 200 гр.); навѣска обработывалась слабой HCl при комнатной температурѣ до прекращенія выдѣленія углекислаго газа. Нерастворившійся остатокъ декантировался чрезъ сутки. Затѣмъ приливалось значительное количество воды и послѣдовательно производились сливанія чрезъ опредѣленные промежутки времени: 1—2 мин., 10 мин. и 24 часа. Промытыя фракціи собирались и взвѣшивались. Каждая фракція подвергалась микроскопическому изслѣдованію, а нѣкоторыя кромѣ того были подвергнуты также химическому анализу.

I. *Силурійскій известнякъ съ р. Поповки изъ окрестностей г. Павловска* (Петроградской губ.).

Для изслѣдованія взятъ красноватый зернистый известнякъ, образующій прослойки въ нижнихъ частяхъ разрѣзовъ, наблюдаемыхъ по рѣкѣ Поповкѣ у села Пязелева. Известнякъ мѣстами плотный, мѣстами (во внѣш-

нихъ частяхъ прослоекъ) довольно пористый, зернистый; состоитъ изъ кристалликовъ (мелкихъ ромбоэдровъ) и кристаллическихъ зеренъ *анкерита* буровато-краснаго цвѣта. Въ мелкихъ пустотахъ породы видны одиночные довольно крупные кристаллы *кальцита* призматической формы. Въ зернистой массѣ мѣстами имѣются пятна зеленоватаго цвѣта землистаго строенія. Мѣстами замѣтны слѣды окаменѣлостей. Порода содержитъ значительное количество магнезіи, что указываетъ на доломитовый ея характеръ.

При отмучиваніи очень быстро осѣдаетъ небольшое количество (всего 0,13%) тяжелыхъ и болѣе крупныхъ частицъ. Подъ микроскопомъ видно, что главную массу составляютъ зеленыя зерна *главконита*. Къ нимъ примѣшиваются сростки мелкихъ кристалликовъ *пирита*, а можетъ быть и *марказита* и, наконецъ, безцвѣтныя зерна и осколки, среди которыхъ изрѣдка встрѣчаются правильно образованные кристаллики *полевого шпата*. Всѣ они имѣли ромбоидальныя очертанія, проявляли слабую интерференціонную окраску (сѣрый цвѣтъ 1-го порядка), иногда едва замѣтную. Двойниковыхъ образованій встрѣчено не было.

Вторая фракція отмученныхъ частицъ, осѣвшая въ теченіе 4—5 минутъ, составляла 1% отъ взятаго количества известняка. Она имѣла слабый розоватый оттѣнокъ. Подъ микроскопомъ частицы оказались состоящими главнымъ образомъ изъ осколковъ безцвѣтныхъ минераловъ. Къ нимъ примѣшивались обрывки и пластинки *главконита*. Размѣры варьируютъ въ небольшихъ предѣлахъ: 0,011—0,035 мм. Встрѣченъ одинъ кристалликъ *турмалина*. Количество правильно образованныхъ кристалликовъ полевого шпата, по многочисленнымъ подсчетамъ зеренъ, достигаетъ въ среднемъ до 14%.

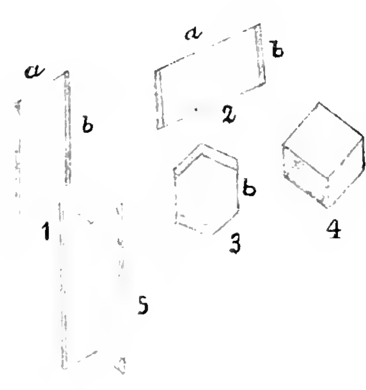


Рис. I.

Обликъ кристалликовъ разнообразенъ (фиг. I). Господствуютъ ромбоидальныя очертанія (1, 2, 4); рѣже встрѣчаются гексагональнаго вида (3). Въ этой фракціи встрѣтились нѣсколько карлсбадскихъ двойничковъ (5).

Нѣсколько кристалликовъ, наиболѣе хорошо образованныхъ, были обслѣдованы болѣе подробно. Одинъ изъ нихъ имѣлъ ромбоидальныя очертанія (фиг. I; 1). По двумъ сторонамъ ромбоида были замѣтны грани, наклоненныя косо къ столику микроскопа. Острый уголъ между сторонами ромбоидальной пластинки 63°,42. Уголъ затемнѣнія со стороною $a = 12^0$. Это

направленіе является осью максимальной эластичности. Всѣ эти обстоятельства позволяютъ признать здѣсь *натровый ортоклазъ*. Направленіе *a* отвѣчаетъ {001}, а направленіе *b* принадлежитъ гранямъ {110}. Другой кристаллъ также ромбоидальнаго очертанія (фиг. I; 2), вытянутый по другому ребру, именно ребру *a*, далъ затемнѣніе 4°30′; его надо отнести къ *ортоклазу*. Къ нему же относятся многіе кристаллики гексагональныхъ очертаній (фиг. I; 3). Они даютъ прямое затемнѣніе по направленію *a* и являются кристаллами, развитыми по {001}; направленіе *a* отвѣчаетъ гранямъ {010}. Кромѣ того видны грани {110}.

Тутъ же встрѣчаются гексагональныя пластинки съ ясно выраженнымъ двойниковымъ сложеніемъ и микроклиновой рѣшеткой. Онѣ принадлежатъ микроклину. Кромѣ того встрѣчаются кристаллики ромбоэдрическаго вида (фиг. I; 4). Они почти не дѣйствуютъ на поляризованный свѣтъ. Поэтому, относя ихъ тоже къ полевому шпату, мы должны разсматривать ихъ за форму съ развитыми гранями {110}, при отсутствіи {010}.

Остальная часть нерастворимаго въ HCl остатка раздѣлена на двѣ порціи: 1) осѣвшая въ теченіе сутокъ и 2) оставшаяся по истеченіи указаннаго времени во взвѣшенномъ состояніи. Часть, осѣвшая въ теченіе сутокъ, имѣла видъ тонкаго порошка слабой фіолетовой окраски и составляла 7,7% взятаго известняка. Подъ микроскопомъ порошокъ представлялъ безцвѣтныя остроугольныя зерна *кварца* и, можетъ быть, полевого шпата, среди которыхъ въ большомъ количествѣ видны правильно образованные кристаллики полевого шпата обычной для известняковъ формы, главнымъ образомъ ромбоидальныхъ очертаній, рѣже въ видѣ ромбовъ. Очень рѣдко встрѣчались кристаллики въ видѣ шестиугольныхъ пластинокъ. Такимъ образомъ и въ этой фракціи кристаллы имѣютъ тотъ же обликъ, что и въ предшествовавшей. Размѣры частицъ 0,01 — 0,02; рѣдко до 0,03 м. Въ поляризованномъ свѣтѣ вслѣдствіе малой толщины и слабаго двойного лучепреломленія кажутся изотропными или обнаруживаютъ сѣрый цвѣтъ перваго порядка. При малыхъ размѣрахъ было безполезно производить какія либо оптическія изслѣдованія.

II. *Силурійскій известнякъ близъ станціи Званка на р. Волховѣ.* Известнякъ сѣраго цвѣта, плотный, сильно перекристаллизованный; съ окаменѣлостями. По трещинамъ видны кристаллики *кальцита* и лучистыя выдѣленія *малахита*.

При обработкѣ слабой HCl осталось 16,26% нерастворимаго остатка. Изъ нихъ 1,63% болѣе крупныхъ (0,070 мм. — 0,105 мм.) частицъ, осѣдавшихъ въ теченіе 1 мин., и 1,56% — осѣдавшихъ въ теченіе 10 мин.

Остальные 13,02% принадлежали частицамъ, осѣдавшимъ въ теченіе сутокъ. Частицъ, неосѣдавшихъ въ теченіе сутокъ, не было. Вся масса быстро свертывалась и осѣдала на дно стакана.

Въ части, осѣвшей въ теченіе 1 минуты, въ подавляющемъ количествѣ были безцвѣтныя и прозрачныя зерна, неимѣвшія правильныхъ геометрическихъ очертаній и принадлежавшія *кварцу*. Среди нихъ въ меньшемъ количествѣ (около 6%) кристаллики *полевого шпата* такого же обычнаго вида, какъ и въ другихъ известнякахъ, только грани ихъ друзовидны. Внутри содержатъ небольшое количество включеній, которыя иногда скопляются въ центрѣ кристалла въ видѣ пятнышка. Изрѣдка на кристаллахъ, расположенныхъ на {001} и имѣющихъ гексагональныя очертанія, намѣчается очень тонкая микроклиновая структура. Встрѣтились одна — двѣ призмочки *турмалина*.

Въ части, осѣвшей въ теченіе 10 мин., содержались зерна главнымъ образомъ 0,035 — 0,070 мм. діаметровъ. Кристалликовъ полевого шпата было также немного, и они имѣли тотъ же характеръ, что и въ предшествующихъ фракціяхъ.

Въ части, осѣвшей по истеченіи сутокъ и составлявшей 13% взятаго известняка, среди различимыхъ подъ микроскопомъ частицъ встрѣчаются и кристаллики полевого шпата; количество ихъ было также незначительно, какъ и во фракціяхъ болѣе крупныхъ.

III. *Силурійскій известнякъ («плита») изъ окрестностей Петрограда.*

Сѣраго цвѣта съ зеленоватыми и фіолетовыми пятнами; плотный, отчасти перекристаллизованный. Содержитъ порядочное количество углекислой магнезіи. Нерастворимый въ HCl остатокъ при отмучиваніи далъ 1,9% крупныхъ частицъ (0,7 — 3,0 мм.), которыя принадлежали главнымъ образомъ зернамъ, палочкамъ, рогулькамъ темнозеленаго *главконита;* въ меньшемъ количествѣ находятся окатанныя зерна безцвѣтнаго и мутнаго кварца. Кристалловъ полевого шпата не встрѣчено. Другая часть нерастворимаго остатка, осѣдавшая въ теченіе 1 мин., составляла 1,82% и также состояла на половину изъ зеренъ и пластинчатыхъ скопленій главконита, безцвѣтныхъ остроугольныхъ зеренъ *кварца* и кристалликовъ *полевого шпата*. Размѣры зеренъ главконита 0,035 — 0,6 мм., а полевого шпата — 0,035 — 0,105 мм. Относительный подсчетъ зеренъ далъ для кристалловъ полевого шпата около 8 — 9% всего осадка.

Кристаллы полевого шпата имѣли обычный видъ описанныхъ выше, — ромбоидальныхъ пластинокъ, ромбоэдровъ, гексагональныхъ пластинокъ или коротко столбчатый съ ребристыми и ступенчатыми гранями. Одинъ — два случая нахожденія плохо развитыхъ карлсбадскихъ двойниковъ.

Часть, осѣвшая въ теченіе 10 мин., въ количествѣ около 1%, состояла по преимуществу изъ безцвѣтныхъ зеренъ и пластинокъ *слюды* и *хлорита;* къ нимъ примѣшивались зерна и пластинки главконитовыхъ скопленій. Размѣры безцвѣтныхъ зеренъ 0,035 — 0,070 мм. Пластинки слюды и хлорита, а также зерна главконита достигали иногда до 0,1 мм.

Среди безцвѣтныхъ зеренъ весьма обычны кристаллики полевого шпата такого же характера, какъ и въ другихъ известнякахъ. Карлсбадскихъ двойниковъ не обнаружено. Кристаллы включеній не содержатъ. Количество кристалликовъ полевого шпата доходило до 25%.

IV. *Девонскій известнякъ изъ окрестностей г. Пскова; берега р. Великой.* Для изслѣдованія былъ взятъ значительно перекристаллизованный красновато-бурый известнякъ съ красными пятнами, довольно пористый и содержащій небольшія пустоты, въ которыхъ видны кристаллики *кальцита.* Этотъ известнякъ образуетъ небольшую прослойку среди сѣроватаго известняка въ обрывѣ берега р. Великой около Іоанновскаго монастыря.

Нерастворимаго въ HCl остатка получилось 5,2%. Въ той фракціи, которая осаждается на дно стакана сейчасъ же послѣ взмучиванія, подъ микроскопомъ видны окатанныя зерна *кварца* и множество кристалликовъ *полевого шпата* такого же габитуса, какъ и въ другихъ известнякахъ. Размѣры частицъ 0,07—0,175 мм. Ограненіе крупныхъ кристалликовъ менѣе совершенно, нежели болѣе мелкихъ; крупные кристаллы мутны и даже совершенно непрозрачны; ребра и грани ихъ неровны и шероховаты.

При отмучиваніи получилось частицъ:

a)	Осаждающихся	при	стояніи	1	мин.	0,62%
b)	»	»	»	2	»	0,44%
c)	»	»	»	4	»	0,20%
d)	»	»	»	10	»	0,03%
e)	»	»	»	24	часовъ	1,65%

Въ первой фракціи, состоящей изъ частицъ, осѣвшихъ въ теченіе одной минуты и имѣвшихъ размѣры 0,07 — 0,20 мм., находились главнымъ образомъ окатанныя зерна кварца; къ нимъ примѣшивались кристаллы полевого шпата, то прозрачные, то мутноватые.

Кристаллы большею частью обнаруживаютъ тонкое двойниковое сложеніе; мѣстами — наклонность къ образованію микроклиновой рѣшетки (на плоскости {001}). Иногда двойниковые кристаллы состоятъ всего изъ 2—3 недѣлимыхъ.

Эта фракція была раздѣлена жидкостью Тулэ. Послѣдняя прежде всего доводилась до удѣльнаго вѣса горнаго хрусталя (чуть-чуть выше). Чрезъ сутки осѣло всего десятокъ - полтора зеренъ, среди которыхъ видѣлись окатанныя призмы и обломки плеохроичнаго *турмалина* (зелено-бурый и розовый), неправильныя зерна кварца, два - три кристаллика полевого шпата ромбоэдрическаго очертанія, или толстопризматической формы. Полевой шпатъ повидимому увлеченъ сростками кубиковъ *сѣрнаго колчедана*, превратившагося въ *бурый желѣзнякъ*.

Затѣмъ удѣльный вѣсъ жидкости Тулэ былъ немного пониженъ, до удѣльнаго вѣса горнаго хрусталя. Черезъ сутки удалось отдѣлить гораздо больше зеренъ, удѣльный вѣсъ которыхъ былъ весьма близокъ къ горному хрусталю, а также и равенъ ему. Эта фракція составляла 9,9% всего, осѣвшаго въ теченіе 1 мин.

Большая часть зеренъ безцвѣтна; встрѣчено одно окатанное зерно сильно плеохроичнаго (бурозеленый) минерала. Безцвѣтныя зерна имѣли неправильныя очертанія безъ замѣтной окатанности; онѣ несомнѣнно принадлежали кварцу. Встрѣчено нѣсколько зеренъ съ правильнымъ очертаніемъ, обычнымъ для *полевого шпата:* въ видѣ ромбоидальныхъ и гексагональныхъ таблицъ (наполнены включеніями). На одной изъ послѣднихъ опредѣленъ уголъ затемнѣнія съ одной изъ сторонъ, отвѣчающихъ ребру $\{001\}:\{010\}$. Онъ былъ равенъ 18°. Микроклиновой структуры не замѣтно.

Фракція, осѣвшая въ теченіе 2 минутъ, была также раздѣлена при помощи тяжелыхъ жидкостей. Съ этою цѣлью жидкость Тулэ была доведена до удѣльнаго вѣса кварца. Индикаторомъ служилъ осколочекъ горнаго хрусталя. Въ этомъ случаѣ осѣло весьма мало частичекъ, среди которыхъ можно было видѣть подъ микроскопомъ безцвѣтныя пластинки слюды, неправильныя зерна кварца, конкреціи гидратовъ окиси желѣза, и только въ небольшомъ количествѣ правильно образованные кристаллики полевого шпата, какъ ромбоидальныхъ, такъ и гексагональныхъ очертаній. Дѣйствіе на поляризованный свѣтъ у нихъ весьма слабое. Двойниковаго сложенія не замѣтно. Хотя эти кристаллы и осѣли вмѣстѣ съ кварцемъ, однако они все-таки принадлежатъ *ортоклазу*, а не какимъ-либо инымъ полевымъ шпатамъ въ виду ихъ общаго сходства съ другими фракціями, принадлежность которыхъ къ каліевому полевому шпату не вызываетъ сомнѣній.

Послѣ этого удѣльный вѣсъ жидкости былъ доведенъ до удѣльнаго вѣса адуляра. Чрезъ сутки осѣло значительное количество частицъ. Онѣ въ подавляющемъ числѣ относились къ зернамъ кварца. Однако среди нихъ часто видны правильно образованные кристаллики полевого шпата. Кри-

сталлы достигали 0,01—0,17 мм. Впрочемъ ребра не отличаются отчетливостью образованія, а грани большею частью друзовидны. Форма то ромбоидальная, то гексагональная (см. схемат. рис. 1). Внутри кристалловъ видны скопленія пыли и мелкихъ зернышекъ. Дѣйствіе на поляризованный свѣтъ слабое (сѣрый цвѣтъ 1-го порядка). Въ кристаллахъ гексагональнаго очертанія опредѣлено прямое погасаніе относительно одной изъ сторонъ шестиугольника, а у нѣкоторыхъ видна микроклиновая рѣшетка. Кристаллы ромбоидальныхъ очертаній въ однихъ случаяхъ даютъ погасаніе въ 5° относительно одной изъ сторонъ ромбоида, а другіе — 8—9°. Эти обстоятельства указываютъ, что предъ нами *ортоклазъ, микроклинъ и натровый ортоклазъ*. Интересны ромбоэдрическіе кристаллы (рис. 1, фиг. 4), ребра которыхъ пересѣкаются въ углахъ, близкихъ къ прямому (около 74°). Очевидно, здѣсь мы имѣемъ грань {110} ортоклаза.

Пользуясь жидкостью Тулэ удѣльнаго вѣса немного меньшаго, чѣмъ удѣльный вѣсъ адуляра, удалось получить фракцію кристалловъ, состоящую почти исключительно изъ полевого шпата. Количество чистой фракціи составляло 8% всего, осѣвшаго въ теченіе двухъ минутъ.

Какъ видно на прилагаемой фотографіи (табл. I, 1)[1] мы здѣсь встрѣчаемъ тѣ же формы, какъ и въ другихъ известнякахъ. Кромѣ того среди болѣе мелкихъ кристалликовъ нерѣдко и карлсбадскіе двойники. Кристаллы, особенно крупные, содержатъ мелкія включенія то разбросанныя по всему кристаллу, то скучивающіяся въ пятна и полосы.

Оптическія свойства указываютъ на принадлежность кристалловъ къ каліевому ортоклазу, анортоклазу и микроклину. Въ тѣхъ случаяхъ, когда имѣются толстыя таблицы гексагональнаго очертанія, часто наблюдается прямое угасаніе, или хорошо выраженная микроклиновая рѣшетка. Встрѣчались кристаллы, у которыхъ центральная часть затемнялась неодновременно и безъ рѣзкихъ границъ. Всѣ кристаллы гексагональнаго очертанія проявляли болѣе высокую интерференціонную окраску (желтый и даже оранжевый цвѣтъ 1-го порядка), нежели кристаллы ромбоидальныхъ очертаній, дающихъ только сѣрый цвѣтъ 1-го порядка.

Кристаллы ромбоидальныхъ очертаній представляютъ собою кристаллы коротко-призматической или таблицеобразной формы. Одни изъ нихъ несомнѣнно сплюснуты по грани {010}; въ такомъ случаѣ даютъ затемнѣніе съ ребромъ {001} или подъ угломъ около 5° и, слѣдовательно, принадлежатъ

---

[1] Большая часть фотографій сдѣлана ассистентомъ по каѳедрѣ минералогіи С. М. Курбатовымъ, другая — ассистентомъ по геологіи В. М. Тимоѳеевымъ, за что приношу имъ искреннюю признательность.

ортоклазу, у другихъ же затемнѣніе колеблется въ значительныхъ предѣлахъ отъ 8°—11° и даже болѣе съ тѣмъ же ребромъ. Одинъ разъ наблюдалось затемнѣніе въ 23° съ одной изъ сторонъ ромбоидальнаго кристалла.

Эти обстоятельства въ связи съ прямымъ затемнѣніемъ на граняхъ {001} говорятъ въ пользу принадлежности этихъ кристалловъ къ *натровому ортоклазу*, а нѣкоторыхъ, можетъ быть, и къ *анортоклазу*. Для провѣрки этого предположенія я просилъ г. Апосова, занимавшагося изученіемъ пріемовъ изслѣдованія полевыхъ шпатовъ по методу проф. Е. С. Федорова, поискать, не найдется ли подходящаго кристаллика для опредѣленія угла оптическихъ осей. Такой кристаллъ былъ найденъ. Въ немъ опредѣленъ 2V—54°. Этимъ подтверждается принадлежность его именно къ анортоклазу.

Нѣкоторые изъ ромбоидальныхъ кристалловъ въ поляризованномъ свѣтѣ даютъ тонкую двойниковую полосчатость, и такимъ образомъ относятся къ *микроклину* (очевидно лежатъ на грани {110}). Въ обыкновенномъ свѣтѣ такіе кристаллы представляются тонко исчерченными параллельно ребрамъ призмы. Вообще двойниковое сложеніе призматическихъ кристалловъ выступаетъ весьма отчетливо. Присутствіе известково-натровыхъ плагіоклазовъ представляется весьма сомнительнымъ. Присутствіе въ небольшомъ количествѣ альбита вѣроятно, такъ какъ у трехъ кристалликовъ получено было затемнѣніе на грани {010} 18—19° съ ребромъ P.

Фракція, полученная отстаиваніемъ въ теченіе 10 мин., составляла 0,031% взятаго известняка и имѣла видъ пепельно-сѣраго порошка. Размѣры частицъ колебались въ значительныхъ предѣлахъ 0,008—0,035 мм. Большую часть составляли кристаллики полевого шпата (см. табл. I, 2) совершенно такого же характера, какъ и въ вышеописанной фракціи. Присутствуютъ двойники по карлсбадскому закону, весьма отчетливо образованные. Они чаще обнаруживаются, если порошокъ подвергнуть обогащенію посредствомъ жидкости Тулэ.

При отстаиваніи въ теченіе сутокъ получился осадокъ, составлявшій 1,84% взятаго известняка. Осадокъ имѣлъ видъ пепельно-сѣраго порошка и состоялъ изъ частицъ 0,003—0,01 мм. діаметромъ. Главную его массу составляли кристаллы полевого шпата, среди которыхъ встрѣчаются карлсбадскіе двойники (табл. I, 3). Въ поляризованномъ свѣтѣ кристаллы кажутся почти оптически изотропными. Двойное лучепреломленіе обнаруживается только при помощи гипсовой пластинки.

Такъ какъ осадка получилось болѣе четырехъ граммовъ, то предста-

вилась возможность произвести полный химическій анализъ, подтвердившій то, что наблюдалось и подъ микроскопомъ[1].

Потери при прокал. . . .	1,86
SiO_2	70,82
TiO_2	слѣды
Al_2O_3	15.39
Fe_2O_3	2,48
CaO	0,10
MgO	0,23
K_2O	8,80
Na_2O	0,96
Сумма	100,64

Изъ полученныхъ цифръ видно, что главную часть порошка составляетъ каліевый полевой шпатъ, къ которому въ небольшомъ количествѣ присоединяется натровый полевой шпатъ, очевидно, въ видѣ натроваго ортоклаза и анортоклаза. Главною же примѣсью является кварцъ; въ меньшемъ количествѣ гидратъ окиси желѣза и вѣроятно каолинитъ.

V. *Съ береговъ той же р. Великой въ окрестностяхъ г. Пскова изслѣдованъ былъ глинистый известнякъ, образующій прослойки въ общей толщѣ известняковъ.* При обработкѣ слабой HCl осталось 4,77% нерастворимаго остатка. Главную массу послѣдняго (2,44%) составляли весьма тонкія частицы, неосѣдавшія въ теченіе сутокъ. Меньшую, но все же значительную (1,51%) образовали частицы, осѣвшія въ теченіе сутокъ. Въ теченіе 10 мин. осѣло всего 0,35%, а въ теченіе 2 мин. всего 0,097%.

Фракція, осѣвшая въ теченіе двухъ минутъ, состояла изъ зеренъ 0,017—0,10 мм. діаметромъ. Подъ микроскопомъ видна значительная неоднородность; среди зеренъ кварца и кристалликовъ полевого шпата видно было немало бурокрасныхъ скопленій гидратовъ окиси желѣза. Для удаленія послѣдней порошокъ былъ обработанъ HCl при нагрѣваніи и снова подвергнутъ отмучиванію. Послѣ этого порошокъ принялъ сѣроватую окраску. Подъ микроскопомъ онъ обнаружилъ значительное преобладаніе (свыше 70%) кристалликовъ *полевого шпата*, между которыми болѣе мелкіе отличаются особенною рѣзкостью очертаній. Они имѣютъ совершенно тотъ же обликъ,

[1] Анализъ сдѣланъ ассистентомъ по каѳедрѣ Минералогіи Петроградскаго Университета В. А. Зильберминцомъ, за что я искренно и благодарю его.

какъ и у описанныхъ выше; очень часты карлсбадскіе двойники. Кристаллы отличаются полною прозрачностью. Въ поляризованномъ свѣтѣ представляютъ совершенно ту же картину, какъ и описанные выше. Нѣсколько рѣже наблюдается микроклиновая структура. Встрѣчаются кристаллы съ волнистымъ неправильнымъ угасаніемъ. Иногда въ кристаллѣ выдѣляется центральное неправильное поле, затемняющееся неодновременно съ периферическою частью.

Частицы, осѣвшія въ теченіе 10 мин., имѣли 0,008—0,035 мм. въ діаметрѣ и состояли почти исключительно изъ кристалликовъ *полевого шпата*. Примѣсью являются зерна и осколки *кварца*. Въ кристаллахъ съ гексагональными очертаніями иногда видна микроклиновая рѣшетка.

Гораздо болѣе частицъ осѣло по истеченіи сутокъ, именно 1,51%. Порошокъ имѣлъ пепельно-сѣрый цвѣтъ съ чуть замѣтнымъ розоватымъ оттѣнкомъ. Размѣры частицъ 0,003—0,006 мм.; изрѣдка,—крупные. Среди безцвѣтныхъ осколочковъ кварца и безцвѣтныхъ листочковъ вѣроятно слюды въ большомъ количествѣ (до 30—35%) разсѣяны кристаллики полевого шпата такого же характера, что и въ предшествовавшей фракціи. Часты карлсбадскіе двойники. Кромѣ того встрѣчаются палочкообразные кристаллики съ расщепленіемъ на концѣ, совершенно подобные тѣмъ, которые въ изобиліи находятся въ известнякѣ с. Кнубри и которые будутъ описаны ниже. Они несомнѣнно представляютъ собою своеобразные карлсбадскіе двойники.

VI. *Девонскій известнякъ окрестностей Изборска* (Псковской губерніи). Для изслѣдованія былъ взятъ известнякъ, залегающій въ видѣ пласта (въ 1 саж.) среди глинистой гипсоносной толщи. Послѣ обработки слабой HCl осталось 5,75% нерастворимаго остатка.

При разсматриваніи желтоватаго осадка, получаемаго въ теченіе четырехъ минутъ, можно видѣть множество окатанныхъ зеренъ *кварца*, среди которыхъ тамъ и здѣсь разбросаны кристаллики *полевого шпата*. Обыкновенно они имѣютъ видъ ромбоэдровъ, рѣже гексагональныхъ табличекъ, или наконецъ вытянутыхъ косоугольныхъ пластинокъ. Двойное лучепреломленіе ихъ весьма слабое; совершенно прозрачны; иногда мутноваты. Количество кристалликовъ достигало 50% всего остатка. Послѣдній составлялъ 0,089% взятаго известняка. Кромѣ кварца и полевого шпата видны охряныя хлопья, легко растворяющіеся въ горячей HCl. Размѣры зеренъ кварца 0,175—0,350 мм. Кристаллы же полевого шпата имѣли 0,035—0,070 мм. въ поперечникѣ.

Часть, осѣвшая по истеченіи 10 мин., составляла 0,03% взятаго

известняка. Подъ микроскопомъ (табл. I, фиг. 4) видны въ небольшомъ количествѣ зерна кварца и хлопья лимонита. Большую же часть составляли кристаллики полевого шпата. Размѣры 0,008—0,032 мм. Кристаллики обычныхъ очертаній. Встрѣчаются кристаллы съ микроклиновой рѣшеткой и карлсбадскіе двойники.

Черезъ сутки осѣло 1,54% взятаго известняка. Осадокъ состоялъ почти исключительно изъ кристалликовъ полевого шпата, діаметръ которыхъ 0,003—0,01 мм.

VII. *Девонскій известнякъ окрестностей г. Липецка;* лежачій бокъ бураго желѣзняка рудника с. Сырскаго. Цвѣтъ сѣроватый; строеніе плотное. При травленіи слабой соляной кислотой въ немъ рѣзко выступаютъ многочисленные животные остатки: улитки, двухстворчатыя, стебли морскихъ растеній и др. Мѣстами видны втеки болѣе рыхлой массы палеваго цвѣта, составляющей продуктъ начавшагося выщелачиванія. Мѣстами по трещинамъ виднѣются мелкіе кристаллики известковаго шпата. Послѣ обработки HCl получилось 0,675% нерастворимаго остатка.

Изъ него, при осажденіи въ теченіе 10 мин., получено 0,142% всей массы известняка, что составляетъ 21,11% всего нерастворимаго въ слабой HCl остатка.

Въ полученной фракціи, въ общемъ окрашенной въ буроватокрасный цвѣтъ, подъ микроскопомъ видны: a) неправильные комочки охряно-желтаго и красно-бураго цвѣта, очевидно, принадлежащіе *лимониту* и другому менѣе водному гидрату окиси желѣза. Они составляютъ меньшую часть осадка. Послѣ обработки крѣпкой HCl при нагрѣваніи красные и желтые комочки растворяются. Опредѣленные изъ разности они составили 3,71% всего твердаго остатка. b) Правильно и всесторонне образованные кристаллики, между которыми большую часть составляетъ несомнѣнно *ортоклазъ.* Размѣры ихъ весьма различны отъ 0,01 до 0,10. Кристаллы представляютъ обычный обликъ, какъ и въ другихъ известнякахъ; не наблюдалось только карлсбадскихъ двойниковъ.

Послѣ обработки крѣпкой HCl при нагрѣваніи и удаленіи водной и безводной (или маловодной) окиси желѣза порошокъ принимаетъ свѣтлый пепельно-сѣрый цвѣтъ. Онъ составилъ 17,40% всего твердаго остатка и состоялъ почти исключительно изъ кристалликовъ полевого шпата.

VIII. *Саткинскій заводъ. Уралъ. Доломитовый песокъ девонской системы.* Въ растворѣ отъ слабой HCl (растворъ былъ нагрѣтъ для разложенія доломита) перешло по одинаковому количеству кальція и магнія.

Въ крупной фракціи, осаждавшейся въ теченіе 2 минутъ, кромѣ бурыхъ

и охряныхъ хлопьевъ, найдены въ замѣтномъ количествѣ, вмѣстѣ съ осколками и правильно образованные кристаллики *кварца*. Они имѣютъ призматическій обликъ съ одинаково-развитыми ромбоэдрами. Въ полѣ зрѣнія всегда можно встрѣтить три-четыре подобныхъ кристаллика. Нѣкоторые изъ нихъ имѣютъ неровныя ребра. Размѣры кристалловъ 0,035 въ толщину и 0,070—0,1 мм. въ длину. По валовому подсчету зеренъ, они составляютъ 2—3%. Встрѣчаются также кристаллики *полевого шпата* въ видѣ ромбоидальныхъ, изрѣдка — гексагональныхъ табличекъ. Микроклиновой рѣшетки не наблюдалось. Количество ихъ нѣсколько больше кристалликовъ кварца (3—4%). Небольшіе листочки вывѣтрѣлаго *хлорита* также встрѣчаются. Попался одинъ осколочекъ сильно плеохроичной (голубые оттѣнки) *роговой обманки*.

Эта фракція, составлявшая 0,8% взятаго количества доломитоваго песка, была обработана HCl средней крѣпости и раздѣлена на двѣ части; въ одной, осѣвшей почти моментально и составлявшей 0,47% породы, главную массу составляли осколочки кварца и темнобурыя стяженія (неразложившіяся отъ дѣйствія HCl), и меньшую — кристаллики кварца и полевого шпата.

Та часть, которая осѣла въ теченіе 2 мин., составляла 0,08% и состояла главнымъ образомъ изъ бутоватожелтыхъ пластинокъ хлоритообразнаго минерала; въ гораздо меньшемъ количествѣ — осколки кварца. Изрѣдка видны призматическіе кристаллики послѣдняго и обычнаго типа кристаллики полевого шпата. Размѣры частицъ 0,035—0,070 мм.

Часть, осѣвшая въ теченіе 10 мин., достигала до 0,7%. Подъ микроскопомъ видно, что среди буроватыхъ хлопьевъ болѣе крупныхъ размѣровъ находится множество частицъ безцвѣтныхъ большею частью съ неправильными очертаніями, но въ большемъ количествѣ, чѣмъ въ предшествовавшемъ случаѣ, видны кристаллики полевого шпата чаще ромбоидальныхъ очертаній (замѣченъ одинъ двойникъ по карлсбадскому закону); встрѣтились также и гексагональныя очертанія. По подсчету число кристалликовъ составляетъ 12% всей массы. Размѣры частичекъ большею частью 0,008—0,035.

Среди частицъ, осѣвшихъ въ теченіе сутокъ, кристаллики полевого шпата встрѣчались въ меньшемъ количествѣ, нежели въ болѣе крупныхъ фракціяхъ.

IX. *Кнубрь. Орловской губ.* Желтоватый довольно рыхлый *доломитъ* каменноугольной системы, содержащій значительное количество закиси и окиси желѣза. Послѣ обработки соляной кислотой оставляетъ тонко-мучнистую массу пепельно-сѣраго цвѣта въ количествѣ 6,0% взятаго доломита.

При фракціонномъ раздѣленіи нерастворившагося въ HCl остатка по-

лучилось 1,24% отъ взятаго доломита частицъ, осѣдавшихъ въ теченіе 1—2 минутъ. Размѣры частицъ 0,07—0,35 мм. Частицы состояли почти исключительно изъ превосходно образованныхъ кристалликовъ *полевого шпата*. Послѣдніе имѣли то ромбоидальный, то гексагональный, то наконецъ призматическій габитусъ. У нѣкоторыхъ на призматическихъ граняхъ видна тонкая полисинтетическая штриховка (рис. 2, *e*). Иногда виднѣются параллельные сростки хорошо развитыхъ кристалликовъ, соприкасающихся другъ съ другомъ по грани {010} (рис. 2, *g*). Изрѣдка попадаются неправильныя зерна съ намеками мѣстнаго друзовиднаго ограненія. Замѣчено нѣсколько двойниковъ по карлсбадскому закону (рис. 2, *h*, *k*). Болѣе мелкіе кристаллики большею частью совершенно прозрачны; крупные же содержатъ мутныя включенія, то равномѣрно распредѣленныя, то скопляющіяся въ видѣ пятенъ или изогнутыхъ полосъ (рис. 2, *f*). Среди болѣе мелкихъ кристалликовъ часто встрѣчаются тонкіе призматическіе, представляющіе большею частью двойники по карлсбадскому закону (рис. 2, *l*). Въ поляризованномъ свѣтѣ даютъ сѣрую окраску, рѣдко доходящую до желтоватой. Кристаллики, лежащіе на грани {001} иногда являются совершенно однородными и даютъ прямое затемнѣніе къ ребрамъ {001} и {010}. Встрѣчаются кристаллики, у которыхъ видна микроклиновая рѣшетка (рис. 2, *g*). Но гораздо чаще кристаллы являются оптически неоднородными. Центральная часть обыкновенно въ видѣ округлой или неправильной формы пятна, затемняющагося неодновременно съ остальною частью кристалла, при чемъ переходъ отъ пятна къ периферіи постепененъ. Нерѣдко затемнѣніе волнистое. Пятно занимаетъ или только незначительную, или даже большую часть кристалла (рис. 2, *a*, *b*, *c*, *d*, *e*). Въ подобныхъ кристаллахъ иногда наблюдаются признаки микроклиноваго строенія (*a*, *c*).

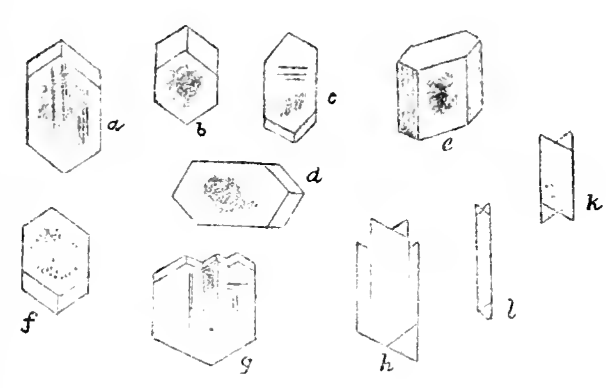


Рис. 2.

Измѣреніе угла затемнѣнія показало, что наружныя части кристалловъ даютъ затемнѣніе прямое съ ребромъ {001} и {010}; внутреннія же пятна образуютъ съ тѣмъ же ребромъ различные углы погасанія. Чаще другихъ наблюдались 7—8°30′ и 13—16°.

У кристалловъ, лежавшихъ на грани {010}, углы затемнѣнія съ тѣмъ же ребромъ {001} и {010} также были различны. Рѣже другихъ получались углы 5—6°. Большею частью углы эти составляли 7°, 8°, 9°, 10—11°. Единичные случаи дали 0°, 2° и 18°.

Какъ мы видимъ, въ оптическомъ отношеніи кристаллы полевого шпата с. Кнубри представляютъ тѣ же оригинальныя особенности, что и кристаллы, описанные M. F. Grandjean'омъ. Тѣже ненормальности въ строеніи, тѣже колебанія и даже величины угловъ затемнѣнія. Различіе заключается только въ томъ, что Grandjean не указываетъ на присутствіе карлсбадскихъ двойниковъ, тогда какъ въ известнякѣ с. Кнубри они обычны. Особенно обильны такіе вытянутые по оси *c* двойники въ болѣе мелкихъ фракціяхъ, какъ объ этомъ будетъ сказано ниже.

Сопоставляя между собою все сказанное выше, приходимъ къ заключенію, что полевой шпатъ с. Кнубри, какъ и въ другихъ известнякахъ, относится къ *каліевому ортоклазу*, *натровому ортоклазу*, *микроклину*, вѣроятно также *анортоклазу*, и, можетъ быть, въ рѣдкихъ случаяхъ — къ *альбиту*.

Значительная чистота и однородность кристалловъ небольшихъ размѣровъ сравнительно съ болѣе крупными, а также обиліе карлсбадскихъ двойниковъ въ мелкихъ кристаллахъ наводятъ на мысль, что тѣ и другіе принадлежатъ къ различнымъ генераціямъ. Чистые кристаллы, какъ болѣе мелкіе, вѣроятно, принадлежатъ болѣе поздней генераціи.

Кромѣ полевого шпата въ описанной фракціи видны кое-гдѣ зерна главконита и одна-двѣ призмочки бураго турмалина.

Частицы, осѣвшія въ теченіе 10 минутъ. Такихъ частицъ оказалось всего 0,126% взятаго доломита. Размѣры ихъ колебались отъ 0,01 мм. до 0,07 мм. Осадокъ состоялъ изъ правильно очерченныхъ кристалликовъ полевого шпата совершенно такого же характера, какъ и въ предшествовавшей фракціи. Къ нимъ примѣшивались въ равномъ количествѣ кристаллики совершенно особеннаго габитуса (табл. I, фиг. 5). Они имѣли форму палочекъ, расщепленныхъ на одномъ или на обоихъ концахъ. Ширина кристалликовъ 0,01 мм. Длина же въ 7—10 разъ больше. На поляризованный свѣтъ они почти не дѣйствуютъ, очевидно вслѣдствіе слабаго двойного лучепреломленія и малой толщины ихъ. Своеобразный видъ кристалликовъ не сразу далъ возможность отнести ихъ къ полевому шпату, и только внимательное разсмотрѣніе болѣе крупныхъ экземпляровъ и постепенныхъ переходовъ къ мелкимъ указало, что здѣсь мы имѣемъ дѣло съ карлсбадскими двойниками, очень вытянутыми по оси *c*.

Наибольшее количество частицъ получилось при отстаиваніи въ те-

ченіе *сутокъ*. Собранный осадокъ составлялъ 3,4% взятаго доломита. Тонкій осадокъ имѣлъ почти бѣлый цвѣтъ и состоялъ почти исключительно изъ кристалликовъ полевого шпата такого же габитуса, какъ предшествовавшая фракція; только призматическихъ кристалликовъ было меньше (табл. I, фиг. 6).

Эта фракція была мною анализирована. Въ ней оказалось:

SiO_2 (по остатку)	64,692
Al_2O_3	19,456
Fe_2O_3	
MgO	нѣтъ
CaO	»
K_2O	10,514
Na_2O	4,980
H_2O	0,358

Отсюда видно, что здѣсь мы имѣемъ дѣло почти съ чистымъ калинатровымъ полево-шпатовымъ веществомъ. Такимъ образомъ результаты химическаго анализа находятся въ полномъ согласіи съ наблюденіями подъ микроскопомъ[1].

Частицы, неосѣвшія въ теченіе сутокъ, представляли глинистую массу сѣраго цвѣта. Вслѣдствіе малыхъ размѣровъ въ нихъ трудно подмѣтить правильныя очертанія. Однако тамъ, гдѣ послѣднія намѣчались, можно было узнать тѣже формы, что и въ другихъ фракціяхъ. Количество глинистыхъ частицъ составляло 1,37% взятаго доломита.

X. *Оптина пустынь, Калужской губ.* Довольно рыхлый известнякъ ($MgCO_3$ весьма мало) каменноугольной системы.

Известнякъ содержитъ немного нерастворимаго остатка. Всего собрано 1,34%.

Частицъ, осѣвшихъ въ теченіе одной минуты, было 0,014%. Размѣры 0,035—0,14 мм. Главнымъ образомъ это были неправильныя зерна *кварца*. Въ меньшемъ количествѣ (по подсчету зеренъ — 19%) находились кристаллики *полевого шпата* обычнаго типа. Попадались гексагональныя пластинки съ микроклиновой рѣшеткой и 2—3 экземпляра карлсбадскихъ двойниковъ.

---

[1] Само собою разумѣется, морфологическое и химическое расчлененіе полево-шпатоваго вещества требуетъ очень детальнаго оптическаго изслѣдованія кристалловъ, что затрудняется малыми размѣрами ихъ. Кромѣ того оно не вызывалось задачами, которыя имѣетъ пока въ виду данная работа.

Частицы, неосѣдавшія въ теченіе одной минуты, очень быстро коагулировали, почти не оставляя мути. Для раздѣленія ихъ на фракціи пришлось прибавить KHO и прокипятить. Отстаиваніе въ теченіе 10 минутъ дало 0,018% осадка, состоявшаго на половину изъ кристалликовъ полевого шпата, среди которыхъ часты карлсбадскіе двойники. Кристаллики прозрачны и безцвѣтны и, какъ показали измѣренія угла затемнѣнія тѣхъ экземпляровъ, которые лежали на грани {001} или {010}, принадлежали ортоклазу нормальнаго характера. У кристалликовъ, лежавшихъ на грани {001}, затемнѣніе прямое, а у лежавшихъ на {010} — около 6° съ ребромъ {001} и {010}. Микроклиновая структура наблюдалась рѣдко.

Кромѣ кристалликовъ полевого шпата встрѣчены 2—3 призмочки *турмалина.*

Частицы, осѣвшія въ теченіе сутокъ, составляли 0,245%. Осадокъ имѣлъ охряножелтый цвѣтъ. Подъ микроскопомъ видны желтоватые хлопья и очень мелкія безцвѣтныя зерна кварца и въ нѣсколько меньшемъ количествѣ кристаллики полевого шпата обычныхъ очертаній. Размѣры частицъ 0,005—0,01 мм. Послѣ обработки горячей HCl въ растворѣ было много желѣза и алюминія, весьма мало кальція. Въ остаткѣ послѣ отмучиванія хлопьевъ кремнезема находились прозрачные кристаллики полевого шпата; между ними изрѣдка карлсбадскіе двойники. Мелкія частицы принадлежатъ почти исключительно полевому шпату. Къ полевому шпату въ меньшемъ количествѣ примѣшивались зерна кварца.

XI. *Берзовка по дорогѣ къ Аксенцамъ (Богородицкаго у., Тульской губ.).* Сѣрый каменноугольный известнякъ, содержащій довольно значительное количество $MgCO_3$ и $FeCO_3$. Богатъ остатками коралловъ и брахіоподъ.

Послѣ обработки HCl оставляетъ буровато-черную, рыхлую, медленно осѣдающую массу.

Частицъ, осѣвшихъ въ теченіе 1—2 минутъ, всего 0,10% взятаго известняка. Размѣры 0,035—0,1 мм. Зерна неправильныхъ очертаній принадлежатъ главнымъ образомъ *кварцу*, а частью — *микроклину.* Въ небольшомъ количествѣ видиѣлись кристаллики полевого шпата обычнаго вида. Встрѣчено также нѣсколько призмочекъ зеленаго *турмалина.*

Часть, осѣвшая въ теченіе сутокъ, состояла главнымъ образомъ изъ чернобурой коллоидальной органической массы и небольшого количества бѣлаго порошка. Весь осадокъ составлялъ 0,53% взятаго известняка. Бѣлый порошокъ состоялъ изъ частицъ (діаметромъ въ 0,01—0,02 мм.), среди которыхъ много кристалликовъ полевого шпата, чаще всего ромбоидальнаго очертанія; попадались и карлсбадскіе двойники.

XII. *Исть-Залипяжье* (*Ряжскаго у., Рязанской губ.*). Новый (желѣзный) рудникъ. Известнякъ каменноугольной системы (верхній ярусъ); рыхлый, желтоватаго цвѣта; содержитъ не очень много $MgCO_3$. Послѣ обработки слабой HCl остается 4,65% нерастворимаго остатка. Остатокъ состоялъ главнымъ образомъ изъ крупныхъ обломковъ стеблей криноидей, мшанокъ, иглъ морскихъ ежей, а также неправильныхъ сферолитовыхъ скопленій, дающихъ при перекрещенныхъ николяхъ искаженную фигуру двуоснаго кристалла. Между болѣе мелкими частицами видны болѣе правильно образованные сферолиты и зерна безцвѣтнаго *кварца*. Кристалловъ полевого шпата не встрѣчено. Всего крупныхъ частицъ собрано 3,8%.

При отстаиваніи въ теченіе одной минуты получено всего 0,04% осадка. Его составляли a) сферолитовыя образованія неправильной формы. Они имѣли какъ бы зернистое строеніе; размѣры ихъ 0,070—0,28 мм. въ діаметрѣ, b) безцвѣтныя зерна кварца (0,015—0,10 мм.) и въ меньшемъ количествѣ (около 10%) кристаллики *полевого шпата*. Послѣдніе обыкновенно мелки и не превышаютъ 0,04 мм. въ діаметрѣ.

При болѣе продолжительномъ отстаиваніи нерастворимый остатокъ сразу осаждается весь въ видѣ объемистыхъ рыхлыхъ хлопьевъ. Продолжительное кипяченіе отчасти устранило эту способность и позволило получить двѣ фракціи: осѣвшую чрезъ сутки въ количествѣ 0,40% и неосѣвшую — въ количествѣ 0,41%.

Въ первой фракціи подъ микроскопомъ видны безцвѣтные осколки и зерна кварца, къ которымъ въ небольшомъ количествѣ примѣшаны кристаллики полевого шпата обычнаго облика. Очень рѣдко намѣчается двойниковое образованіе по карлсбадскому закону. Размѣры частицъ 0,005—0,015 мм.

XIII. *Хольково* (*Меленковскій у., Владимірской губ.*). Пермо-карбоновый доломитовый известнякъ, желтоватаго цвѣта, довольно рыхлый. Содержитъ значительное количество Al_2O_3, растворимаго въ слабой HCl.

Нерастворимый остатокъ составляетъ 2,5% взятой породы и главнымъ образомъ состоитъ повидимому изъ гидратовъ глинозема и окиси желѣза, растворяющихся въ крѣпкой HCl при нагрѣваніи.

Остатокъ, нерастворимый въ HCl, состоялъ изъ безцвѣтныхъ зеренъ кварца и листочковъ слюды, среди которыхъ въ небольшомъ количествѣ (около 4—5%) разсѣяны кристаллики *полевого шпата*, обычнаго облика. Изрѣдка видны карлсбадскіе двойники, микроклиновая рѣшетка и простая двойниковая полосатость.

Кристаллики полевого шпата находились во всѣхъ фракціяхъ, начиная

отъ частицъ, осѣдавшихъ въ теченіе одной минуты, такъ среди мелкихъ, осѣдавшихъ въ теченіе сутокъ. Они составляли 3—4% всѣхъ зеренъ.

XIV. *Известнякъ мѣловой системы; у Херсонесскаго монастыря близъ Севастополя.* Известнякъ довольно плотный свѣтло-палеваго цвѣта, со множествомъ мелкихъ неясныхъ окаменѣлостей. При обработкѣ слабой HCl далъ 7,47% свѣтложелтаго тонкаго нерастворимаго остатка. Послѣдній состоялъ изъ безцвѣтныхъ, частью мутныхъ, слабо окатанныхъ и остроугольныхъ зеренъ *кварца.* Къ нимъ примѣшивались листочки и обрывки буровато-желтаго цвѣта, принадлежащіе вѣроятно *хлориту.* Никакихъ кристалловъ съ правильными очертаніями, несмотря на тщательные поиски, не встрѣчено.

XV. *Известнякъ мѣловой системы; около Георгіевскаго монастыря въ окрестностяхъ Севастополя.* Известнякъ свѣтлопалеваго цвѣта; богатъ хорошо сохранившимися раковинами; мѣстами — почти ракушечникъ. Углекислаго магнія весьма мало. При обработкѣ слабой HCl далъ 4,11% плохо отсортированнаго кварцеваго песку, зерна котораго, рядомъ съ мелкими, достигаютъ иногда до 0,5 см. въ діаметрѣ. Правильно образованныхъ кристалловъ не найдено. Кромѣ несчаныхъ частицъ получилось еще 0,45% тонкихъ частицъ, осаждавшихся въ теченіе сутокъ. Въ нихъ также не встрѣчено кристалловъ. Слѣдуетъ отмѣтить, что частицъ, неосаждающихся въ теченіе сутокъ, въ этомъ известнякѣ совсѣмъ не оказалось.

XVI. *Плотный известнякъ мѣловой системы; около Чуфутъ-Калэ (Крымъ).* Послѣ обработки HCl даетъ 13,3% нерастворимаго остатка, состоящаго изъ осколочковъ (діам. 0,005 — 0,03 мм.) безцвѣтныхъ минераловъ, главнымъ образомъ *кварца* и глинистыхъ хлопьевъ. Кристалликовъ не видно. Среди тысячей частицъ только одинъ разъ замѣченъ былъ правильно образованный кристалликъ ромбоидальнаго очертанія.

XVII. *Плотный мѣлъ* (верхній горизонтъ пишущаго мѣла; $MgCO_3$ весьма мало); *у села «Лиски» Воронежской губ.* Послѣ обработки слабой HCl даетъ значительное количество быстро свертывающейся коллоидальной массы. Частицъ крупнѣе 0,02 мм. совсѣмъ не видно. Точно также весьма немного (0,014%) частицъ 0,01 — 0,02 мм. (осѣвшихъ въ теченіе 10 мин.). Среди послѣднихъ до 40—50% обычныхъ кристалликовъ *полевого шпата* совершенно такого же вида, какъ и въ другихъ известнякахъ. Изрѣдка видиѣются карлсбадскіе двойники. Частицъ, осѣвшихъ въ теченіе сутокъ, оказалось 0,14%. Онѣ имѣли 0,005 — 0,002 мм. въ діаметрѣ.

XVIII. *Третичный мергель Градижска Кременчугскаго у., Полтавской губ.* Третичный мергель мѣстечка Градижска подвергался неоднократ-

нымъ изслѣдованіямъ[1], какъ со стороны палеонтологической, такъ и физико-химической, вслѣдствіе его значенія въ дѣлѣ цементнаго производства.

Мною изслѣдованъ былъ образецъ, добытый изъ буровой скважины съ глубины нѣсколькихъ саженей отъ поверхности. Въ сухомъ состояніи онъ имѣетъ бѣлый цвѣтъ; тонко-мучнистъ; при высыханіи образуетъ плотную массу.

Послѣ обработки слабой HCl остается огромное количество зеленовато-бурой глинистой массы. При отстаиваніи въ теченіе 1 — 2 мин. получилось достаточное количество частицъ размѣрами 0,035 — 0,17 мм. Частицы большею частью остроугольны, неправильныхъ очертаній и принадлежали главнымъ образомъ кварцу, затѣмъ *слюдѣ* и *хлориту*, зернамъ *главконита;* встрѣчаются зеленоватыя зерна неплеохроичнаго минерала (вѣроятно авгита). Довольно много сферическихъ стяженій, палочекъ и рогулекъ *сѣрнаго колчедана* или *марказита*. Встрѣтились два кристаллика *кварца* бипирамидальнаго габитуса. Ни микроклина, ни другихъ кристалликовъ полевого шпата не встрѣчено; только у двухъ-трехъ зеренъ намѣчались болѣе правильные контуры съ нерѣзкими полиэдрическими гранями.

XIX. *Известнякъ окрестностей станціи Жмеринки.* Известняки окрестностей Жмеринки, обнажающіеся по рѣкѣ Рову и впадающихъ въ него овраговъ, принадлежатъ третичной системѣ. Они имѣютъ видъ настоящаго ракушечника; если и произошли въ нихъ какіе-либо процессы метаморфизаціи, то въ незамѣтной на глазъ степени. По трещинамъ мѣстами наблюдаются инкрустаціи *кальцита* и натечныя массы изъ него. Среди ракушечнаго известняка очень обычны прослойки мелко-оолитоваго иногда довольно плотнаго известняка. Для обработки соляной кислотой взятъ именно оолитовый известнякъ. Послѣ растворенія остается небольшой остатокъ, состоящій главнымъ образомъ изъ тонкихъ «глинистыхъ» частицъ. Въ небольшомъ количествѣ видны (подъ микроскопомъ) остроугольныя зерна *кварца*. Никакихъ окристаллованныхъ минераловъ не наблюдалось.

---

[1] Литературныя указанія приведены между прочимъ въ моей статьѣ о матеріалахъ, нужныхъ для цементнаго производства въ губ. Воронежской, Курской, Полтавской, Черниговской и Волынской въ изданіи Полтавскаго губ. земства «По вопросу объ организаціи земскаго областного цементнаго завода». 1913. Изданіе Полтав. Губ. Земства.

Сводя все вышеизложенное, мы приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

1) Во всѣхъ изслѣдованныхъ известнякахъ древняго возраста: силурійскаго, девонскаго, каменноугольнаго и пермско- каменноугольнаго найдены въ значительномъ количествѣ кристаллы *полевого шпата*. Съ рѣзко выраженными правильными кристаллографическими очертаніями. Изъ болѣе молодыхъ такіе же кристаллы полевого шпата найдены изъ шести различныхъ мѣстностей только въ мѣлу села Лисокъ. Въ известнякахъ третичной системы кристалловъ не встрѣчено. Такимъ образомъ обнаруживается, что процессъ фельдшпатизаціи известняковъ количественно связанъ съ относительною древностью этихъ породъ. Явленіе находитъ себѣ удовлетворительное объясненіе въ предположеніи позднѣйшаго образованія полевого шпата въ известнякахъ, благодаря гидрохимическимъ процессамъ, въ нихъ въ теченіе долгаго времени происходящихъ[1].

2) Характеръ, кристаллографическій и химическій, полевого шпата известняковъ отличается удивительнымъ постоянствомъ. Общій видъ кристалловъ большею частью таблитчатый по различнымъ кристаллическимъ плоскостямъ, именно по (001), (010) и (110), которыя присутствуютъ почти у всѣхъ кристалловъ; рѣже отсутствуютъ грани {010}; или же коротко столбчатый по оси $\bar{c}$. Вслѣдствіе указаннаго обстоятельства кристаллы имѣютъ видъ гексагональныхъ (по 001), или ромбоидальныхъ таблицъ по (010) или {110}; въ послѣднемъ случаѣ кристаллы нерѣдко имѣютъ ромбоэдрическій видъ.

Своеобразными особенностями отличаются только кристаллы изъ известняка села Кнубри. Здѣсь, какъ описано было выше (стр. 112), вмѣстѣ съ обычными находятся въ огромномъ количествѣ тонкіе призматическіе кристаллы, представляющіе собою карлсбадскіе двойники. Подобныхъ по формѣ кристалловъ мнѣ не приходилось встрѣчать ни въ коллекціяхъ, ни видѣть на различныхъ изображеніяхъ. Кажется, никто не отмѣчалъ ихъ и въ микроскопическихъ препаратахъ различнаго рода горныхъ породъ.

[1] Когда работа была закончена, я получилъ отъ проф. П. Н. Чирвинскаго «Микроскопическое и химическое изслѣдованіе мѣловыхъ и третичныхъ осадочныхъ породъ г. Вольска, Саратовской губ.» 1915. Проф. Чирвинскій не указываетъ присутствія кристалловъ полевого шпата въ изслѣдованныхъ имъ породахъ. Точно также и А. Д. Архангельскій въ своей обширной работѣ о верхнемѣловыхъ отложеніяхъ востока Европ. Россіи нигдѣ не указываетъ на присутствіе кристалловъ полевого шпата въ изслѣдованныхъ имъ подъ микроскопомъ остатковъ отъ обработки мѣла соляною кислотою. Какъ рѣдкость встрѣчаются только обломки полевыхъ шпатовъ.

Двойниковые сростки, именно карлсбадскіе двойники (чаще наблюдаются равномѣрно развитые), наблюдались въ различномъ количествѣ, можно сказать, во всѣхъ известнякахъ.

3) Оптическія свойства кристалловъ также однообразны. Въ кристаллахъ, пластинчатыхъ по {001}, очень обычна микроклиновая рѣшетка, иногда рѣдкая полосатость; часты кристаллы съ нормальными для ортоклаза оптическими явленіями; въ другихъ случаяхъ эти явленія отличаются совершенно тѣми же особенностями, которыя были описаны Grandjean'омъ: именно неодинаковое затемнѣніе на грани {001} въ разныхъ частяхъ одного и того же кристалла; иногда обособленіе центральнаго ядра отъ периферическихъ частей. Болѣе однородными въ оптическомъ отношеніи являются кристаллы по {010}. Углы затемнѣнія отвѣчаютъ *ортоклазу* и *натровому ортоклазу*, *анортоклазу* и въ единичныхъ случаяхъ—*альбиту*. Такимъ образомъ въ известнякахъ имѣются: *микроклинъ*, ортоклазъ каліевый и натровый, анортоклазъ и, вѣроятно, изрѣдка альбитъ.

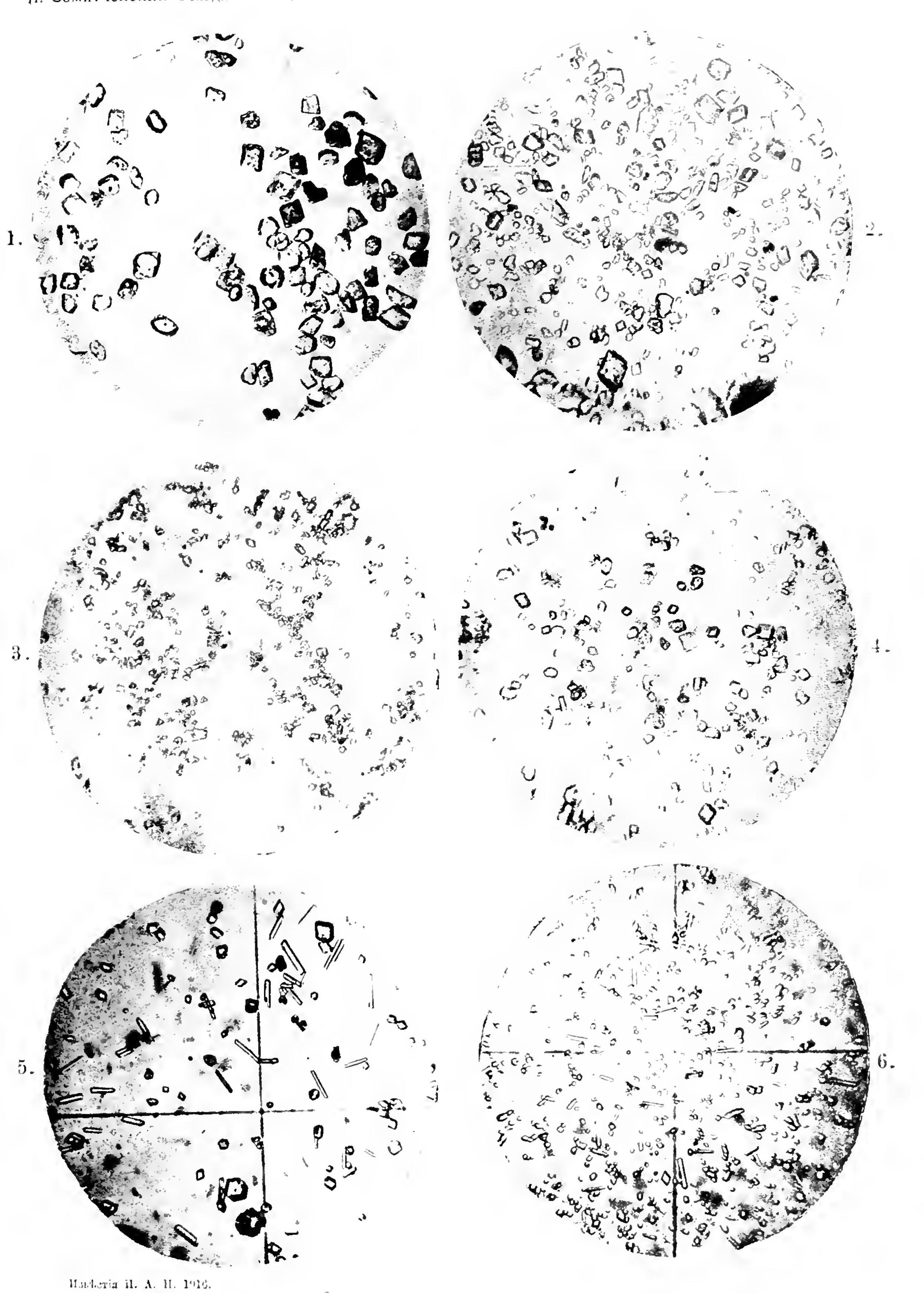
4) Химическій составъ двухъ изслѣдованныхъ образцовъ, именно каменноугольнаго известняка села Кнубри и девонскаго известняка съ рѣки Великой, показываетъ, что здѣсь имѣются на лицо вещества каліеваго и натроваго полевого шпата, чѣмъ подтверждаются заключенія, сдѣланныя на основаніи оптическихъ свойствъ. Въ полевомъ шпатѣ села Кнубри совсѣмъ не оказалось окиси кальція, а въ рѣкѣ Великой хотя въ анализѣ и обнаруживается присутствіе извести, но столь малое количество, что придавать ему какое либо значеніе въ сужденіи о наличности известковыхъ полевыхъ шпатовъ едва ли есть основаніе. Само собою понятно, что химическій анализъ не рѣшаетъ вопроса и о существованіи натроваго силиката, какъ самостоятельнаго отдѣльнаго полевого шпата — альбита.

5) Всѣ обстоятельства и особенности полевыхъ шпатовъ согласно говорятъ за позднѣйшее образованіе ихъ въ известнякахъ вслѣдствіе чисто гидрохимическихъ процессовъ, протекавшихъ на небольшой глубинѣ отъ земной поверхности и не сопровождавшихся ни повышенной температурой, ни особенно значительнымъ давленіемъ. Это обстоятельство не слѣдуетъ упускать изъ виду при рѣшеніи нѣкоторыхъ вопросовъ, касающихся метаморфизма, въ частности — при сужденіяхъ о первичной породѣ, изъ которой произошла та или другая метаморфическая порода, такъ какъ метаморфизація можетъ сопровождаться глубокими химическими измѣненіями,—а также и въ вопросѣ о региональномъ метаморфизмѣ.

6) Весьма вѣроятно, что богатство щелочами глинъ, происшедшихъ отъ выщелачиванія известняковъ и доломитовъ, и преобладанія въ нихъ калія надъ натріемъ[1] объясняется тѣмъ же обстоятельствомъ, именно новообразованіемъ натрово-каліевыхъ полевыхъ шпатовъ въ известнякахъ и доломитахъ, изъ которыхъ глины произошли.

---

[1] Ries. Clays, their occurrence, properties and uses. New-York. 1908; см. также Н. Гинзбургъ. Опытъ характеристики генетическихъ типовъ глинистыхъ образованій. Сборникъ научныхъ работъ, посвященныхъ проф. Ф. Ю. Левинсону-Лессингу. 1915.


1.
2.
3.
4.
5.
6.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Academie Impériale des Sciences).

Созрѣваніе и оплодотвореніе яйца *Salpa maxima — africana.*

В. В. Заленскаго.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

Уже болѣе тридцати лѣтъ тянется споръ относительно характера эмбріональнаго развитія сальпъ. Я въ моей работѣ, касающейся развитія шести видовъ сальпъ (4) пришелъ къ заключенію, что зародышъ сальпъ строится не на счетъ дериватовъ оплодотвореннаго яйца, бластомеръ, а на счетъ клѣтокъ, происходящихъ изъ эпителія, окружающаго яйцевую клѣтку, такъ называемая фолликула, или стѣнки яйцевой камеры Противъ этого мнѣнія возстали другіе эмбріологи: Тодаро (5), Гейдеръ (2), Коротневъ (3) и отчасти Бруксъ (1), которые приходятъ къ заключенію, что клѣтки, которымъ я приписывалъ такое большое значеніе, *гонобласты* или *калиммоциты*, неоплодотворенные элементы, не принимаютъ никакого участія въ развитіи зародыша, такъ какъ онѣ или поѣдаются бластомерами (Тодаро и Гейдеръ), или исчезаютъ, разрушаясь (Коротневъ). Одинъ только Бруксъ придавалъ имъ значеніе формативныхъ элементовъ, но съ ограниченіемъ, такъ какъ, по его мнѣнію, онѣ должны, образовавъ органы зародыша, разрушаться, уступая мѣсто дериватамъ оплодотвореннаго яйца.

Не смотря на этотъ рядъ изслѣдованій, противорѣчащихъ моимъ выводамъ, мои новые изслѣдованія, произведенныя надъ развитіемъ одного вида сальпы, не изслѣдованнаго мною прежде, именно *Salpa zonaria*, не только убѣдили меня въ совершенной правильности моихъ прежнихъ выводовъ, но заставили меня, еще болѣе укрѣпиться въ моемъ мнѣніи [1]. При моихъ изслѣдованіяхъ надъ *Salpa zonaria* я убѣдился, что многое изъ исторіи развитія сальпъ вообще должно подлежать новой переработкѣ, что во многихъ отно-

[1] Работа, о которой я здѣсь упоминаю, напечатана давно, но не можетъ быть выпущена въ свѣтъ за недостаткомъ рисунковъ, которые, по случаю военныхъ дѣйствій, не были своевременно высланы изъ Германіи.

шеніяхъ, касающихся существенныхъ явленій развитія и я долженъ былъ исправить свои прежнія наблюденія. Поэтому, занимаясь въ продолженіи нѣсколькихъ лѣтъ на Виллыфраншской русской зоологической станціи, я воспользовался имѣющимся въ бухтѣ богатымъ матеріаломъ, чтобы провѣрить мои прежнія работы и дополнить ихъ новыми изслѣдованіями на тѣхъ видахъ сальпъ, которыя я изслѣдовалъ раньше.

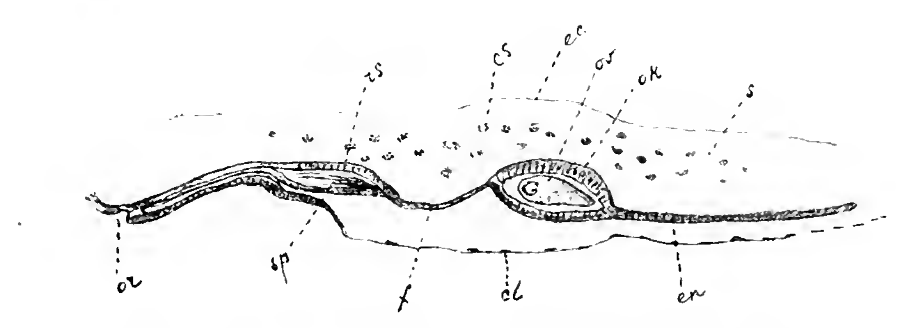
Предлагаемое теперь сообщеніе относится къ самымъ раннимъ явленіямъ развитія: созрѣванію и оплодотворенію яйца. Чрезвычайно своеобразныя явленія развитія сальпъ невольно вызываютъ предположеніе о томъ: не существуетъ ли въ процессѣ созрѣванія и оплодотворенія яйца какихъ нибудь явленій, могущихъ пролить нѣкоторый свѣтъ на причину оригинальныхъ процессовъ органогенезиса сальпъ. Изслѣдованія Тодаро (5) надъ созрѣваніемъ и оплодотвореніемъ яйца у *S. africana* и *S. pinnata*, равно и мои прежнія работы, гораздо менѣе детальныя, показали, что эти первичные процессы развитія сальпъ существенно не отличаются отъ того, что извѣстно изъ многочисленныхъ работъ въ этой области касающихся другихъ животныхъ. Собранный мною въ Виллыфраншѣ матерьялъ далъ мнѣ возможность провѣрить изслѣдованія Тодаро относительно *S. africana*, отчасти дополнить изслѣдованія итальянскаго ученаго, отчасти исправить ихъ.

Кромѣ Тодаро, надъ созрѣніемъ и оплодотвореніемъ яйца работалъ Коротневъ. Результаты его изслѣдованій помѣщены въ его работѣ о развитіи *Salpa maxima africana* (3). Они очевидно основаны на наблюденіяхъ надъ неудачно консервированнымъ матерьяломъ, отрывочны и часто не понятны. Поэтому я на нихъ останавливаться не буду.

Съ результатами работы Тодаро мы познакомимся попутно при изложеніи моихъ изслѣдованій. Предварительно я считаю нужнымъ сказать нѣсколько словъ относительно номенклатуры частей яичника, съ которыми мы будемъ имѣть дѣло. Это предварительное краткое замѣчаніе я считаю необходимымъ ввиду большой запутанности въ номенклатурѣ, часто затрудняющей пониманіе изложенія наблюденій.

Женскій половой аппаратъ текогонныхъ сальпъ состоитъ изъ одного яйца (яйцевой клѣтки, или ооцита), заключеннаго въ эпителіальный мѣшокъ, фолликулъ, или яйцевую камеру, и имѣющаго сначала шарообразную, потомъ овоидную форму (фиг. 1). Въ передней части, яйцевая камера образуетъ мѣшковидное расширеніе удлиняющееся назадъ въ длинный, сначала полый, потомъ плотный отростокъ, который Тодаро называетъ *sacco prolifero*, я же назвалъ воронкой, такъ какъ не согласенъ съ мнѣніемъ То-

даро, что этотъ мѣшокъ составляетъ источникъ для пролифераціи эпителія фолликулы (фиг. 1 *en*). Самый фолликулъ я предпочитаю называть яйцевой камерой (*ok*), такъ какъ онъ впослѣдствіе заключаетъ не только яйцо или



Фиг. 1. Продольный фронтальный разрѣзъ черезъ женскій половой аппаратъ *S. africana*: *cl* — клоакальная стѣнка матери; *en* — воронка; *f* — шнуровидная часть яйцевода; *rs* — сѣмяпріемникъ (*receptaculum seminis*); *ok* — стѣнка яйцевой камеры (фолликулярный эпителій); *sp* — спермій; *cs* — кровяныя тѣльца; *ov* — яйцевая клѣтка; *s* — кровяной синусъ; *ec* — эктодермъ; *or* — женское половое отверстіе. (Увелич. Apochr. oc. 2 + obj. 8).

его дериваты, но и неоплодотворенныя клѣтки, калиммоциты. Отъ передняго конца яйцевой камеры начинается яйцеводъ, состоящій изъ двухъ частей: задней проксимальной, шнуровидной (фиг. 1 *f*) и передней дистальной-полой, обыкновенно наполненной сперміями и называемой поэтому сѣмяпріемникомъ (*receptaculum seminis*), (фиг. 1, *rs*). Передняя часть яйцевода, съуживаясь, направляется къ клоакальной стѣнкѣ и открывается въ клоакальную полость женскимъ половымъ отверстіемъ (*or*). Весь женскій половой аппаратъ помѣщается въ кровеносномъ синусѣ (фиг. 1, *s*) и слѣдовательно все время омывается кровью. Тодаро отрицаетъ такое отношеніе кровянаго синуса къ женскому половому аппарату, и утверждаетъ, что послѣдній находится въ соединительной ткани, но я вновь изслѣдовалъ это отношеніе и убѣдился, что никакой соединительной ткани вокругъ полового аппарата нѣтъ, а кровеносную полость вокругъ него можно видѣть на любомъ поперечномъ (ср. фиг. 3, 6, 15 *s*), или продольномъ разрѣзѣ (фиг. 1, *s*). Кровеносная полость ограничена снаружи эктодермомъ, съ внутренней стороны стѣнкой клоакальной полости.

Та часть клоакальной стѣнки, которая лежитъ надъ сѣмяпріемникомъ, утолщается и образуетъ куполообразное возвышеніе надъ нимъ (фиг. 14, 15, *cle*). Позднѣе, когда яйцевая камера подвигается впередъ, вслѣдствіе укорачиванія всего яйцепровода, утолщеніе клоакальной стѣнки прикрываетъ яйцевую камеру и образующагося въ ней зародыша, образуя надъ послѣднимъ тонкій покровъ (ср. фиг. 14 и 15). Въ передней и нижней части

этого утолщенія — клоакальной оболочки располагается женское половое отверстіе (*or*). Тодаро принялъ это утолщеніе за матку. Я не согласился съ этимъ взглядомъ Тодаро (6) и назвалъ эту покровную оболочку эпителіальнымъ бугромъ; я предполагалъ въ то время, что эта часть клоакальной стѣнки образуетъ эктодермъ зародыша. Послѣ изслѣдованій надъ развитіемъ *Salpa zonaria* я долженъ былъ отказаться отъ этого мнѣнія и поэтому называю эту оболочку клоакальною оболочкою. Она впослѣдствіе распадается на нижнюю часть, составляющую боковую стѣнку плаценты, и на верхнюю, образующую клоакальный колпачекъ, провизорную оболочку, которая уже въ раннемъ періодѣ развитія постепенно сплющивается, превращается въ тонкую перепонку и наконецъ, съ развитіемъ клоакальной складки, совершенно исчезаетъ.

Отъ описанной сейчасъ клоакальной оболочки зародыша надо отличать другую оболочку, также клоакальнаго происхожденія и также окутывающую зародыша, но образующуюся позднѣе. Она извѣстна уже давно и является въ видѣ двухъ складокъ клоакальной стѣнки по обѣимъ сторонамъ зародыша, начинающихся у корня клоакальной оболочки. Эту оболочку я назвалъ складчатою оболочкою («*Faltenhülle*»). Тодаро (№ 6) разсматриваетъ ее какъ отпадающую оболочку зародыша и различаетъ въ ней наружную оболочку подъ именемъ *decidua reflexa* и внутреннюю — подъ именемъ *decidua vera*. Конечно, эта оболочка не имѣетъ ничего общаго съ отпадающими оболочками зародыша млекопитающихъ, и это названіе Тодаро никакой поддержки у послѣдующихъ наблюдателей не получило. Гейдеръ (№ 2, стр. 382) разсматриваетъ клоакальную оболочку, фолликулъ и складчатую оболочку вмѣстѣ какъ дѣтскій мѣшокъ и называетъ фолликулъ внутренней пластинкой, а клоакальную оболочку наружной стѣнкой *первичнаго дѣтскаго мѣшка*; складчатую оболочку онъ называетъ *вторичнымъ дѣтскимъ мѣшкомъ*. Онъ, очевидно, смѣшиваетъ понятіе о частяхъ совершенно различнаго происхожденія, такъ какъ клоакальная оболочка и складчатая оболочка суть дериваты клоакальной стѣнки матери, а фолликулъ или яйцевая камера дериватъ женскаго половаго аппарата. Эмбріологически обѣ эти части имѣютъ совершенно различное происхожденіе, поэтому смѣшивать ихъ нельзя. Бруксъ (1) называетъ клоакальную оболочку эпителіальной капсулой (*Epithelial capsule of the embryo*).

Для большей ясности я буду называть мой прежній «*Epithelhügel*» клоакальной оболочкой до раздѣленія ея на верхнюю часть, одѣвающую зародыша, которую я назову *клоакальнымъ колпачкомъ*, и на нижнюю — *плаценту*. Вмѣсто названія «складчатая оболочка «*Faltenhülle*» я нахожу

болѣе удобнымъ названіе «клоакальная складка», такъ какъ это названіе отвѣчаетъ лучше происхожденію этой оболочки.

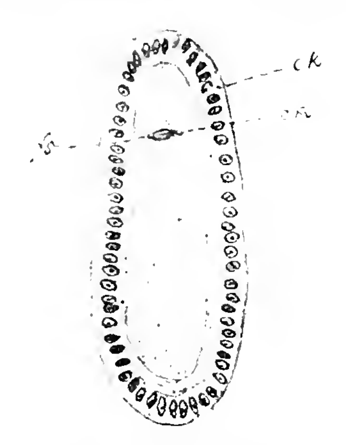
Мои изслѣдованія были произведены надъ матеріаломъ, собраннымъ въ Виллькфраншѣ. фиксированномъ въ сулемѣ съ уксусной кислотой и сохраненномъ въ 70—80° алкоголѣ. Выдѣленные изъ тѣла матери женскіе половые органы, послѣ извѣстной процедуры были заливаемы въ парафинъ. Для просвѣтленія употреблялось кедровое масло. Окраской служили гематеинъ Апати и желѣзный гематоксилинъ Гейденгайна. Послѣдній, равно какъ и желѣзные квасцы, служащіе для протравы, были употребляемы подогрѣтыми до 50°. Какъ плазматическая подкраска послѣ гематоксилина и гематеина служилъ эозинъ.

Перехожу теперь къ изложенію полученныхъ мною результатовъ.

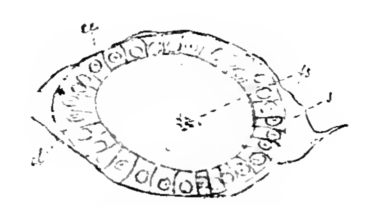
Какъ видно изъ фиг. 1, представляющей разрѣзъ женскаго полового аппарата до начала созрѣванія яйца, въ сѣмяпріемникѣ уже заключается большое количество спермій. Они всегда чрезвычайно рѣзко выступаютъ на окрашенныхъ желѣзнымъ гематоксилиномъ препаратахъ, благодаря очень интенсивной окраскѣ головки и хвостиковъ. Ни одинъ изъ элементовъ яйца, за исключеніемъ хромозомъ, не окрашивается такъ сильно. Яйцевая клѣтка вмѣстѣ съ яйцевою камерою имѣетъ овоидную форму. Плазма ея мелкозерниста, окрашивается обыкновенно довольно слабо гематоксилиномъ и сильно эозиномъ. Она немного отстаетъ отъ стѣнокъ яйцевой камеры. На переднемъ ея концѣ помѣщается большой зародышевый пузырекъ. Такое положеніе пузырька временно; онъ перемѣщается вскорѣ изъ передняго полюса яйца въ задній, и это перемѣщеніе можетъ, собственно, считаться началомъ періода созрѣванія яйца. Какими причинами вызывается это передвиженіе зародышеваго пузырька: сокращеніемъ плазмы яйца, которое въ дѣйствительности существуетъ, или молекулярными движеніями плазмы, что также возможно, — это рѣшить очень трудно, особенно на яйцахъ такихъ живородящихъ животныхъ, какъ сальпы, гдѣ подборъ соотвѣтствующихъ стадій развитія зависитъ отъ случайности.

Въ ближайшей стадіи, которую я имѣлъ случай изслѣдовать на разрѣзахъ, зародышевый пузырекъ уже значительно подвинулся къ заднему полюсу яйца, но еще далеко не дошелъ до него. Онъ превратился въ митотическое веретено, лежащее въ *поперечномъ* направленіи, т. е. въ направленіи перпендикулярномъ тому, которое онъ занимаетъ во время образованія изъ него ядра первой полярной клѣтки (фиг. 2, *fs*). Какимъ образомъ совершается превращеніе зародышеваго пузырька въ веретено я не имѣлъ случая наблюдать, такъ какъ не имѣлъ соотвѣтствующихъ стадій развитія. Попе-

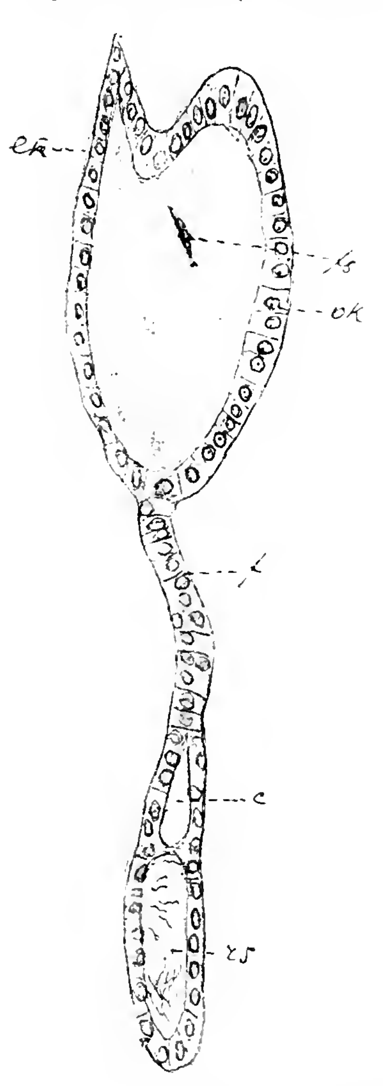
речное положеніе зародышеваго пузырька, или вѣрнѣе веретена происходящаго изъ него, описано впервые Тодаро совершенно вѣрно (5). Онъ также



Фиг. 2. Фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо съ первымъ веретеномъ, лежащимъ еще въ поперечномъ направленіи: *fs* — веретено; *cm* — центрозома; *ok* — стѣнка яйцевой камеры. (Ар. ос. 2 S. Im. 2).



Фиг. 3. Поперечный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру съ яйцомъ въ стадіи фиг. 2: *ec* — эктодерма; *cl* — клоакальная стѣнка; *ok* — стѣнка яйцевой камеры; *fr* — веретено съ хроматическими нитями: *s* — кровяной синусъ.(Ар. ос. 4 Imm. 1,5; уменьшено вдвое).



Фиг. 4. Сагиттальный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру и яйцеводъ въ стадіи воворачиванія перваго веретена (*fs*), которое лежитъ наискось, *rs* — сѣмяпріемникъ; *f* — шнуровидная часть яйцевода; *ok* — стѣнка яйцевой камеры; *cn* — воронка; *r* — часть шнуровиднаго отдѣла яйцевода, превратившаяся въ полую трубку (Ар. ос. 2 + Im. 1,5).

смотритъ на это положеніе какъ на провизорное. Веретено зародышеваго пузырька красится чрезвычайно интенсивно желѣзнымъ гематоксилиномъ, при чемъ красятся какъ ахроматиновые нити такъ и хроматиновыя петли. Эти послѣднія чрезвычайно мелки въ яйцахъ *S. africana*. Лучше всего ихъ можно видѣть на поперечныхъ разрѣзахъ черезъ веретено (см. фиг. 3 *fs*), хотя вслѣдствіе своей чрезвычайно мелкой величины они и здѣсь видны не ясно. На фиг. 3-й изображено яйцо изъ той стадіи развитія,

когда веретено зародышеваго пузырька поворачивается для того, чтобы перейти изъ поперечнаго положенія въ продольное.

Продольный разрѣзъ именно изъ этой стадіи развитія представленъ на фиг. 4. Этотъ разрѣзъ проведенъ въ сагиттальномъ направленіи, такъ что онъ прошелъ черезъ яйцевую камеру и черезъ основную часть яйцевой воронки; самый отростокъ ея не задѣтъ. Ооцитъ, лежащій въ яйцевой камерѣ залѣзаетъ на воронку въ видѣ отростка, совершенно соотвѣтствующаго своей формой формѣ воронки. Тодаро описалъ подобныя картины и заключаетъ изъ нихъ, что яйцо способно къ амебоиднымъ движеніямъ, съ чѣмъ вполнѣ можно согласиться. Во всякомъ случаѣ этотъ отростокъ временный, своего рода псевдоподій и для дальнѣйшаго развитія никакого значенія не имѣетъ, такъ какъ и самая воронка, которая уже въ начальныхъ стадіяхъ сегментаціи исчезаетъ.

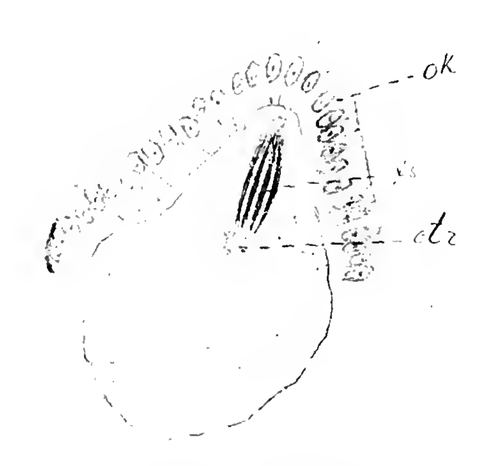
Противъ основанія воронки, вблизи отъ задняго полюса яйца лежитъ веретено зародышеваго пузырька. По сравненію съ предыдущей фигурой, гдѣ это веретено занимаетъ поперечное положеніе, оно здѣсь измѣняетъ свое положеніе и становится нѣсколько наискось къ продольной оси яйца. Очевидно, поперечно-лежащее веретено поворачивается вокругъ своей поперечной оси для того, чтобы принять вертикальное положеніе.

Движеніе веретена ведетъ въ концѣ концовъ къ перемѣщенію его къ заднему полюсу яйца и къ продольному его положенію, которое мы и видимъ на фиг. 5. Съ тѣхъ поръ, какъ совершилось передвиженіе веретена зародышеваго пузырька въ задній полюсъ, оба полюса получаютъ опредѣленное значеніе: задній полюсъ становится полюсомъ созрѣванія яйца, такъ какъ въ немъ происходитъ образованіе полярныхъ клѣтокъ, а передній полюсъ — полюсомъ оплодотворенія, такъ какъ въ немъ происходитъ проникновеніе спермія и образованіе сѣменного пронуклеуса.

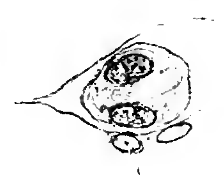
Вопросъ о проникновеніи спермія въ яйцевую клѣтку сальпъ составляетъ одну изъ труднѣйшихъ задачъ эмбріологіи сальпъ. До сихъ поръ никто не видѣлъ этого процесса; мнѣ къ сожалѣнію не удалось до сихъ поръ получить такихъ стадій развитія, въ которыхъ проникновеніе спермія совершается. Я могу только съ достовѣрностью сообщить, что этотъ процессъ совершается до отдѣленія первой полярной клѣтки, такъ какъ въ такой стадіи развитія, когда зародышевый пузырекъ является въ формѣ дѣлящагося веретена, можно уже найти въ переднемъ полюсѣ яйца сформированный мужскій пронуклеусъ.

Если бы между яйцевою камерою и яйцеводомъ находилось открытое сообщеніе, то проникновеніе спермія въ яйцевую камеру было бы совер-

шенно понятно, и вопросъ этотъ разрѣшался бы самъ собою безъ непосредственныхъ наблюденій надъ этимъ процессомъ. Дѣло однако въ томъ, что этого сообщенія не существуетъ. Спермій, для того чтобы проникнуть въ яйцевую камеру, долженъ пройти довольно большое пространство черезъ шнуровидную заднюю часть яйцевода, плотную, не прорѣзанную каналомъ.



Фиг. 5. Фронтальный разрѣзъ черезъ заднюю часть яйцевой камеры съ яйцомъ въ стадіи образованія 1-й полярной клѣтки (первое веретено *fs*): *ctz* — центрозома; *ok* — стѣнка яйцевой камеры (Ap. oc. 4 + Im. 1,5).



Фиг. 6. Поперечный разрѣзъ черезъ шнуровидную часть яйцевода въ стадіи фиг. 4. (Ap. oc. 4 + Im. 1,5)

Притомъ же и передняя стѣнка яйцевой камеры является вездѣ замкнутою.

Съ давнихъ поръ извѣстно, что во время самыхъ раннихъ стадій развитія яйца сальпъ происходитъ сокращеніе яйцевода именно на счетъ задней, плотной и шнуровидной его части. Тодаро (5) объясняетъ это сокращеніе тѣмъ, что, начиная съ передняго граничащаго съ сѣмяпріемникомъ отдѣла въ шнуровидной части происходитъ размноженіе клѣтокъ. Эта часть становится шире, получаетъ полость, сообщающуюся съ сѣмяпріемникомъ, который слѣдовательно на счетъ этой части удлиняется. Этотъ процессъ идетъ постепенно спереди назадъ и наконецъ весь яйцеводъ превращается въ полый сѣмяпріемникъ. Эти соображенія италъянскаго ученаго совершенно справедливы и я могу подтвердить такой способъ сокращенія плотной части яйцевода на препаратѣ, который нарисованъ на фиг. 4, гдѣ очень ясно можно различить вновь образовавшуюся полую часть яйцевода (*r*) отъ существовавшей первоначально (*rs*). Но это все же не можетъ объяснить какими путями спермій пробирается въ яйцевую камеру, такъ какъ между вновь образовавшейся полой части яйцевода и между яйцевой камерой находится большая плотная часть яйцевода, которая никакого сообщенія съ яйцевой камерой не имѣетъ. Если бы даже въ плотной части яйцевода и появился каналъ, который Тодаро описываетъ и рисуетъ на своихъ фигурахъ 4-й и 5-й, то и тогда спермію приходилось бы часть пути пройти черезъ плотную часть яйцевода и проникнуть черезъ запертую переднюю

стѣнку яйцевой камеры. Канала этого, однако въ тѣхъ, стадіяхъ, на которыхъ онъ нарисованъ Тодаро, нѣтъ. Слѣдовательно, надо допустить, что спермій долженъ пройти черезъ плотную часть яйцевода.

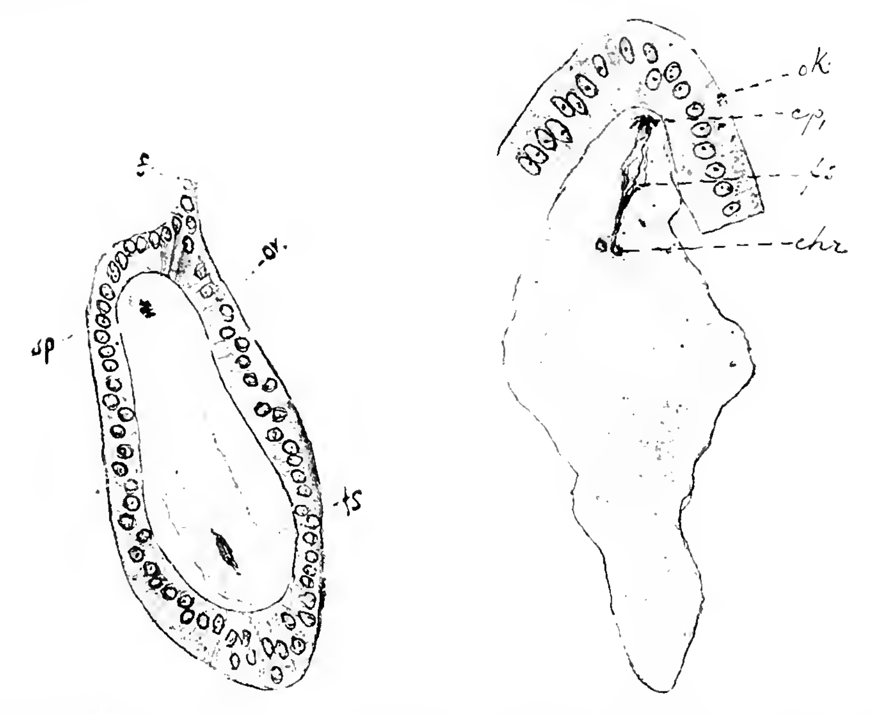
На продольныхъ разрѣзахъ (фиг. 4) плотная часть яйцевода является въ видѣ одного ряда клѣтокъ, плотно прилегающихъ другъ къ другу. Поэтому, надо было бы допустить, что спермій долженъ двигаться черезъ клѣтки, что разумѣется представляло бы громадныя затрудненія. Чтобы провѣрить картины, являющіяся на продольныхъ разрѣзахъ и составить себѣ ясное понятіе относительно однорядняго или двуряднаго расположенія плотной части яйцевода, я дѣлалъ поперечные разрѣзы черезъ эту часть. Одинъ изъ такихъ разрѣзовъ изображенъ на фиг. 6. На немъ совершенно отчетливо видно, что эта плотная часть яйцевода состоитъ изъ двухъ рядовъ клѣтокъ, не плотно прилегающихъ другъ къ другу. Оба эти ряда не видны ясно на продольныхъ сагиттальныхъ разрѣзахъ, такъ какъ одинъ прикрываетъ другой; но на нѣкоторыхъ мѣстахъ, особенно ближе къ сѣмяпріемнику можно различить два ряда ядеръ. Такъ какъ между обоими рядами клѣтокъ существуетъ промежутокъ, то это значительно облегчаетъ понять пути, которыми спермій можетъ двигаться по направленію къ яйцевой камерѣ. Спермій до такой степени тонокъ, что онъ легко можетъ пробраться между клѣтками, если онѣ не совсѣмъ плотно прилегаютъ другъ къ другу.

Въ передней стѣнкѣ яйцевой камеры нѣтъ канала, могущаго сообщать яйцеводъ съ полостью этой камеры. Но, разсматривая при большихъ увеличеніяхъ эту часть стѣнки, можно замѣтить, что цилиндрическія клѣтки этой части не плотно прилегаютъ другъ къ другу; между ними находятся промежутки, наполненные однороднымъ веществомъ, не мелкозернистымъ, какъ плазма клѣтокъ. Очень можетъ быть, что черезъ это вещество, вѣроятно болѣе мягкое чѣмъ плазма, сперміи могутъ найти наиболѣе удобный путь для проникновенія въ яйцевую камеру.

Выше было сказано, что прониканіе спермія внутрь яйцевой камеры совершается до образованія первой полярной клѣтки. Разрѣзъ черезъ яйцо, изображенный на фиг. 7, показываетъ, что спермій проникаетъ еще въ то время когда веретено зародышеваго пузырька лежитъ продольно. Въ передней части яйцевой клѣтки находится круглое, сильно окрашенное гематоксилиномъ тѣльце (*sp*), которое и по своему положенію, и по своей интенсивной окраскѣ гематоксилиномъ, представляетъ несомнѣнную головку спермія. Судя по его темной окраскѣ, слѣдуетъ заключить, что этотъ молодой мужескій пронуклеусъ состоитъ изъ хроматина, пропитывающаго вплотную ядерное ахроматиновое вещество. На слѣдующей стадіи развитія

въ мужскомъ пронуклеусѣ скопляется большое количество прозрачной жидкости, онъ получаетъ форму шаровиднаго пузырька, въ которомъ ясно видны хроматинныя зерна и нити.

Спермій проникаетъ въ яйцо всѣмъ своимъ тѣломъ: головкой и хвостикомъ. Головка превращается въ мужескій пронуклеусъ, хвостикъ погру-



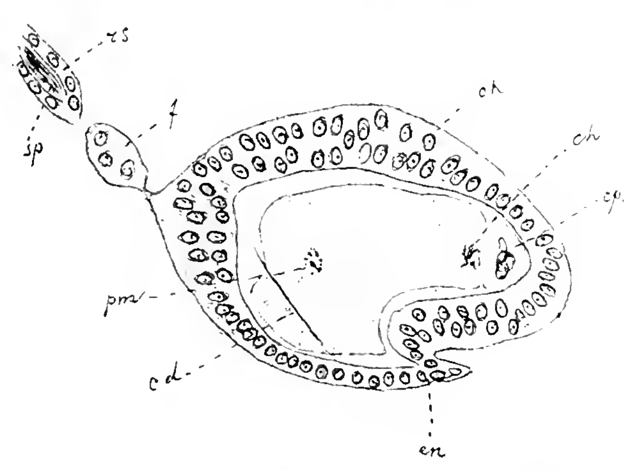
Фиг. 7. Яйцевая камера съ яйцомъ тотчасъ же за проникновеніемъ спермія (*sp*): *ov* — яйцевая камера; *fs* — первое веретено.

Фиг. 8. Яйцевая камера по время образованія 1-й полярной клѣтки: *ok* — яйцевая камера; *cp* — 1-я полярная клѣтка; *fs* — первое веретено; *chr* — хроматинныя скопленія.

женъ въ плазму яйца и долгое время остается видимымъ. Обыкновенно хвостикъ спермія лежитъ въ передней части яйцевой клѣтки и даже высовывается изъ ея поверхности. Въ такомъ видѣ встрѣчается онъ на разрѣзахъ яйца изъ стадій образованія первой полярной клѣтки (фиг. 9 *cd*) и даже второй (фиг. 10 *cd*). Въ болѣе позднихъ стадіяхъ развитія я уже его не встрѣчалъ; вѣроятно онъ разсасывается плазмой. Извѣстно, подобные примѣры вхожденія хвостика спермія не рѣдки при оплодотвореніи яицъ животныхъ напр. моллюсковъ.

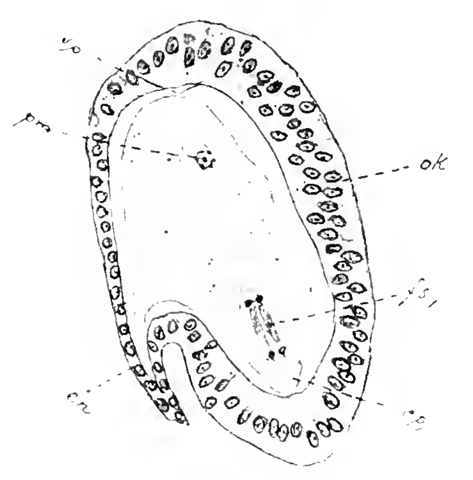
На фиг. 9 представленъ сагиттальный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру съ яйцомъ въ стадіи послѣ отдѣленія первой полярной клѣтки. Мы видимъ изъ разрѣза, изображеннаго на фиг. 8, что веретено зародышеваго пузырька распадается на двѣ полоски, которые въ переднемъ концѣ веретена,

лежащемъ въ яйцевой клѣткѣ, оканчивается двумя хроматинными группами. Эта фигура представляетъ нѣкоторое подобіе тому, что описано Бовери для *Ascaris megalocephala*. На заднемъ концѣ веретена, которое потомъ превращается въ ядро первой полярной клѣтки, такой двойственности хроматинныхъ группъ незамѣтно, можетъ быть потому что тамъ онѣ уже слились. Вообще процессъ развитія ядра въ задней части идетъ гораздо скорѣе чѣмъ въ передней, что особенно хорошо замѣтно именно на стадіи, фиг. 9, гдѣ задній конецъ веретена превратился уже въ готовое ядро, а передній состоитъ изъ хроматиновыхъ нитей и зернышекъ. Къ сожалѣнію у меня недостаетъ стадій промежуточныхъ между этою стадіею и стадіею 2-го веретена, служащаго для образованія 2-ой полярной клѣтки и женскаго пронуклеуса. Поэтому я не могу рѣшить вопроса, наступаетъ ли послѣ этой стадіи покоющаяся стадія ядра или же хроматинъ и части ядра прямо переходятъ въ стадію 2-го веретена.



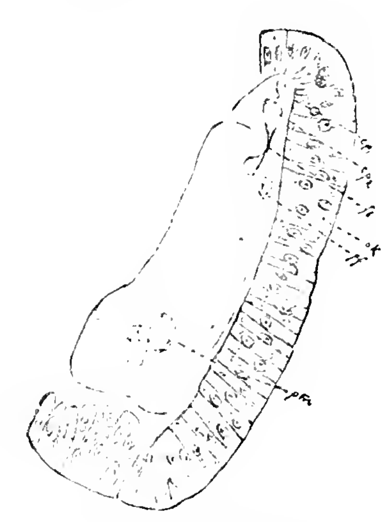
Фиг. 9. Сагиттальный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру тотчасъ за образованіемъ 1-й полярной клѣтки (cp_1): *ch* — хроматинъ для образованія 2-го веретена; *ok* — стѣнка яйцевой камеры; *cn* — воронка, въ которую проникла плазма яйцевой клѣтки; *pm* — мужской пронуклеусъ; *f* — шнуровидная часть яйцевода; *rs* — сѣмяпріемникъ; *cd* — хвостикъ спермія. (Ap. oc. 2 + Im. 1, 5).

Эта стадія изображена на фиг. 10 въ сагиттальномъ разрѣзѣ. На обоихъ рисункахъ (фиг. 9 и 10) плазма яйца, какъ и на фиг. 4-й проникаетъ въ воронку; это явленіе надо считать совершенно нормальнымъ. На заднемъ полюсѣ яйца находится 1-я полярная клѣтка; разрѣзъ прошелъ только черезъ ея плазму и не задѣлъ ея ядра.



Фиг. 10. Сагиттальный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру во время образованія 2-го веретена (fs_1): *cp'* — первая полярная клѣтка; *sp* — хвостикъ спермія въ плазмѣ яйца. Остальныя буквы какъ на фиг. 9. (Ap. oc. 2 + Im. 1, 5).

Непосредственно впереди 1-й полярной клѣтки находится 2-е веретено, состоящее изъ двухъ веретенъ, ясно отдѣленныхъ другъ отъ друга. Хроматинное вещество каждаго изъ веретенъ скопляется на обѣихъ полосахъ ихъ, такъ что мы имѣемъ здѣсь собственно говоря четыре скопленія хроматиннаго вещества, составляющія зачатки двухъ ядеръ и связанныхъ попарно волокнами ахроматиннаго вещества. Я долженъ отмѣтить, что такое парное распредѣленіе веретенъ и хроматиннаго вещества есть явленіе очень распространенное у сальпъ. Оно имѣетъ провизорное значеніе, такъ какъ изъ каждой пары скопленій хроматина образуется по одному ядру: изъ задней пары — ядро 2-й полярной клѣтки, изъ передней — женскій пронуклеусъ. Оба эти деривата втораго веретена остаются соединенными даже и послѣ раздѣленія ихъ т. е. послѣ образованія 2-й полярной клѣтки, какъ это видно на разрѣзѣ, нарисованномъ на фиг. 11.



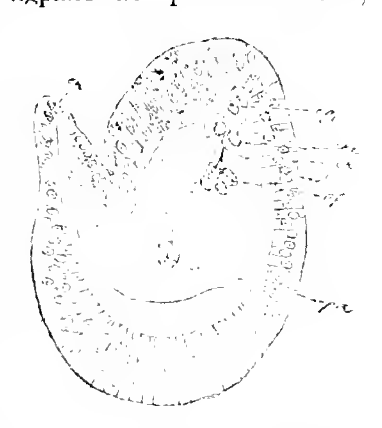
Фиг. 11. Фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо и яйценую камеру въ концѣ образованія 2-й полярной клѣтки и женскаго пронуклеуса: cp_1 — 1-я. cp_2 — 2-я полярная клѣтка; *fs* — веретено; *pf* — женскій пронуклеусъ двулопастный; *ok* стѣнка яйцевой камеры; *pm* — мужескій пронуклеусъ двулопастной. (Ap. oc. 4 + Im. 1, 5; уменьшенная вдвое).

Фиг. 11 представляетъ фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо въ стадіи конца образованія 2-й полярной клѣтки. Эта клѣтка совершенно уже отдѣлилась отъ яйцевой клѣтки, но ядро ея остается связаннымъ съ женскимъ пронуклеусомъ посредствомъ пучка нитей въ которыхъ не трудно узнать изъ сравненія съ предыдущей стадіей ахроматинныя нити втораго веретена. Этотъ пучекъ нитей имѣетъ довольно характерное расположеніе; онъ сжатъ въ срединѣ, которая приходится какъ разъ въ щели между 2-й полярной клѣткой и яйцомъ, къ обоимъ полюсамъ онъ, напротивъ, расширяется вѣерообразно. Волокна становятся къ обоимъ полюсамъ тоньше и прикрѣпляются своими концами къ поверхности ядеръ, что можно очень точно прослѣдить особенно въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ они идутъ сбоку ядра (ср. фиг. 11). На изображенномъ здѣсь препаратѣ видно даже, какъ одно волоконце идетъ отъ ядра 2-й полярной клѣтки и прикрѣпляется къ ядру 1-й полярной клѣтки. Я не могу, однако, утверждать, чтобы это явленіе было нормально, такъ какъ видѣлъ его всего одинъ разъ.

Тодаро описываетъ процессъ образованія второй полярной клѣтки отлично отъ моего описанія. Онъ утверждаетъ (4, стр. 30), что изъ

остатка первичнаго веретена образуется шесть вторичныхъ веретенъ ахроматиннаго вещества. На концахъ каждаго изъ этихъ веретенъ образуется по пузырьку, содержащему хроматинъ. Задніе пузырьки образуютъ вмѣстѣ ядро 2-й полярной клѣтки; передніе превращаются въ женскіе пронуклеусы, которыхъ, слѣдовательно, Тодаро насчитываетъ шесть. Всѣ женскіе пронуклеусы должны, по Тодаро, сливаться поочередно съ мужскимъ пронуклеусомъ, который, по этому автору, одиночный.

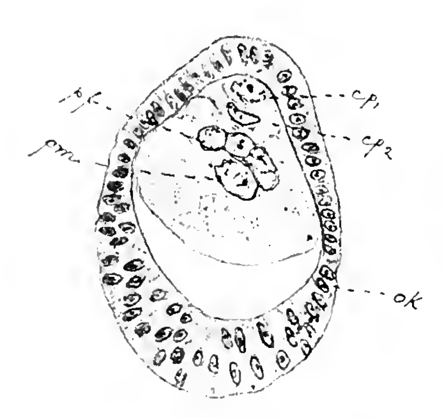
Причиною этой ошибки Тодаро служитъ лопастное строеніе ядра, являющееся у *S. maxima* и довольно распространенное у животныхъ вообще. Подобныя лопастныя ядра встрѣчаются напримѣръ у *Chaetopterus*, *Eustylochus*, *Ciona*, *Physa* и проч. (см. Korschelt и Heider Lehrbuch d. vergl. Entwicklungsgeschichte der wirbellosen Tiere. Allgemeiner Theil 2-е Liefer., стр. 566). У *Salpa africana* эта многолопастная форма ядра выражена сильнѣе, чѣмъ у другихъ животныхъ и она свойственна, притомъ, не одному только женскому ядру, но вообще всѣмъ ядрамъ, являющимся въ клѣткахъ въ періодъ созрѣванія и оплодотворенія яйца: ядрамъ полярныхъ клѣтокъ, женскому и мужскому пронуклеусу. Поэтому видѣть въ этомъ явленіи какую нибудь важную особенность *S. maxima* нѣтъ никакого основанія. Нѣтъ также основанія думать, что женскій пронуклеусъ всегда состоитъ изъ шести лопастей (пузырьковъ, какъ говоритъ Тодаро). Число этихъ лопастей различно, и очень измѣнчиво. На фиг. 9-й мы видимъ ядро 1-й полярной клѣтки, состоящее изъ трехъ лопастей. Очень часто, и это видно на другихъ фигурахъ, ядро полярной клѣтки совершенно круглое. На фиг. 11 ядро 2-й клѣтки круглое, а на фиг. 12 оно состоитъ изъ двухъ пузырьковъ; женскій пронуклеусъ на фиг. 11 состоитъ изъ двухъ лопастей, а на фиг. 12 изъ четырехъ. Также и мужской пронуклеусъ очень часто круглый или овальный, а на фиг. 11 онъ двулопастный.



Фиг. 12. Таже стадія развитія какъ фиг. 11, но въ сагиттальномъ разрѣзѣ. Буква какъ на фиг. 11, *en* — воронка. (Ap. oc. 4 + Im. 1, 5; уменьшенная вдвое).

Это интересное явленіе находитъ только отчасти объясненіе въ предыдущихъ стадіяхъ развитія. Такъ, существованіе двухъ отдѣльныхъ пузырьковъ ядра 2-й полярной клѣтки на фиг. 12 можетъ быть объяснено тѣмъ, что второе веретено состоитъ изъ двухъ ахроматинныхъ веретенъ и двухъ скопленій хроматина по одному на полюсахъ ахроматинныхъ веретенъ. Такъ какъ ядра образуются изъ скопленій хроматина, то понятно отсюда и двойное

число пузырьковъ ядра во 2-й полярной клѣткѣ. Существованіе четырехъ лопастей, или пузырьковъ въ женскомъ пронуклеусѣ происходить, можетъ быть, отъ дальнѣйшаго дѣленія первыхъ пузырьковъ. Существованіе трехлопастнаго ядра въ 1-й полярной клѣткѣ несомнѣнно происходить отъ послѣдующаго выростанія ядра въ лопасти или пузырьки, такъ какъ первоначально ядро простое. Тоже надо сказать и относительно мужескаго пронуклеуса, который также первоначально простой и только впослѣдствіи становится, и то не всегда, двулопастнымъ. Все это указываетъ на то, что въ ядрахъ различныхъ клѣтокъ, происходящихъ изъ яйца или изъ спермій происходитъ движеніе, имѣющее нѣкоторое подобіе съ амебообразнымъ.

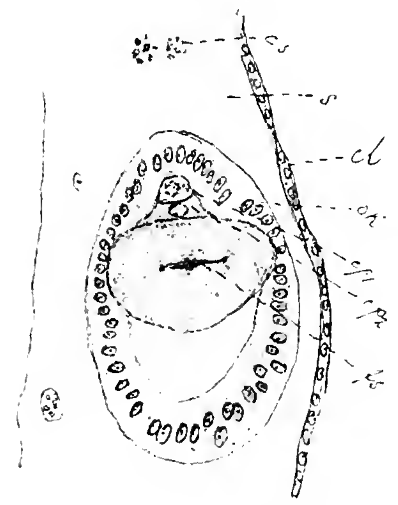


Фиг. 13. Фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо въ яйцевой камерѣ въ стадіи сближенія пронуклеусовъ (*pf* и *pm*). 1-я (cp_1) и 2-я (cp_2) полярныя клѣтки: *ok* — стѣнка яйцевой камеры. (Ар. ос. 2 + Im. 1, 5).

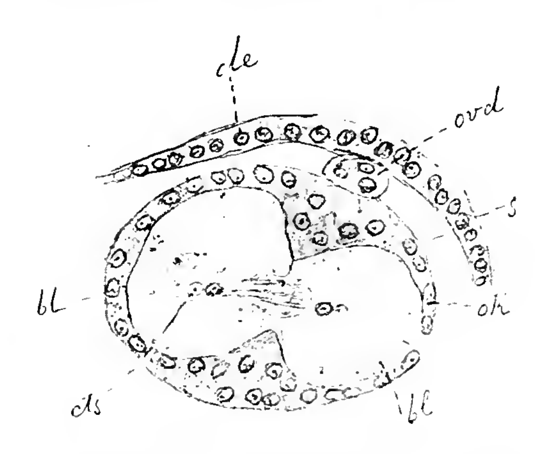
Какимъ образомъ происходитъ сліяніе пронуклеусовъ я не видѣлъ, такъ какъ не имѣлъ соотвѣтственныхъ стадій развитія. Я имѣлъ случай только наблюдать полное сближеніе мужскаго и женскаго пронуклеусовъ (фиг. 13, *pm*, *pf*). Женскій пронуклеусъ (*pf*) состоялъ въ этомъ яйцѣ изъ трехъ лопастей, неодинаковыхъ по величинѣ, но тѣсно сближенныхъ другъ съ другомъ и образующихъ вмѣстѣ мелкую дугу. Съ этой дугой спереди соприкасается непосредственно мужескій пронуклеусъ (*pm*). Во всѣхъ ядрахъ находится сѣть ахроматиннаго вещества, въ которой разсѣяны хроматинныя нити и зернышки. Изъ ихъ расположенія можно заключить, что приготовленія къ образованію перваго сегментаціоннаго веретена еще не наступили. Какъ характерное явленіе въ этомъ періодѣ развитія слѣдуетъ отмѣтить сильное сокращеніе яйцевой клѣтки спереди назадъ. Вся передняя часть яйцевой камеры становится пустою; яйцо занимаетъ заднюю часть ея. сокращаясь по направленію къ полярнымъ клѣткамъ.

Еще болѣе это сокращеніе выражено въ слѣдующей стадіи развитія, когда, очевидно, сліяніе пронуклеусовъ уже произошло и они превратились въ первое сегментаціонное веретено (фиг. 14). Это веретено располагается въ поперечномъ направленіи, что указываетъ на характерное для всѣхъ сальпъ направленіе первой борозды дѣленія. У всѣхъ сальпъ первая борозда, раздѣляющая яйцо на первые два бластомера идетъ въ меридіональномъ направленіи. Первое сегментаціонное веретено, изображенное на фиг. 14,

находится въ той стадіи, когда хроматиныя зерна раздвинулись къ полюсамъ веретена. Ахроматиныя нити въ срединѣ веретена тѣсно сближены другъ съ другомъ. Въ слѣдующей стадіи развитія изображенной на фиг. 15 (разрѣзъ прошелъ не совсѣмъ вертикально) ахроматиныя волокна, на-



Фиг. 14. Фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо въ яйцевой камерѣ въ періодъ образованія перваго сегментаціоннаго веретена (*sf*). Остальныя буквы, какъ на фиг. 13. (Ар. ос. 2 + Im. 1,5).

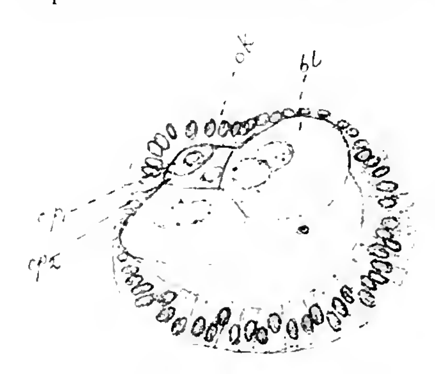


Фиг. 15. Косой фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо въ яйцевой камерѣ въ стадіи раздѣленія яйцевой клѣтки на 2 бластомера (*fl*), соединенные другъ съ другомъ волокнами веретена: *cts* — центрозомъ; *ovd* — яйцеводъ; *s* — кровеносный синусъ; *ok* — стѣнка яйцевой камеры, утолщеная между бластомерами; *cle* — клоакальная оболочка. (Ар. ос. 2 + Im. 1,5).

противъ, раздвинуты и сближены на полюсахъ. Замѣчательно, что въ этой стадіи развитія плазма яйцевой клѣтки уже раздѣлилась вполнѣ на двѣ части, раздѣленныя другъ отъ друга промежуткомъ, тогда какъ ядра еще совершенно не образовались и сегментаціонное веретено съ цѣльными ахроматиными волокнами, хроматиными скопленіями на полюсахъ веретена и соприкасающимися съ послѣдними центрозомами находятся въ полномъ развитіи. Обѣ части раздѣлившейся яйцевой клѣтки, обѣ бластомеры связаны другъ съ другомъ только пучкомъ волоконъ сегментаціоннаго веретена. Получается такая же картина связи клѣтокъ, какую мы видѣли на разрѣзахъ изъ стадіи образованія 2-й полярной клѣтки, гдѣ также связь между послѣдней и яйцевой клѣткой поддерживается только ахроматиными волокнами веретена.

Хроматиныя скопленія на полюсахъ веретена превращаются въ ядра бластомеръ. Въ послѣдней стадіи этого періода развитія эти скопленія уже выросли въ ядра обѣихъ бластомеръ. Фиг. 16 представляетъ разрѣзъ черезъ характерную первую стадію сегментаціи яйца. Яйцо раздѣлилось въ меридіональномъ направленіи на два бластомера (*bl*). На разрѣзѣ черезъ

яйцо въ стадіи сегментаціоннаго веретена (фиг. 14) легко замѣтить, что сокращенная яйцевая клѣтка давитъ на стѣнку яйцевой камеры и заставляетъ ее въ этомъ мѣстѣ сплющиваться. Получается вслѣдствіе этого на внутренней сторонѣ стѣнки кольцеобразное углубленіе вокругъ яйцевой клѣтки, въ которомъ послѣдняя помѣщается какъ въ футлярѣ. То же отношеніе сохраняется и въ послѣдней стадіи созрѣванія и оплодотворенія яйца. Оба бластомера, соприкасающіеся между собою въ осевой части яйцевой камеры, помѣщаются своими наружными частями въ углубленіяхъ стѣнки яйцевой камеры.



Фиг. 16. Фронтальный разрѣзъ черезъ яйцо въ яйцевой камерѣ во время окончательнаго образованія первыхъ двухъ бластомеръ (*bl*): cp_1 1-я, cp_2 — 2-я полярная клѣтка. (Ap. oc. 2+Im. 1,5).

Положеніе полярныхъ клѣтокъ по отношенію къ бластомерамъ то же, какъ и при сегментаціи яйца у другихъ животныхъ. Онѣ лежатъ противъ первой сегментаціонной борозды. Такое положеніе достигается механически. Полярныя клѣтки лежатъ съ самаго начала въ заднемъ полюсѣ яйцевой камеры. Такъ какъ первая сегментаціонная борозда проходитъ въ яйцѣ въ продольномъ направленіи, т. е. параллельно продольной оси яйцевой камеры, то само собою разумѣется, полярныя клѣтки будутъ находиться противъ первой сегментаціонной борозды, т. е. между обоими первыми бластомерами.

Въ заключеніе, я долженъ сказать, что я никогда не видѣлъ у *Salpa africana* дѣленія полярныхъ клѣтокъ, которое описываетъ Тодаро. Я также не видѣлъ размноженія клѣтокъ эпителія сѣмяпріемника, уходящихъ по его словамъ въ яйцевую камеру. Въ послѣднюю входятъ, дѣйствительно клѣтки изъ яйцевода, но это во-первыхъ совершается во время сегментаціи, а во-вторыхъ эти клѣтки не происходятъ изъ эпителія сѣмяпріемника.

Цитированная литература.

1. W. K. Brooks. The genus Salpa (Mem. of the Biological Laboratory of John Hopkins University 1893).
2. K. Heider. Beiträge zur Embryologie von Salpa fusiformis (Abhandl. der Senkenbergsch. naturforsch. Gesellsaft Bd. XVIII. 1895).
3. A. Korotneff. Zur Embryologie der Salpa africana (Zeitschr. f. wiss. Zoologie Bd. LXVI).
4. W. Salensky. Neue Untersuchung über die embryonale Entw. d. Salpen (Mitteil. der Zoolog. Stat. zu Neapel Bd. IV).
5. Fr. Todaro. Studi ulteriori sullo sviluppo delle Salpe (Atti Acad. Lincei. Mem. Vol. I, 1882).
6. Todaro. Sopra lo sviluppo e l'anatomia delle Salpe (Att. Acad. Lincei 2-de série, Vol. II, 1875.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation.

Par A. Liapounoff (Lĭapunov).

(Presenté à l'Académie le 20 janvier (2 février) 1916).

1. En reprenant les notations dont nous nous sommes servi dans le Travail *Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes etc.*, considérons de plus près les équations

$$
(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} x &= \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\,\cos\psi, \\ y &= \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\,\sin\psi, \\ z &= \sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta \end{aligned} \right.
$$

que nous avons admises dans la quatrième Partie de ce Travail pour représenter la surface d'une figure d'équilibre dérivée d'un ellipsoïde singulier ayant pour demi-axes

$$\sqrt{\rho+1}, \qquad \sqrt{\rho+q}, \qquad \sqrt{\rho}.$$

Dans ces équations, ζ est une fonction de θ et ψ qui est à déterminer en supposant qu'elle soit suffisamment petite en valeur absolue pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ, et nous avons vu qu'en définitive cette fonction se présente sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives d'un paramètre α dépendant de la vitesse angulaire, ce paramètre étant choisi d'une manière convenable.

En choisissant ce paramètre de telle manière que la fonction ζ s'annule pour $\alpha = 0$ et soit de l'ordre de α, nous aurons ainsi:

$$\zeta = \zeta_1 \alpha + \zeta_2 \alpha^2 + \zeta_3 \alpha^3 + \ldots, \tag{2}$$

où $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ sont des fonctions de θ et ψ que nous avons appris à calculer, et nous avons montré que ce sont des fonctions rationnelles entières des arguments

$$\sin\theta \cos\psi, \qquad \sin\theta \sin\psi, \qquad \cos\theta,$$

dont les degrés sont égaux à un certain multiple de leurs indices, en sorte que ζ_n sera de degré mn, où m est un nombre fixe, ne dépendant que du choix de l'ellipsoïde singulier qu'on considère.

Les fonctions ζ_n dépendent en général des constantes arbitraires, et de ces constantes on peut disposer de manière que la série (2) soit absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ, tant que $|\alpha|$ reste au-dessous d'une certaine limite.

On arrive au même but en fixant le choix du paramètre α et en faisant des hypothèses convenables au sujet du volume et de la position de la figure d'équilibre par rapport aux axes coordonnés.

Quant au choix du paramètre α, on peut le faire d'une infinité de manières différentes.

Par exemple, on peut prendre pour α la racine carrée de l'intégrale

$$\int \zeta^2 d\sigma,$$

où $d\sigma = \sin\theta \, d\theta \, d\psi$ et l'intégration s'étend à toute la surface sphérique Σ dont $d\sigma$ est l'élément*.

On peut aussi faire une infinité d'hypothèses différentes au sujet du volume de la figure d'équilibre cherchée; mais le plus naturel est de supposer que ce volume soit égal au volume de l'ellipsoïde singulier dont on part.

Quant enfin à la position de la figure d'équilibre par rapport aux axes coordonnés, on suppose seulement que l'axe de rotation du liquide coïncide avec l'axe des z, et sous cette condition on peut varier la position de la

---

* On ne doit pas confondre cette définition de α avec celle qui a été indiquée dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figure d'équilibre etc.*, et qui la rappelle par sa forme. Là nous avions en vue un but spécial, pour lequel la définition actuelle ne conviendrait pas.

figure comme on veut, pourvu que les variations de ζ qui en résultent soient assez petites. Or toute figure d'équilibre admet un plan de symétrie perpendiculaire à l'axe de rotation et au moins un plan de symétrie passant par cet axe. On peut donc placer cette figure dans une telle position que les plans coordonnés des xy et des xz en deviennent des plans de symétrie.

Si l'on choisit le paramètre α comme nous venons de dire et que l'on fasse les hypothèses indiquées au sujet du volume et de la position de la figure d'équilibre, la convergence de la série (2), pour des valeurs assez petites de α, sera assurée.

Dans ces hypothèses, les coefficients de la série (2) représenteront des fonctions rationnelles entières de deux arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, ne dépendant d'aucune constante arbitraire. D'ailleurs tout coefficient ζ_n sera une fonction paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, selon que le nombre mn est pair ou impair.

Du reste les hypothèses précédentes au sujet de α et du volume ne sont pas les seules qui conduisent à ces conclusions, et l'on voit facilement comment on peut en déduire une infinité d'autres hypothèses conduisant aux mêmes conclusions.

2. Sans nous arrêter à des hypothèses déterminées, nous allons seulement supposer que la série (2) soit uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ, quand $|\alpha|$ est assez petit.

Cette série définira alors une fonction ζ qui sera continue sur la surface de la sphère Σ.

De ce que nous avons montré dans le Travail cité plus haut, on peut conclure que la fonction ζ admettra les deux dérivées partielles du premier ordre,

$$\frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial\zeta}{\partial\psi},$$

qui s'obtiendront en différentiant la série (2) terme à terme. Mais la méthode que nous y avons employée ne permet pas de considérer les dérivées d'ordres supérieurs, et l'existence de ces dérivées n'a pas été établie.

A présent nous allons combler cette lacune en faisant voir que la fonction ζ admettra les dérivées de tous les ordres, et que ces dérivées s'obtiendront en différentiant la série (2) terme à terme.

Nous avons vu que les coefficients de la série (2) peuvent être supposés des fonctions entières de deux arguments: $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$.

Cela étant, si nous posons

$$\sin\theta \cos\psi = x_1, \qquad \cos\theta = x_2,$$

ζ_n sera un polynome entier en variables x_1 et x_2 de degré mn, et ce polynome sera tel que, A et L étant des nombres positifs fixes convenablement choisis, on aura

$$|\zeta_n| A^n \leqq L,$$

quel que soit n et quelles que soient les valeurs réelles de x_1 et x_2 satisfaisant à la condition

$$x_1^2 + x_2^2 \leqq 1.$$

Par suite, d'après une proposition générale que nous avons publiée récemment dans ce Bulletin (an. 1915, page 1857), on peut conclure que, si l'on assujettit α à vérifier l'inégalité

$$|\alpha| < A\left(1 + p - \sqrt{2p + p^2}\right)^m,$$

p étant un nombre positif donné, la série (2) sera absolument et uniformément convergente non seulement pour les valeurs réelles de x_1 et x_2 satisfaisant à la condition ci-dessus, mais encore pour des valeurs complexes de ces variables que l'on obtient en considérant l'inégalité

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 \leqq \frac{1}{2} p^2,$$

et en faisant varier les nombres réels ξ_1 et ξ_2 sous la condition

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1$$

de toutes les manières possibles.

Cette proposition fait voir que ζ sera une fonction analytique des variables x_1 et x_2, et que la branche de cette fonction qui nous intéresse n'a pas de points critiques dans le domaine défini par la condition

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 \leqq \frac{1}{2} p^2,$$

pourvu que la valeur considérée de α satisfasse à l'inégalité

$$|\alpha| < A\left(1 + p - \sqrt{2p + p^2}\right)^m.$$

Dans ces inégalités, le nombre positif p peut être arbitraire, et ξ_1 et ξ_2 peuvent avoir des valeurs réelles quelconques satisfaisant à la condition $\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1$.

Le résultat que nous venons d'énoncer suffit pour pouvoir conclure que la fonction ζ, $|\alpha|$ étant assez petit, admet les dérivées de tous les ordres par rapport à

$$x_1 = \sin\theta \cos\psi \quad \text{et} \quad x_2 = \cos\theta,$$

quelles que soient les valeurs réelles de θ et ψ, et que ces dérivées peuvent être formées en différentiant la série (2) terme à terme.

Maintenant nous allons traiter la question d'une autre manière.

3. En entendant toujours par A et L des nombres positifs fixes, tels que, θ et ψ étant réels, on ait

$$|\zeta_n|\, A^n \leqq L, \tag{3}$$

et en supposant $|\alpha| < A$, cherchons à développer la fonction ζ en une série de fonctions sphériques des variables θ et ψ.

Soit

$$\zeta = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

Y_n étant une fonction sphérique d'ordre n.

Nous aurons

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi} \int \zeta' \, P_n(\cos\varphi)\, d\sigma',$$

où

$$\cos\varphi = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\psi - \psi'),$$

$P_n(\cos\varphi)$ est un polynome de Legendre à l'argument $\cos\varphi$, ζ' est ce que devient ζ en y remplaçant θ et ψ par θ' et ψ', $d\sigma' = \sin\theta' d\theta' d\psi'$ et l'intégration s'étend à tous les éléments $d\sigma'$ de la surface de la sphère Σ.

En remplaçant ζ par son expression et en posant

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int \zeta_i' \, P_n(\cos\varphi)\, d\sigma' = Y_n^{(i)},$$

nous présenterons Y_n sous la forme

$$Y_n = \sum_{(i)} Y_n^{(i)} \alpha^i,$$

où la somme ne contiendra que les termes pour lesquels

(4) $$m\,i \geq n,$$

puisque, pour $m\,i < n$, mi étant le degré de ζ_i par rapport à ses arguments

$$\sin\theta\,\cos\psi, \qquad \sin\theta\,\sin\psi, \qquad \cos\theta$$

$Y_n^{(i)}$ sera identiquement nul.

Cela posé, il est facile de voir que non seulement la série simple

(5) $$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

mais encore la série double

$$\sum_{(n)} \sum_{(i)} Y_n^{(i)} \alpha^i$$

sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ.

En effet, d'après (3), on a

$$\left| Y_n^{(i)} \right| < \frac{(2n+1)L}{A^i}.$$

Par suite, i_n étant la plus petite valeur de i qui satisfait à la condition (4), il viendra

$$\sum_{(i)} \left| Y_n^{(i)} \right| |\alpha|^i < (2n+1)\,L\left(\frac{|\alpha|}{A}\right)^{i_n} \frac{A}{A-|\alpha|};$$

et le second membre ne dépasse pas

$$(2n+1)\left(\frac{|\alpha|}{A}\right)^{\frac{n}{m}} \frac{LA}{A-|\alpha|}.$$

De là on voit que la série

$$\sum_{(n)} \sum_{(i)} \left| Y_n^{(i)} \right| |\alpha|^i$$

converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ.

En même temps l'inégalité

$$|Y_n| < (2n+1)\left(\frac{|\alpha|}{A}\right)^{\frac{n}{m}} \frac{LA}{A-|\alpha|}.$$

fait voir que la série (5) est ce que nous avons appelé, dans le Travail cité, une série de Laplace régulière, car, λ étant un nombre satisfaisant aux inégalités

$$\frac{|\alpha|}{A} < \lambda^m < 1,$$

l'inégalité ci-dessus donne

$$|Y_n| < L' \lambda^n,$$

où

$$L' = M \frac{LA}{A - |\alpha|},$$

M étant la plus grande des valeurs que prend l'expression

$$(2i+1)\left(\frac{|\alpha|}{A\lambda^m}\right)^{\frac{i}{m}}$$

quand i croît de 0 à ∞.

De cette façon on voit que, sous la condition $|\alpha| < A$, la fonction ζ est développable suivant les fonctions sphériques de θ et ψ et que son développement représente une série de Laplace régulière.

4. Dans la première Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre etc.*, en étudiant les propriétés des séries de Laplace régulières, nous avons montré qu'une telle série représente une fonction de θ et ψ admettant les dérivées de tous les ordres et que ces dérivées peuvent être obtenues en différentiant la série terme à terme.

Donc ce que nous venons d'établir donne une nouvelle démonstration de l'existence des dérivées de ζ par rapport à θ et ψ de tous les ordres. Nous parvenons d'ailleurs à la conclusion que, pour obtenir ces dérivées, on peut différentier, terme à terme, non seulement le développement de ζ suivant les puissances de α, mais encore son développement suivant les fonctions sphériques.

Du reste on peut arriver à une conclusion encore plus large.

Si, dans le développement de ζ suivant les fonctions sphériques, on remplace ces fonctions par leurs développements suivant les puissances de α, on arrivera à une expression de ζ sous la forme d'une série double, savoir

(6) $$\zeta = \sum_{(n)} \sum_{(i)} Y_n^{(i)} \alpha^i,$$

et nous venons de voir que cette série sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ.

Or, d'une manière toute semblable, on démontrera aussi la convergence absolue et uniforme de la série

$$\sum_{(n)} \sum_{(i)} \frac{\partial^{k+l} Y_n^{(i)}}{\partial \theta^k \partial \psi^l} \alpha^i .$$

En effet, la formule

$$\frac{\partial^{k+l} Y_n^{(i)}}{\partial \theta^k \partial \psi^l} = \frac{2n+1}{4\pi} \int \zeta_i' \frac{\partial^{k+l} P_n(\cos\varphi)}{\partial \theta^k \partial \psi^l} d\sigma',$$

si $n \geqq k+l$, donne pour

$$\left| \frac{\partial^{k+l} Y_n^{(i)}}{\partial \theta^k \partial \psi^l} \right|$$

une limite supérieure de la forme

$$\frac{L F(n)}{A^i},$$

où $F(n)$ désigne une fonction entière du nombre n de degré $2(k+l)+1$ (Travail cité, 1-ère Partie, page 50); et si $n < k+l$, la même formule conduit à une limite supérieure de la forme

$$\frac{N}{A^i},$$

N étant un nombre fixe.

Par suite, comme au numéro précédent, on arrivera à la conclusion que la série

$$\sum_{(n)} \sum_{(i)} \left| \frac{\partial^{k+l} Y_n^{(i)}}{\partial \theta^k \partial \psi^l} \alpha^i \right|$$

converge uniformément pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ.

De là on voit que, pour obtenir les dérivées de ζ, on peut différentier son développement (6) après y avoir ordonné les termes de telle manière qu'on veut.

5. Considérons d'une manière générale les séries de Laplace régulières pour attirer l'attention sur une propriété importante de ces séries qui n'a pas été indiquée dans le Travail *Sur les figures d'équilibre.*

Soit donc

(7) $$Y_0 + Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots$$

une telle série, Y_n étant une fonction sphérique de θ et ψ d'ordre n.

Par la propriété caractéristique de ces séries, on pourra alors assigner deux nombres positifs fixes L et λ, dont λ soit plus petit que 1, tels qu'on ait

$$|Y_n| \leqq L\lambda^n,$$

quel que soit n et quelles que soient les valeurs réelles de θ et ψ.

Cela posé, désignons par R un nombre satisfaisant aux inégalités

$$1 < R < \frac{1}{\lambda}$$

et pouvant être aussi voisin de $\frac{1}{\lambda}$ qu'on veut, sans toutefois pouvoir être égal à cette limite, et considérons la série

$$Y_0 + Y_1 R + Y_2 R^2 + Y_3 R^3 + \dots .$$

Cette série sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ. Elle représentera donc une fonction continue de ces variables que nous désignerons par $f(\theta, \psi)$.

En introduisant cette fonction, on peut exprimer la somme de la série (7) par une intégrale définie. En effet, on aura évidemment

(8) $$\sum Y_n = \frac{R}{4\pi} \int \frac{(R^2 - 1) f(\theta', \psi')\, d\sigma'}{(R^2 - 2R\cos\varphi + 1)^{\frac{3}{2}}},$$

où $\cos\varphi$ a la même signification que précédemment et l'intégration s'étend à toute la surface de la sphère Σ.

Par cette formule on voit que toute série de Laplace régulière représente la valeur, sur la surface d'une sphère, d'une fonction harmonique, définie dans un certain domaine de l'espace qui contient la sphère à son intérieur.

Du reste cela résulte déjà de ce que la série

$$Y_0 + Y_1 r + Y_2 r^2 + \dots,$$

tant que $r < \frac{1}{\lambda}$, peut être différentiée terme à terme par rapport à r, θ, ψ autant de fois qu'on veut.

Or la formule (8) conduit encore à une autre conclusion importante: elle fait voir que toute série de Laplace régulière représente une fonction analytique de θ et ψ qui n'a pas de points critiques dans un certain domaine de valeurs complexes de θ et ψ renfermant le domaine des valeurs réelles.

En effet, θ et ψ ayant des valeurs complexes, l'égalité (8) ne cessera pas d'avoir lieu, pourvu que chacun des deux nombres

$$(9) \qquad \left| e^{\varphi\sqrt{-1}} \right| \quad \text{et} \quad \left| e^{-\varphi\sqrt{-1}} \right|$$

reste au-dessous de R pour toutes les valeurs réelles de θ' et ψ', et sous cette condition l'intégrale représentera évidemment une fonction continue et uniforme de θ et ψ avec toutes ses dérivées.

Envisageons de plus près cette condition, qui peut être exprimée par l'inégalité

$$(10) \qquad \left| e^{\varphi\sqrt{-1}} \right| + \left| e^{-\varphi\sqrt{-1}} \right| < R + \frac{1}{R},$$

puisque le produit des deux nombres (9) est égal à 1.

6. Si nous posons

$$\varphi = \omega + \tau\sqrt{-1},$$

ω et τ étant des nombres réels, l'inégalité (10) s'écrira

$$e^{\tau} + e^{-\tau} < R + \frac{1}{R},$$

et l'on doit exprimer que cette inégalité a lieu quelles que soient les valeurs réelles de θ' et ψ'. Il faut donc commencer par chercher la plus grande valeur que peut atteindre l'expression $e^{\tau} + e^{-\tau}$, considérée comme fonction de θ' et ψ'.

Soit

$$\sin\theta \cos\psi = u_1 + v_1\sqrt{-1},$$
$$\cos\theta = u_2 + v_2\sqrt{-1},$$
$$\sin\theta \sin\psi = u_3 + v_3\sqrt{-1},$$

les u_i et les v_i étant des nombres réels.

D'après cela il viendra

$$\cos\varphi = \xi + \eta\sqrt{-1},$$

où

$$\xi = u_1 \sin\theta' \cos\psi' + u_2 \cos\theta' + u_3 \sin\theta' \sin\psi',$$
$$\eta = v_1 \sin\theta' \cos\psi' + v_2 \cos\theta' + v_3 \sin\theta' \sin\psi'.$$

D'autre part, θ' et ψ' étant réels, nous aurons

$$\xi = \frac{e^\tau + e^{-\tau}}{2} \cos\omega, \qquad \eta = -\frac{e^\tau - e^{-\tau}}{2} \sin\omega;$$

d'où l'on tire, en faisant, pour abréger,

$$e^\tau + e^{-\tau} = t,$$

cette équation du second degré en t^2:

$$(11) \qquad \frac{\xi^2}{t^2} + \frac{\eta^2}{t^2 - 4} = \frac{1}{4},$$

dont on devra considérer celle des deux racines qui est plus grande que 4.

La question revient donc à chercher le maximum de cette racine.

Voyons, pour cela, quel est l'ensemble de valeurs que peuvent recevoir ξ et η quand θ' et ψ', tout en restant réels, varient d'une manière quelconque.

Remarquons d'abord que la relation

$$(u_1 + v_1\sqrt{-1})^2 + (u_2 + v_2\sqrt{-1})^2 + (u_3 + v_3\sqrt{-1})^2 = 1,$$

que doivent vérifier les u_i et les v_i, donne ces deux équations entre ces nombres:

$$(12) \qquad \begin{aligned} u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 &= 1 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2, \\ u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3 &= 0. \end{aligned}$$

Cela posé, si nous imaginons deux droites ayant pour cosinus directeurs par rapport à un trièdre trirectangle, l'une, les nombres

$$\frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \qquad \frac{u_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}}, \qquad \frac{u_3}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}},$$

l'autre, les nombres

$$\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \qquad \frac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}, \qquad \frac{v_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}},$$

ces droites seront perpendiculaires l'une à l'autre.

Par suite, si nous posons, pour abréger,

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = V^2,$$

en vertu de quoi l'on aura

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1 + V^2,$$

les quantités

$$\frac{\xi}{\sqrt{V^2+1}} \quad \text{et} \quad \frac{\eta}{V}$$

représenteront les cosinus des angles que fait la direction (θ', ψ') avec deux directions perpendiculaires l'une à l'autre.

On aura donc

$$(13) \qquad \frac{\xi^2}{V^2+1} + \frac{\eta^2}{V^2} \leqq 1,$$

et c'est là la condition qui définit l'ensemble cherché des valeurs dont ξ et η sont susceptibles.

Cela étant, on doit chercher le maximum de t^2 sous la condition (13).

Or la racine t^2 de l'équation (11) qui est plus grande que 4 est évidemment une fonction croissante de ξ^2 et de η^2. Elle ne peut donc être maximum sous la condition (13) que si l'on a

$$\frac{\xi^2}{V^2+1} + \frac{\eta^2}{V^2} = 1;$$

et dans ce cas, quels que soient d'ailleurs ξ et η, elle sera égale à $4V^2+4$.

Donc le maximum cherché de t^2 sera $4V^2+4$, et nous arrivons ainsi à la conclusion que l'on aura toujours

$$(e^{\tau} + e^{-\tau})^2 \leqq 4V^2 + 4,$$

ce qui se réduit à

$$e^{\tau} + e^{-\tau} \leqq 2\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

De cette façon la condition que l'inégalité (10) doit être remplie pour toutes les valeurs réelles de θ' et ψ' se ramène à l'inégalité

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} < \frac{R^2+1}{2R},$$

ou bien, en vertu de (12), à celle-ci:

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} < \frac{R^2 - 1}{2R}.$$

7. Nous avons entendu par R un nombre arbitraire qui est plus grand que 1 et plus petit que $\frac{1}{\lambda}$. Par suite, la condition étudiée, qui suffit pour qu'une série de Laplace régulière représente une fonction continue et uniforme de θ et ψ avec toutes ses dérivées, peut être exprimée par l'inégalité

$$\sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} < \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda},$$

laquelle, en vertu de (12), peut encore être présentée soit sous la forme

$$\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} < \frac{1 - \lambda^2}{2\lambda},$$

soit sous la forme

$$u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + u_3^2 + v_3^2 < \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2}.$$

Nous avons donc la proposition suivante:

Étant considérée une série de Laplace régulière

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

où Y_n est une fonction sphérique de θ et ψ d'ordre n, soit λ un nombre positif fixe, plus petit que 1, tel que, L étant un autre nombre positif fixe, convenablement choisi, on ait

$$|Y_n| \leqq L\lambda^n,$$

quel que soit n, pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ. Alors, θ et ψ ayant des valeurs complexes, cette série représentera une fonction analytique de θ et ψ, qui n'aura pas de points critiques tant que

$$|\sin\theta\cos\psi|^2 + |\sin\theta\sin\psi|^2 + |\cos\theta|^2 < \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2}.$$

8. Nous allons maintenant supposer que, dans la série de Laplace régulière

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots,$$

les Y_n soient des fonctions paires de l'angle ψ. Alors, si nous posons

$$\sin\theta\cos\psi = x_1, \qquad \cos\theta = x_2,$$

les Y_n seront des fonctions entières de x_1 et x_2, et la série considérée représentera, dans tout domaine où l'on a toujours

$$(14) \qquad |x_1|^2 + |x_2|^2 + |1-x_1^2-x_2^2| < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2},$$

sans que l'inégalité se réduise à l'egalité, une fonction analytique de x_1 et x_2 sans points critiques.

Considérons de plus près l'inégalité (14).

On voit que cette inégalité sera remplie, si la quantité

$$|x_1|^2 + |x_2|^2$$

est au-dessous d'une certaine limite l, et il est facile d'obtenir cette limite, supposée être telle que, sous la condition

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 \geqq l,$$

on puisse trouver, pour x_1 et x_2, des valeurs qui ne satisfassent pas à l'inégalité (14).

En effet, comme

$$|1-x_1^2-x_2^2| \leqq 1 + |x_1|^2 + |x_2|^2,$$

on voit que l'inégalité (14) sera toujours remplie, si l'on a

$$(15) \qquad |x_1|^2 + |x_2|^2 < \frac{(1-\lambda^2)^2}{4\lambda^2}.$$

D'ailleurs, si

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 \geqq \frac{(1-\lambda^2)^2}{4\lambda^2},$$

il suffit de rendre x_1 et x_2 purement imaginaires, pour que l'inégalité (14) ne soit pas remplie.

Sous la condition (15) la série

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \dots$$

pourra être transformée en une série procédant suivant les puissances entières et positives de x_1 et x_2. Donc, si l'on a

$$\frac{(1-\lambda^2)^2}{4\lambda^2} > 1,$$

la fonction de θ et ψ, définie par cette série, sera développable suivant les puissances entières et positives de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ.

9. Considérons un problème un peu plus général.

Soient ξ_1 et ξ_2 des nombres réels assujettis à la condition

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1.$$

Pour $x_1 = \xi_1$, $x_2 = \xi_2$, l'inégalité (14) sera satisfaite. Elle sera donc aussi satisfaite quand la quantité

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2$$

est suffisamment petite.

Proposons-nous de rechercher la limite supérieure que cette quantité ne doit pas atteindre pour que l'inégalité (14) soit toujours remplie.

Posons, pour abréger,

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 = X^2,$$
$$|1 - x_1^2 - x_2^2| = \Delta,$$
$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + \Delta = Z^2,$$

en sorte que l'inégalité (14) s'écrira

$$Z^2 < \frac{1 + \lambda^4}{2\lambda^2}.$$

Comme on a

$$x_1 = u_1 + v_1\sqrt{-1}, \qquad x_2 = u_2 + v_2\sqrt{-1},$$

il viendra

$$X^2 = (u_1 - \xi_1)^2 + (u_2 - \xi_2)^2 + v_1^2 + v_2^2,$$
$$Z^2 = u_1^2 + v_1^2 + u_2^2 + v_2^2 + \Delta,$$
$$\Delta^2 = (1 + v_1^2 + v_2^2 - u_1^2 - u_2^2)^2 + 4(u_1 v_1 + u_2 v_2)^2$$
$$= (1 + u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2)^2 - 4(u_1^2 + u_2^2) - 4(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2.$$

Soit ensuite

$$u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$
$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2},$$
$$\xi = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}.$$

Tenant compte de ce que

$$|u_1 \xi_1 + u_2 \xi_2| \leqq u \xi,$$

nous aurons

(16) $$X^2 \geqq (u - \xi)^2 + v^2,$$

ce qui donne

$$u^2 + v^2 \leqq X^2 - \xi^2 + 2\xi u.$$

Nous aurons ensuite

$$\begin{aligned} Z^2 &= u^2 + v^2 + \Delta \\ &\leqq X^2 - \xi^2 + 2\xi u + \Delta, \\ \Delta^2 &\leqq (1 + u^2 + v^2)^2 - 4u^2 \\ &\leqq (1 + X^2 - \xi^2 + 2\xi u)^2 - 4u^2. \end{aligned}$$

D'après cela, en faisant, pour abréger,

$$\sqrt{(1 + X^2 - \xi^2 + 2\xi u)^2 - 4u^2} = D,$$

il vient

(17) $$Z^2 \leqq X^2 - \xi^2 + 2\xi u + D.$$

Le second membre de cette inégalité, X et ξ étant considérés comme des constantes, est une fonction de u que nous désignerons par $F(u)$.

Cherchons le maximum de cette fonction sous la condition (16), d'après laquelle, en supposant X positif, on doit avoir

$$u \leqq \xi + X.$$

On trouve que ce maximum s'obtient lorsque u devient égal au plus petit des deux nombres

$$\xi + \frac{\xi X^2}{1 - \xi^2} \quad \text{et} \quad \xi + X.$$

Donc, quand on a

$$\xi X \leqq 1 - \xi^2,$$

le maximum cherché sera égal à

$$F\left(\xi + \frac{\xi X^2}{1 - \xi^2}\right) = 1 + \frac{2X^2}{1 - \xi^2}.$$

et quand

$$(18)\qquad \xi X > 1 - \xi^2,$$

il sera

$$F(\xi + X) = (\xi + X)^2 + |(\xi + X)^2 - 1|,$$

ce qui se réduit à

$$F(\xi + X) = 2(\xi + X)^2 - 1,$$

puisque l'inégalité (18), ξ ne dépassant pas 1, donne

$$\xi + X > 1.$$

D'après cela, l'inégalité (17) donnera:

$$\text{pour}\quad \xi X \leqq 1 - \xi^2, \qquad Z^2 \leqq 1 + \frac{2X^2}{1-\xi^2},$$

$$\text{pour}\quad \xi X > 1 - \xi^2, \qquad Z^2 \leqq 2(\xi + X)^2 - 1.$$

D'ailleurs, dans le premier cas, en posant

$$u_1 = \left(1 + \frac{X^2}{1-\xi^2}\right)\xi_1, \qquad v_1 = \sqrt{(1-\xi^2)^2 - \xi^2 X^2}\,\frac{X\xi_1}{(1-\xi^2)\xi},$$

$$u_2 = \left(1 + \frac{X^2}{1-\xi^2}\right)\xi_2, \qquad v_2 = \sqrt{(1-\xi^2)^2 - \xi^2 X^2}\,\frac{X\xi_2}{(1-\xi^2)\xi},$$

on aura l'égalité

$$(19)\qquad Z^2 = 1 + \frac{2X^2}{1-\xi^2}$$

et, dans le second cas, si l'on pose

$$(20)\qquad \begin{cases} u_1 = (\xi + X)\dfrac{\xi_1}{\xi}, & v_1 = 0, \\ u_2 = (\xi + X)\dfrac{\xi_2}{\xi}, & v_2 = 0, \end{cases}$$

on aura l'égalité

$$(21)\qquad Z^2 = 2(\xi + X)^2 - 1.$$

Du reste, pour les valeurs (20) de u_1, v_1, u_2, v_2, l'égalité (21) aura lieu dans tous les cas où

$$\xi + X \geqq 1.$$

Remarquons que

$$1 + \frac{2X^2}{1-\xi^2} \geqq 2(\xi + X)^2 - 1,$$

où l'égalité ne peut avoir lieu que si

$$\xi X = 1 - \xi^2.$$

Par suite, on aura toujours

(22) $$Z^2 \leqq 1 + \frac{2X^2}{1-\xi^2};$$

mais l'égalité ne pourra avoir lieu que dans le cas où

$$\xi X \leqq 1 - \xi^2.$$

10. Maintenant il est facile d'arriver à la solution du problème que nous nous sommes proposé.

En effet, d'après (22) on aura toujours

$$Z^2 < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2},$$

si l'on a

$$X < \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{1-\xi^2}.$$

D'autre part, si l'on a

$$X \geqq \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \xi,$$

d'ou il vient

$$\xi + X > 1,$$

l'égalité (21) sera possible, et, si elle a lieu, il viendra

$$Z^2 \geqq \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}.$$

Cela donne déjà la solution du problème dans le cas particulier où l'on a

$$\xi = \frac{2\lambda}{1+\lambda^2},$$

puisque, pour cette valeur de ξ, les deux limites

$$\frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{1-\xi^2} \quad \text{et} \quad \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \xi$$

deviennent égales. Leur valeur commune, qui est

$$\frac{(1-\lambda^2)^2}{2\lambda(1+\lambda^2)}.$$

représente donc alors la limite supérieure cherchée de X.

Pour toutes les autres valeurs de ξ, on aura

$$\frac{1+\lambda^2}{2\lambda}-\xi > \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{1-\xi^2},$$

et nous devons encore examiner les cas où

$$(23)\qquad \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{1-\xi^2} \leqq X < \frac{1+\lambda^2}{2\lambda}-\xi.$$

En passant à ces cas, supposons d'abord que l'on ait

$$\xi < \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

Alors, comme on a

$$\xi + X < \frac{1+\lambda^2}{2\lambda},$$

il viendra

$$(\xi+X)\,\xi < 1,$$

ce qui assure la possibilité de l'égalité (19). Or, cette égalité ayant lieu, on aura, en vertu de (23),

$$Z^2 \geqq \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}.$$

Supposons ensuite que l'on ait

$$\xi > \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}.$$

ce qui donne

$$\frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2} > \sqrt{1-\xi^2}.$$

Alors, d'après (23), on aura

$$\xi X > \frac{1-\lambda^2}{1+\lambda^2}\sqrt{1-\xi^2} > 1-\xi^2,$$

et sous cette condition il viendra

$$Z^2 \leqq 2(\xi+X)^2-1.$$

On aura donc

$$Z^2 < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda}.$$

En résumé, nous arrivons ainsi à la conclusion suivante:

Soit $\Phi(\xi)$ la fonction définie par les formules:

$$\text{pour } \xi \leqq \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \qquad \Phi(\xi) = \frac{1-\lambda^2}{2\lambda}\sqrt{1-\xi^2},$$

$$\text{pour } \xi \geqq \frac{2\lambda}{1+\lambda^2}, \qquad \Phi(\xi) = \frac{1+\lambda^2}{2\lambda} - \xi.$$

Alors la condition nécessaire et suffisante pour qu'on ait

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |1 - x_1^2 - x_2^2| < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}$$

pour toutes les valeurs complexes de x_1 et x_2 qui correspondent à une valeur donnée de la quantité

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2,$$

ξ_1 et ξ_2 étant des nombres réels donnés, assujettis à la condition

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1,$$

s'exprimera par l'inégalité

$$\sqrt{|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2} < \Phi\left(\sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2}\right).$$

Cette condition étant remplie, la fonction définie par la série

$$Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$$

sera développable suivant les puissances entières et positives de $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$.

On voit que, ξ variant de 0 à 1, $\Phi(\xi)$ est une fonction continue et décroissante. Donc la plus petite valeur de cette fonction dans l'intervalle $(0,1)$ est

$$\Phi(1) = \frac{(1-\lambda)^2}{2\lambda}.$$

Par suite, si l'on a

$$\sqrt{|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2} < \frac{(1-\lambda)^2}{2\lambda}.$$

la fonction définie par la série considérée sera développable suivant les puissances entières et positives de $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$, quelles que soient les valeurs réelles de ξ_1 et ξ_2 satisfaisant à la condition

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 \leqq 1.$$

11. Après cette digression, revenons à la fonction ζ, définie sous la condition $|\alpha| < A$ (nº 3), pour les valeurs réelles de θ et ψ, par la série

$$(24) \qquad \zeta = \zeta_1 \alpha + \zeta_2 \alpha^2 + \zeta_3 \alpha^3 + \ldots,$$

et appliquons les conclusions précédentes à son développement

$$(25) \qquad \zeta = Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$$

suivant les fonctions sphériques de θ et ψ.

Nous avons vu que ce développement est une série de Laplace régulière, pour laquelle le nombre λ peut avoir toute valeur qui satisfait aux inégalités

$$\frac{|\alpha|}{A} < \lambda^m < 1.$$

Par suite, on peut appliquer au développement (25) la proposition du nº 7, en entendant par λ un nombre aussi voisin de

$$(26) \qquad \left(\frac{|\alpha|}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$$

qu'on veut. Or la condition qui figure dans cette proposition s'exprime par une inégalité qui ne doit pas se réduire à une égalité. On peut donc simplement y remplacer λ par le nombre (26).

De cette façon, en faisant pour abréger

$$|\alpha| = a,$$

et en supposant que, θ et ψ ayant des valeurs complexes, on ait toujours

$$(27) \qquad |\sin\theta\cos\psi|^2 + |\sin\theta\sin\psi|^2 + |\cos\theta|^2 < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{2}{m}}\right],$$

nous pouvons conclure que la série dans la formule (25) ne cessera pas d'être absolument convergente. Cette formule pourra donc servir à définir la fonc-

tion ζ pour des valeurs complexes de θ et ψ, et dès lors ce sera une fonction analytique de ces variables, n'ayant pas de points critiques sous la condition (27).

Il est facile de s'assurer que, sous la même condition, la fonction ζ sera développable suivant les puissances de α, en sorte que la série (24) sera encore absolument convergente.

En effet, soit R un nombre quelconque, compris entre 1 et $\left(\frac{A}{\alpha}\right)^{\frac{1}{m}}$ sans être égal à ces limites, et supposons que θ et ψ sont assujettis à vérifier l'inégalité

$$(28)\qquad |\sin\theta\cos\psi|^2 + |\sin\theta\sin\psi|^2 + |\cos\theta|^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R^2} + R^2\right),$$

laquelle ne doit jamais se réduire à l'égalité.

Dans ces conditions, on aura

$$\frac{R(R^2-1)}{(R^2-2R\cos\varphi+1)^{\frac{3}{2}}} = \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\,P_n(\cos\varphi)\,\frac{1}{R^n};$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ' et ψ'.

Par suite, la somme de la série (25) pourra s'exprimer par la formule (8), ce qui donnera

$$\zeta = \frac{R}{4\pi}\int\frac{(R^2-1)\,f(\theta',\psi')\,d\sigma'}{(R^2-2R\cos\varphi+1)^{\frac{3}{2}}},$$

où

$$f(\theta',\psi') = Y_0 + Y_1(\theta',\psi')\,R + Y_2(\theta',\psi')\,R^2 + \dots.$$

Or, θ' et ψ' ayant des valeurs réelles, les $Y_n(\theta',\psi')$ seront développables suivant les puissances de α.

Nous aurons donc

$$f(\theta',\psi') = \sum_{(n)}\sum_{(i)} Y_n^{(i)}(\theta',\psi')\,R^n\,\alpha^i,$$

et cette série double, d'après ce que nous avons vu au n° 3, sera absolument convergente. D'ailleurs elle convergera uniformément pour toutes les valeurs réelles de θ' et ψ'.

D'après cela on voit que, sous la condition (28), on aura

$$\zeta = \sum_{(n)} \sum_{(i)} Y_n^{(i)} \alpha^i,$$

la série double étant absolument convergente.

Il en sera donc aussi de même sous la condition (27), puisque le nombre R, qui ne figure pas dans cette série, peut être pris aussi voisin de $\left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{1}{m}}$ qu'on veut.

Donc, à plus forte raison, la série (24) sera absolument convergente sous la condition (27).

Ajoutons que, si l'on désigne par p un nombre réel satisfaisant à l'inégalité

(29) $$2p^2 + 1 < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{A}{a}\right)^{\frac{2}{m}}\right],$$

toutes les séries considérées seront uniformément convergentes pour toutes les valeurs complexes de θ et ψ qui satisfont à la condition

(30) $$|\sin\theta\cos\psi|^2 + |\sin\theta\sin\psi|^2 + |\cos\theta|^2 \leqq 1 + 2p^2.$$

Or l'inégalité (29), en supposant p positif, est équivalente à celle-ci:

(31) $$|\alpha| < A\left(\sqrt{1+p^2} - p\right)^m.$$

Nous pouvons donc conclure que, p étant un nombre positif arbitraire, ζ sera une fonction analytique de θ et ψ qui n'aura pas de points critiques dans le domaine défini par la condition (30), pourvu que α satisfasse à l'inégalité (31).

12. Supposons maintenant, ce qui est permis, que les coefficients de la série (24) soient des fonctions paires de ψ. Ce seront alors des fonctions entières de

$$x_1 = \sin\theta\cos\psi \quad \text{et} \quad x_2 = \cos\theta,$$

et les conclusions du n° 10, en y remplaçant λ par $\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{1}{m}}$, seront applicables à la fonction ζ.

Nous allons toutefois présenter le résultat sous une autre forme.

Reportons-nous, pour cela, au n° 9 et supposons qu'on ait

$$X \leqq p,$$

p étant un nombre positif donné.

Alors l'inégalité (22), qui aura toujours lieu, donnera

$$Z^2 \leqq 1 + \frac{2p^2}{1-\xi^2}.$$

Par suite, pour qu'on ait

$$(32) \qquad Z^2 < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2},$$

il suffit de supposer

$$1 + \frac{2p^2}{1-\xi^2} < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}.$$

et cette inégalité, en supposant λ positif et plus petit que 1, est équivalente à celle-ci:

$$\lambda < \sqrt{1+\frac{p^2}{1-\xi^2}} - \frac{p}{\sqrt{1-\xi^2}}.$$

Du reste, quand on a

$$p\xi > 1-\xi^2,$$

on peut obtenir, pour λ, une limite supérieure plus précise.

En effet, si l'on a alors

$$X\xi \geqq 1-\xi^2,$$

on aura

$$Z^2 \leqq 2(\xi+X)^2 - 1 \leqq 2(\xi+p)^2 - 1,$$

et si

$$X\xi < 1-\xi^2,$$

il viendra

$$Z^2 \leqq 1 + \frac{2X^2}{1-\xi^2} < \frac{2}{\xi^2} - 1 < 2(\xi+p)^2 - 1.$$

Donc, pour que l'inégalité (32) ait lieu, il suffire de poser

$$2(\xi+p)^2 - 1 < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2}.$$

ce qui est équivalent à

$$\lambda < \xi + p - \sqrt{(\xi+p)^2 - 1}.$$

Par suite, en entendant par $F(\xi)$ la fonction définie par les formules:

$$\text{pour } p\xi \leqq 1-\xi^2, \qquad F(\xi)=\sqrt{1+\frac{p^2}{1-\xi^2}}-\frac{p}{\sqrt{1-\xi^2}},$$

$$\text{pour } p\xi > 1-\xi^2, \qquad F(\xi)=\xi+p-\sqrt{(\xi+p)^2-1},$$

nous pouvons conclure que, si l'on a

$$\sqrt{|x_1-\xi_1|^2+|x_2-\xi_2|^2}\leqq p,$$

(33) $$\lambda < F\left(\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2}\right),$$

on aura

$$|x_1|^2+|x_2|^2+|1-x_1^2-x_2^2| < \frac{1+\lambda^4}{2\lambda^2},$$

quel que soit le nombre positif p et quels que soient les nombres réels ξ_1 et ξ_2 satisfaisant à la condition

$$\xi_1^2+\xi_2^2\leqq 1.$$

Il est facile de voir que, ξ étant compris entre 0 et 1, $F(\xi)$ est une fonction continue et décroissante, en sorte que sa plus petite valeur dans l'intervalle (0, 1) est

$$F(1)=1+p-\sqrt{2p+p^2}.$$

Donc l'inégalité (33) sera toujours remplie, si l'on a

$$\lambda < 1+p-\sqrt{2p+p^2}.$$

Dans toutes ces formules, on peut entendre par λ une fraction positive quelconque. On peut donc poser

$$\lambda=\left(\frac{a}{A}\right)^{\frac{1}{m}},$$

et alors, sous les conditions précédentes, l'inégalité (27) sera remplie. Nous pouvons, par suite, énoncer la conclusion suivante:

Soient p un nombre positif arbitraire et ξ un nombre compris entre 0 et 1. Ces nombres étant donnés, si l'on considère les valeurs complexes de x_1 et x_2 assujetties à la condition

(34) $$|x_1-\xi_1|^2+|x_2-\xi_2|^2\leqq p^2,$$

ξ_1 et ξ_2 étant des nombres réels liés par la relation

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = \xi^2,$$

la série

$$(35) \qquad \zeta_1\alpha + \zeta_2\alpha^2 + \zeta_3\alpha^3 + \ldots$$

convergera absolument et uniformément par rapport à x_1 et x_2, pourvu que α satisfasse à l'inégalité

$$(36) \qquad |\alpha| < A\left(\sqrt{1+\frac{p^2}{1-\xi^2}} - \frac{p}{\sqrt{1-\xi^2}}\right)^m,$$

laquelle inégalité, quand $p\xi > 1 - \xi^2$, peut être remplacée par celle-ci:

$$|\alpha| < A\left(\xi+p-\sqrt{(\xi+p)^2-1}\right)^m.$$

Dans ces conditions, la fonction ζ définie par la série (35) pourra être développée suivant les puissances entières et positives de α, $x_1 - \xi_1$ et $x_2 - \xi_2$.

Du reste, pour qu'il en soit ainsi indépendamment de la valeur de ξ, il suffit qu'on ait

$$|\alpha| < A\left(1+p-\sqrt{2p+p^2}\right)^m.$$

On voit que cette dernière conclusion est plus précise que celle du n° 2, puisque là, au lieu de la condition (34), nous avons considéré celle-ci:

$$|x_1 - \xi_1|^2 + |x_2 - \xi_2|^2 \leqq \frac{1}{2}p^2.$$

13. Nous avons déjà observé que les fonctions ζ_i peuvent être supposées paires par rapport à $\cos\theta$ et paires ou impaires par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, selon que le nombre mi, qui est le degré de la fonction ζ_i, est pair ou impair. Or, s'il en est ainsi, on peut, en se servant de la relation

$$\sin^2\theta\cos^2\psi + \sin^2\theta\sin^2\psi + \cos^2\theta = 1,$$

rendre ζ_i une fonction entière et *homogène* de degré mi de trois arguments

$$\sin\theta\cos\psi, \qquad \sin\theta\sin\psi, \qquad \cos\theta.$$

Supposons donc qu'on ait présenté chacune des fonctions ζ_i sous cette forme et désignons alors ζ_i par

$$\zeta_i[\sin\theta\cos\psi,\ \sin\theta\sin\psi,\ \cos\theta].$$

Cela étant, désignons par x, y, z les variables qui peuvent avoir des valeurs réelles ou imaginaires quelconques et considérons la série

$$\sum \alpha^i \zeta_i[x, y, z]. \tag{37}$$

Nous allons montrer que, si la quantité

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2$$

est au-dessous d'une certaine limite dépendant de α, cette série sera absolument convergente.

Soit

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

En remarquant que

$$\zeta_i[x, y, z] = r^{mi}\,\zeta_i\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right],$$

nous pouvons présenter la série (37) sous la forme

$$\sum (\alpha r^m)^i \zeta_i\left[\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right].$$

Par suite, en nous reportant au n° 11, nous pouvons conclure que, si l'on a

$$\left|\frac{x}{r}\right|^2 + \left|\frac{y}{r}\right|^2 + \left|\frac{z}{r}\right|^2 < \frac{1}{2}\left[\left(\frac{|\alpha r^m|}{A}\right)^{\frac{2}{m}} + \left(\frac{A}{|\alpha r^m|}\right)^{\frac{2}{m}}\right],$$

la série (37) sera absolument convergente.

Or cette inégalité est équivalente à celle-ci:

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 < \frac{1}{2}\left(\frac{A}{|\alpha|}\right)^{\frac{2}{m}} + \frac{|r|^4}{2}\left(\frac{|\alpha|}{A}\right)^{\frac{2}{m}}.$$

Donc, comme r peut se réduire à zéro quelle que soit la valeur de la quantité qui se trouve au premier membre, la limite requise sera

$$\frac{1}{2}\left(\frac{A}{|\alpha|}\right)^{\frac{2}{m}}.$$

De cette façon nous arrivons à la conclusion que, si l'on a

$$|\alpha| < \frac{A}{p^m},$$

p étant un nombre positif arbitraire, la somme de la série (37) représentera, dans le domaine défini par la condition

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \leqq \frac{1}{2} p^2,$$

une fonction analytique de x, y, z sans points critiques.

Il en résulte que, quand on a

$$(38) \qquad |\alpha| < A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m,$$

la fonction ζ, présentée sous la forme

$$\zeta = \sum \alpha^i \zeta_i [\sin\theta\cos\psi, \sin\theta\sin\psi, \cos\theta],$$

admettra les derivées partielles, par rapport aux arguments

$$\sin\theta\cos\psi, \quad \sin\theta\sin\psi, \quad \cos\theta,$$

de tous les ordres, quelles que soient les valeurs réelles de θ et ψ, et que ces dérivées s'obtiendront en différentiant la série terme à terme.

Remarquons que, si l'on élimine $\sin\theta\sin\psi$, en présentant ζ, comme au numéro précédent, sous la forme

$$\zeta = \sum \alpha^i \zeta_i (\sin\theta\cos\psi, \cos\theta),$$

on aura un résultat analogue, mais l'inégalité à laquelle on devra alors assujettir α sera plus restreinte que celle (38). En effet, cette inégalité s'obtiendra en posant, dans l'inégalité (36), $\xi = 0$, $p = 1$. Elle sera donc

$$|\alpha| < \frac{A}{(\sqrt{2}+1)^m}.$$

14. Revenons maintenant aux équations (1), qui donnent les coordonnées rectangulaires x, y, z des points de la surface d'une figure d'équilibre en fonction de deux variables indépendantes θ et ψ, et cherchons à en déduire une équation entre x, y, z.

D'après ces équations, on a

$$\frac{x^2}{\rho+1} + \frac{y^2}{\rho+q} + \frac{z^2}{\rho} = 1 + \zeta$$

et, d'autre part,

$$\zeta_i\left[\sin\theta\cos\psi,\ \sin\theta\sin\psi,\ \cos\theta\right] = \frac{\zeta_i\left[\frac{x}{\sqrt{\rho+1}},\ \frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\ \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right]}{(\sqrt{1+\zeta})^{mi}}.$$

Par suite, on obtient immédiatement l'équation de la surface sous la forme

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho} = 1+\sum \alpha^i \frac{\zeta_i\left[\frac{x}{\sqrt{\rho+1}},\ \frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\ \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right]}{\left(\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}\right)^{\frac{mi}{2}}}.$$

Dans la série du second membre, les coefficients des puissances de α sont des fonctions homogènes de x, y, z de degré zéro. Mais, par la forme même de l'équation, on voit que, $|\alpha|$ étant assez petit, on peut la transformer de telle manière que les coefficients des puissances de α y soient des fonctions entières de x, y, z.

A cet effet, il n'y a qu'à résoudre par rapport à ζ l'équation

$$\zeta = \sum \frac{\alpha^i}{(\sqrt{1+\zeta})^{mi}}\, \zeta_i\left[\frac{x}{\sqrt{\rho+1}},\ \frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\ \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right],$$

en supposant que ζ s'annule pour $\alpha = 0$; ce qui est toujours possible sous la condition

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \leqq p^2,$$

p^2 étant un nombre positif arbitrairement choisi, pourvu que $|\alpha|$ soit assez petit.

De cette manière on obtiendra pour ζ une expression de la forme

$$\zeta = \sum \alpha^i\, Z_i[x,\ y,\ z],$$

où Z_i est une fonction entière et homogène de x, y, z de degré mi, et l'on aura ensuite l'équation de la surface sous la forme requise:

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho} = 1+\sum \alpha^i\, Z_i[x,\ y,\ z].$$

Si l'on veut considérer les expressions des ζ_i sous la forme des fonctions entières de deux arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, ces expressions étant désignées par

$$\zeta_i(\sin\theta\cos\psi,\ \cos\theta),$$

on aura à résoudre par rapport à ζ l'équation

$$\zeta = \sum \alpha^i\, \zeta_i\left(\frac{x}{\sqrt{\rho+1}\,\sqrt{1+\zeta}},\ \frac{z}{\sqrt{\rho}\,\sqrt{1+\zeta}}\right),$$

ce qu'on pourra toujours faire sous la condition

$$|x|^2 + |z|^2 \leqq p^2,$$

quel que soit le nombre positif p^2, pourvu que $|\alpha|$ soit assez petit.

Alors, ζ s'annulant pour $\alpha = 0$, on obtiendra

$$\zeta = \sum \alpha^i \, Z_i(x, z),$$

$Z_i(x, z)$ étant une fonction entière de x et z de degré ne dépassant pas mi *, et l'équation de la surface sera

$$\frac{x^2}{\rho + 1} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho} = 1 + \sum \alpha^i \, Z_i(x, z).$$

De cette façon nous avons obtenu l'équation de la surface d'une figure d'équilibre sous trois formes différentes qui sont toutes comprises dans celle-ci:

$$\frac{x^2}{\rho + 1} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho} = 1 + f(\alpha, x, y, z),$$

où $f(\alpha, x, y, z)$ est une série procédant suivant les puissances entières et positives de α, s'annulant pour $\alpha = 0$ et ayant pour coefficients soit des fonctions homogènes de x, y, z de degré zéro, soit des polynomes entiers par rapport à ces variables. Dans le premier cas, cette série sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de x, y, z, tant que $|\alpha|$ est au-dessous d'un nombre fixe A. Dans le deuxième cas, elle convergera absolument et uniformément pour toutes les valeurs complexes de x, y, z qui satisfont à une condition de la forme

$$|x|^2 + |y|^2 + |z|^2 \leqq p^2,$$

où p^2 est un nombre positif arbitraire, pourvu que $|\alpha|$ soit inférieur à une certaine limite dépendant de p^2.

Dans les conditions indiquées, cette serie définira une fonction continue de x, y, z qui admettra les dérivées partielles de tous les ordres; d'où l'on conclut que, $|\alpha|$ étant assez petit, la surface de la figure d'équilibre n'aura pas de points singuliers.

---

* D'après ce que nous avons montré dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre*, il est facile de s'assurer que le degré de cette fonction, pour $i > 1$, sera toujours inférieur à mi. Du reste nous nous proposons d'établir dans un autre Mémoire que ce degré ne dépassera pas $(m-2)i + 2$.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ.

Сходимость формулъ механическихъ квадратуръ.

(Сообщеніе первое).

В. А. Стеклова.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

I.

1. Пусть

$$f(x) \quad \text{и} \quad p(x)$$

двѣ заданныя функціи въ данномъ промежуткѣ отъ a до b.

Возьмемъ рядъ чиселъ

$$a_1, \ a_2, \ldots, \ a_n,$$

лежащихъ между a и b, и такое же число n другихъ имъ соотвѣтствующихъ чиселъ

$$A_1, \ A_2, \ldots, \ A_n,$$

и опредѣлимъ числа a_k и A_k такъ, чтобы для всякаго полинома $P_p(x)$ степени не выше p, гдѣ p есть цѣлое число не бо́льшее $2n-1$, имѣло мѣсто равенство

$$(1) \qquad \int_a^b p(x)\, P_p(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, P_p(a_k).$$

Получимъ $p+1$ уравненій

$$(2)\qquad A_1 a_1^k + A_2 a_2^k + \ldots + A_n a_n^k = \int_a^b p(x)\, x^k\, dx, \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, p)$$

которымъ должны удовлетворять $2n$ величинъ a_k и A_k; изъ нихъ $p+1-2n$ останутся, вообще говоря, произвольными, а остальныя $p+1$ выразятся черезъ эти произвольныя. Числа a_k и A_k зависятъ лишь отъ чиселъ a, b и отъ данной функціи $p(x)$.

Давъ затѣмъ опредѣленныя значенія всѣмъ произвольнымъ величинамъ и опредѣливъ остальныя по уравненіямъ (2), положимъ

$$(3)\qquad \int_a^b p(x)\, f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, f(a_k) + R_n.$$

Получимъ формулу, которая позволитъ вычислять интегралъ

$$\int_a^b p(x)\, f(x)\, dx$$

для любой функціи $f(x)$ при помощи конечной суммы

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\, f(a_k)$$

съ погрѣшностью, опредѣляемой остаточнымъ членомъ R_n формулы (3).

Всякую формулу вида (3) мы будемъ называть *формулой механическихъ квадратуръ*, числа A_k *коэффиціентами* этой формулы, а числа a_k ея *ординатами*.

Изъ наиболѣе извѣстныхъ формулъ этого рода упомянемъ формулы Котеса, Гаусса, Чебышева; формулы, подобныя Гауссовой, разсмотрѣнныя, напр., А. А. Марковымъ въ его «Исчисленіи конечныхъ разностей» (Одесса, 1910); формулы, подобныя формуламъ Чебышева, выведенныя А. А. Марковымъ въ его Мемуарѣ «Новыя приложенія непрерывныхъ дробей» (Зап. Имп. Академіи Наукъ Ф. М. О. VIII с. т. III, n° 5, 1896 г.); формулы Чебышева съ двумя коэффиціентами и болѣе общія, которыя разсматривались покойнымъ академикомъ Н. Я. Сонинымъ въ

его статьѣ «О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ и т. д.». (Варшавскія Университетскія Извѣстія, 1887 г.).

Кромѣ указанныхъ формулъ можно построить безчисленное множество другихъ, изъ которыхъ каждая можетъ служить съ большей или меньшей выгодой для вычисленія опредѣленныхъ интеграловъ.

Точность вычисленія зависитъ отъ того, какимъ образомъ измѣняется остаточный членъ R_n формулы квадратуръ съ возрастаніемъ числа n.

2. Изслѣдованіе формулъ механическихъ квадратуръ приводитъ къ двумъ слѣдующимъ основнымъ задачамъ.

Задача (A). *Найти общія условія, при которыхъ въ данной формулѣ квадратуръ, или въ группѣ ихъ, объединенныхъ какимъ либо общимъ признакомъ, или, наконецъ, въ любой изъ возможныхъ остаточный членъ* R_n *стремится къ нулю при безпредѣльномъ возрастаніи числа* n.

Подобная задача была, напр., поставлена Т. Stieltjes'омъ для частнаго случая формулы Гаусса.

При помощи весьма остроумнаго анализа Stieltjes показалъ, что *остаточный членъ этой формулы всегда стремится къ нулю, какова бы ни была функція* $f(x)$, *интегрируемая (въ смыслѣ Римана) въ данномъ промежуткѣ*, или, какъ мы будемъ говорить, формула Гаусса *сходится* для всякой интегрируемой функціи[1].

Другая задача, практически весьма важная, состоитъ въ слѣдующемъ:

Задача (B). *Найти для каждой данной формулы механическихъ квадратуръ, или для извѣстной группы ихъ, или, наконецъ, для всѣхъ такихъ формулъ точное выраженіе остаточнаго члена* R_n, *когда функція* $f(x)$ *допускаетъ производныя различныхъ порядковъ.*

Задача эта рѣшена, въ частности, для формулъ Гаусса и имъ подобныхъ и для упомянутыхъ выше формулъ А. А. Маркова, если не ошибаюсь, впервые А. А. Марковымъ.

Другихъ изслѣдованій, касающихся общихъ задачъ (A) и (B), насколько я знаю, до послѣдняго времени не было.

Даже для весьма употребительныхъ формулъ Котеса и Чебышева не выведено выраженія остаточнаго члена R_n.

3. Попытка найти дополнительный членъ формулъ Котеса и Чебышева безъ труда привела къ общему рѣшенію задачи (B), когда за исходный пунктъ сужденій была принята одна весьма простая формула,

---

[1] T. I. Stieltjes: «Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques». Annales de l'École Normale, Paris, 1884, III série, T. I.

легко выводимая на основаніи элементарныхъ свойствъ полиномовъ Лежандра (формула (6) слѣдующаго §[a]).

Оказалось при этомъ, что та же самая формула немедленно доставляетъ и крайне простое рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ типа (A).

Эти результаты получены при помощи нѣкоторыхъ пріемовъ, которыми я пользовался въ своихъ изслѣдованіяхъ по теоріи замкнутости и которыми естественно было воспользоваться и въ разсматриваемомъ случаѣ въ виду явной аналогіи указанныхъ выше задачъ (A) и (B) съ нѣкоторыми вопросами только что упомянутой теоріи.

Примѣненіе той же самой формулы, въ свою очередь, дало возможность чрезвычайно упростить разсужденія этой послѣдней теоріи и дать такія доказательства ея основныхъ теоремъ, которыя по своей простотѣ не оставляютъ желать ничего лучшаго.

Подробный анализъ будетъ опубликованъ въ особой запискѣ, въ настоящемъ же предварительномъ сообщеніи я укажу лишь вкратцѣ общій ходъ сужденій и главнѣйшіе выводы.

Я начну съ рѣшенія нѣкоторыхъ вопросовъ задачи (A), рѣшеніе же второй задачи (B) изложу въ другомъ предварительномъ сообщеніи въ одномъ изъ ближайшихъ засѣданій.

Упомянутый выше выводъ основныхъ теоремъ теоріи замкнутости послужитъ предметомъ особой замѣтки.

II.

4. Употребляя обычныя обозначенія, назовемъ черезъ

$$X_k(x) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

полиномы Лежандра, соотвѣтствующіе промежутку $(-1, +1)$.

Положимъ

$$\rho_p(x) = f(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x), \tag{4}$$

гдѣ

$$B_k = \int_{-1}^{+1} f(x)\, X_k(x)\, dx. \tag{5}$$

Легко убѣдиться, что

$$(6) \qquad \rho_p(x) = \frac{p}{2}\left(X_p(x)\int_{-1}^{+1} F(x, y)\, X_{p-1}(y)\, dy - X_{p-1}(x)\int_{-1}^{+1} F(x,y)\, X_p(y)\, dy\right),$$

гдѣ положено

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

Предполагая, что $f(x)$ имѣетъ производныя двухъ первыхъ порядковъ, получимъ простымъ интегрированіемъ по частямъ, на основаніи элементарныхъ свойствъ полиномовъ Лежандра,

$$(7) \qquad |\rho_p(x)| < \frac{M_2}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2p-1}},$$

гдѣ M_2 есть

$$\max. |f''(x)|$$

въ промежуткѣ $(-1, +1)$.

Примѣнимъ неравенство (7) къ функціи

$$(a) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} f(z)\, dz, \qquad h > 0,$$

гдѣ $f(z)$ есть функція *непрерывная* въ промежуткѣ $(-1, +1)$[1].

Въ этомъ случаѣ можемъ положить

$$M_2 = 2\,\frac{\varepsilon'}{h^2},$$

причемъ, въ силу (7),

$$(8) \qquad \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2} B'_k X_k(x)\right| = |\rho_p(x)| < \sqrt{2}\,\frac{\varepsilon'}{h^2}\,\frac{1}{\sqrt{2p-1}},$$

---

[1] т. е.

$$|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon'$$

при всякомъ x и достаточно маломъ h; ε' есть напередъ заданное положительное число.

гдѣ

$$B'_k = \frac{1}{h^2} \int_{-1}^{+1} X_k(x) \left(\int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} f(z)\, dz \right) dx.$$

5. Обозначимъ черезъ $P_p(x)$ какой либо полиномъ степени p и положимъ

(9) $$\varphi(x) = P_p(x) + \rho_{p+1}(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ пока какая угодно функція отъ x.

Формула квадратуръ, примѣненная къ функціямъ

$$\varphi(x) \quad \text{и} \quad P_p(x),$$

приводитъ къ слѣдующей

(10) $$R_n = \int_a^b p(x)\, \rho_{p+1}(x)\, dx - \sum_{k=1}^{n} A_k\, \rho_{p+1}(a_k),$$

справедливой для всякой функціи $\varphi(x)$ *и для любого полинома* $P_p(x)$.

Пусть $f(x)$ какая либо другая функція отъ x.

Примѣняя формулу квадратуръ (3) къ функціямъ $\varphi(x)$ и $f(x)$ и называя остаточный членъ формулы квадратуръ, соотвѣтствующій функціи $f(x)$, черезъ R'_n, получимъ

(11) $$R'_n = R_n + \sum_1^n A_k \left(\varphi(a_k) - f(a_k)\right) - \int_a^b p(x) \left(\varphi(x) - f(x)\right) dx,$$

гдѣ R_n опредѣляется равенствомъ (10).

Эта формула справедлива для двухъ какихъ угодно функцій $\varphi(x)$ *и* $f(x)$ *и для любого полинома* $P_p(x)$.

6. Изъ всѣхъ возможныхъ формулъ квадратуръ выдѣлимъ группу всѣхъ возможныхъ формулъ, характеризуемыхъ условіемъ

(11) $$\sum_{k=1}^{n} |A_k| < A,$$

гдѣ A есть число, не зависящее отъ n.

Къ числу такихъ формулъ, въ частности, принадлежатъ всѣ формулы квадратуръ съ положительными коэффиціентами.

Положимъ, для простоты,

$$a = -1, \qquad b = +1$$

и примѣнимъ формулы (10) и (11) къ функціямъ $\varphi(x)$ и $f(x)$, связаннымъ соотношеніемъ (a), разумѣя въ (10) подъ $P_p(x)$ полиномъ

$$P_p(x) = \sum_{k=0}^{p} \frac{2k+1}{2} B'_k X_k(x).$$

Получимъ, принявъ въ разсчетъ (8),

(12) $$|R'_n| < (Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2\sqrt{2p+1}} + (Q + A) \max. |\varphi(x) - f(x)|,$$

гдѣ

$$Q = \int_{-1}^{+1} |p(x)|\, dx.$$

Всегда можно выбрать h столь малымъ, чтобы было

$$(Q + A) \max. |\varphi(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и затѣмъ число p столь большимъ, чтобы было

$$(Q\sqrt{2} + A) \frac{\varepsilon'}{h^2\sqrt{p}} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad p \geqq p_0,$$

гдѣ ε напередъ заданное положительное число.

Такимъ путемъ получимъ, замѣтивъ, что n и p возрастаютъ одновременно,

(13) $$|R'_n| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n \geqq n_0.$$

Мы взяли, для простоты, промежутокъ $(-1, +1)$, но очевидно, что неравенство (13) имѣетъ мѣсто для любого промежутка (a, b), коль скоро $f(x)$ непрерывна.

Получаемъ теорему:

Всякая формула механическихъ квадратуръ, коэффиціенты которой подчинены условію (14), сходится для любой функціи $f(x)$, непрерывной въ данномъ промежуткѣ (a, b).

Замѣчаніе. Эта теорема недавно доказана инымъ способомъ Н. М. Крыловымъ[1], который воспользовался пріемами и нѣкоторыми результатами моихъ изслѣдованій, опубликованныхъ въ мемуарахъ «Sur la théorie de fermeture etc.» и «Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture etc.» (Mém. de l'Acad. des Sciences de Petrograd Cl. Ph. M., 1914).

Н. М. Крыловъ указываетъ также, что разсматриваемая теорема была раньше установлена Я. В. Успенскимъ въ его литографированномъ курсѣ «Исчисленія конечныхъ разностей» (въ 1914 году) при помощи теоремы Вейерштрасса, которую Я. В. Успенскій принимаетъ за исходный пунктъ.

Приведенныя выше (вкратцѣ) разсужденія доказываютъ элементарнымъ путемъ теорему о сходимости формулъ квадратуръ разсматриваемаго нами класса для всѣхъ непрерывныхъ функцій, не касаясь теоремы Вейерштрасса. Наоборотъ, эту послѣднюю мы можемъ вывести, если угодно, въ нѣсколькихъ словахъ изъ формулъ (a) и (8).

7. Ограничимся теперь разсмотрѣніемъ *совокупности всѣхъ возможныхъ формулъ механическихъ квадратуръ съ положительными коэффиціентами* A_k, и предположимъ, для простоты, что $p(x) = 1$.

Къ любой изъ нихъ несомнѣнно приложима теорема предыдущаго §а.

Пользуясь этимъ обстоятельствомъ, не трудно установить слѣдующее предложеніе:

Если будемъ дѣлить данный промежутокъ (a, b) на n составляющихъ, то при возрастаніи числа n ординаты a_k въ формулахъ квадратуръ съ положительными коэффиціентами должны располагаться такъ, что въ каждый составляющій промежутокъ попадетъ по крайней мѣрѣ одно значеніе a_k, за исключеніемъ, быть можетъ, нѣкоторой совокупности промежутковъ, сумма длинъ которыхъ можетъ быть сдѣлана меньшей любого напередъ заданнаго числа, при достаточно большомъ n.

Отсюда, какъ слѣдствіе, можетъ быть выведена такая лемма:

Пусть (α, β) есть какой-либо промежутокъ, произвольно взятый внутри даннаго промежутка (a, b); пусть

---

[1] «О сходимости формулъ механическихъ квадратуръ и нѣкоторыхъ относящихся сюда вопросахъ». Записки Горнаго Института, Т. VI, вып. 1, 1915, Петроградъ.

(15) $$a', a'', \ldots, a^{(s)}$$

значенія ординатъ a_k, *лежащихъ внутри* (α, β).

Для любого такого промежутка (α, β) *необходимо имѣетъ мѣсто равенство*

(16) $$\sum A_k = \delta + \varepsilon_n,$$

гдѣ знакъ Σ *распространяется на всѣ значенія (15), а* δ *есть длина интервала* (α, β), *причемъ*

(17) $$|\varepsilon_n| < \varepsilon$$

при достаточно большомъ n.

8. Пусть теперь $f(x)$ есть какая-либо функція *интегрируемая* въ въ промежуткѣ (a, b).

Разобьемъ (a, b) на q составляющихъ промежутковъ δ_i $(i = 1, 2, \ldots, q)$.

Выбравъ q достаточно большимъ, получимъ

(17) $$\left| \int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{q} \mu_i \delta_i \right| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

гдѣ μ_i обозначаетъ нѣкоторое среднее значеніе между max. и min. функціи $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b).

Предполагая $q < n$, составимъ сумму

$$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \sum_{(i)} A_k f(a_k),$$

гдѣ знакъ $\sum\limits_{(i)}$ означаетъ сумму, распространенную на всѣ значенія a_k, принадлежащія промежутку δ_i.

Принявъ въ разсчетъ положительность коэффиціентовъ A_k и формулы (16) и (17), легко получимъ

(18) $$\sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) = \sum_{i=1}^{q} \mu_i \delta_i + \sum_{i=1}^{q} \mu_i \varepsilon_n^{(i)}.$$

(19) $$\left| \sum_{i=1}^{q} \mu_i \, \varepsilon_n^{(i)} \right| < Mq\varepsilon,$$

гдѣ M есть maximum модуля $f(x)$ въ промежуткѣ (a, b).

Каково бы ни было q, всегда можно выбрать число n, отъ q не зависящее, такъ, чтобы было

(20) $$Mq\varepsilon < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Сопоставляя формулы (16), (18), (19) и (20), приходимъ къ неравенству

(21) $$\left| \sum_{k=1}^{n} A_k \, f(a_k) - \int_a^b f(x) \, dx \right| < \varepsilon'$$

при достаточно большомъ n.

9. Лишь для простоты письма я ограничился случаемъ

$$p(x) = 1.$$

Легко убѣдиться, что разсужденія не измѣнятся по существу, если подъ $p(x)$ разумѣть какую угодно положительную функцію въ промежуткѣ (a, b).

При этомъ неравенство (21) замѣнится слѣдующимъ

$$\left| R_n \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} A_k \, f(a_k) - \int_a^b p(x) \, f(x) \, dx \right| < \varepsilon'$$

при достаточно большомъ n.

Это неравенство приводитъ къ теоремѣ:

Всякая формула механическихъ квадратуръ съ положительными коэффиціентами сходится (въ смыслѣ Stieltjes'а) для любой функціи $f(x)$, интегрируемой въ данномъ промежуткѣ (a, b), какова бы ни была заданная положительная функція $p(x)$.

Замѣчаніе. Въ этой общей теоремѣ заключается какъ весьма частный случай подобная же теорема T. Stieltjes'а, относящаяся къ формулѣ квадратуръ Гаусса.

Доказательство T. Stieltjes'a основано на извѣстномъ свойствѣ распредѣленія корней полиномовъ Лежандра.

Приведенное выше доказательство общей теоремы, отличаясь простотой, не только не требуетъ въ каждомъ частномъ случаѣ изслѣдованія закона распредѣленія корней тѣхъ уравненій, которыми въ нѣкоторыхъ случаяхъ опредѣляются ординаты a_k соотвѣтствующей формулы квадратуръ, но, наоборотъ, само доставляетъ общій законъ распредѣленія корней такихъ уравненій, зависящихъ отъ значка n, при возрастаніи числа n.

III.

10. Вообще, условія сходимости формулъ квадратуръ существенно зависятъ отъ закона измѣненія величины

$$\omega(n) = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \tag{22}$$

при возрастаніи числа n.

Мы видѣли, что въ случаѣ, *когда коэффиціенты* A_k *положительны, т. е.*

$$\omega(n) = \textit{пост.}, \tag{23}$$

формула квадратуръ сходится для всякой интегрируемой функціи; въ случаѣ, *когда*

$$\omega(n) < A,$$

всякая формула квадратуръ сходится для любой непрерывной функціи.

Кромѣ указаннаго типа формулъ механическихъ квадратуръ, характеризуемыхъ, напр., условіемъ (23), въ анализѣ употребляются формулы, для которыхъ $\omega(n)$ возрастаетъ безпредѣльно съ возрастаніемъ числа n.

Къ таковымъ принадлежатъ нѣкоторыя формулы съ двумя коэффиціентами и упомянутыя выше формулы А. А. Маркова.

Для послѣднихъ

$$\omega(n) = Ln, \tag{24}$$

гдѣ L есть данное положительное число.

Эти формулы можно разсматривать какъ частный случай формулъ, характеризуемыхъ условіемъ

$$(25) \qquad \omega(n) \leqq N n^{\mu},$$

гдѣ N и μ суть данныя числа, не зависящія отъ n.

При $\mu = 1$ получимъ условіе (24).

Въ практикѣ, насколько мнѣ извѣстно, не встрѣчается формулъ, соотвѣтствующихъ числу μ, отличному отъ 1, тѣмъ не менѣе я разсматриваю условія сходимости формулъ механическихъ квадратуръ при какомъ угодно μ, такъ какъ общій анализъ по существу ничѣмъ не отличается отъ анализа наиболѣе интереснаго случая $\mu = 1$, а результатъ, соотвѣтствующій этому частному предположенію, сейчасъ же выводится изъ общаго (при какомъ угодно μ).

11. Будемъ разумѣть въ равенствахъ (9) и (10) подъ $P_p(x)$ полиномъ, входящій въ формулу (4), или, еще проще, полиномъ

$$(\alpha) \qquad P_p(x) = \sum_{k=1}^{p} B_k \varphi_k(x),$$

гдѣ $\varphi_k(x)$ суть тригонометрическіе полиномы Чебышева, соотвѣтствующіе характеристической функціи

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

а

$$B_k = \frac{1}{Q_k}\int_{-1}^{+1} f(x)\varphi_k(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$Q_k = \int_{-1}^{+1} \frac{\varphi_k^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Получимъ, предполагая, что *функція $f(x)$ имѣетъ производныя до порядка s,*

$$(26) \quad |\rho_{p+1}(x)| < \sqrt{\frac{2}{\pi}}\sqrt{\sum_{k=p+1}^{\infty}\left(B_{k-s}^{(s)}\right)^2}\sqrt{\sum_{k=p+1}^{\infty}\frac{1}{k^2(k^2-1)\ldots(k^2-(s-1)^2)}},$$

гдѣ

$$B_{k-s}^{(s)} = \frac{1}{\sqrt{Q_{k-s}^{(s)}}} \int_{-1}^{+1} p_s(x) f^{(s)}(x) \varphi_{k-s}^{(s)}(x)\, dx,$$

$$p_s(x) = (1 - x^2)^{\frac{2s-1}{2}}, \qquad Q_{k-s}^{(s)} = \int_{-1}^{+1} p_s(x) \left[\varphi_{k-s}^{(s)}(x)\right]^2 dx,$$

а $\varphi_{k-s}^{(s)}(x)$ суть полиномы Чебышева, соотвѣтствующіе характеристической функціи $p_s(x)$.

Формула (26) выводится весьма просто интегрированіемъ по частямъ на основаніи извѣстныхъ свойствъ полиномовъ Чебышева.

Неравенство (26) приводитъ къ слѣдующему

$$|\rho_{p+1}(x)| < \mu_s \frac{M_s}{p^{s-\frac{1}{2}}},$$

гдѣ M_s есть max. $|f^{(s)}(x)|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, а μ_s есть положительное число, зависящее только отъ s (и не зависящее отъ p и M_s).

При этомъ формула (10) даетъ

$$|R_n| < \mu_s M_s \frac{Q + \omega(n)}{p^{s-\frac{1}{2}}}, \qquad Q = \int_a^b |p(x)|\, dx.$$

Въ этомъ неравенствѣ можно положить $p = n$.

Отсюда, на основаніи (26), легко заключить, что *всякая формула квадратуръ, коэффиціенты которой удовлетворяютъ неравенству (25), сходится для всякой функціи, имѣющей производныя до порядка s, если*

$$\mu < s - \frac{1}{2}.$$

12. Введеніемъ вспомогательной функціи

$$(\beta) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(z)\, dz, \qquad h > 0$$

можно обобщить нѣсколько результатъ и доказать слѣдующее предложеніе:

Всякая формула квадратуръ, коэффиціенты которой удовлетворяютъ неравенству (25), гдѣ

$$\mu < s - \frac{1}{2},$$

сходится для любой функціи, производная которой (s — 1)-аго порядка удовлетворяетъ условію

$$|f^{(s-1)}(x+h) - f^{(s-1)}(x)| < Mh, \tag{27}$$

гдѣ M есть данное число, не зависящее ни отъ x, ни отъ h.

Замѣчаніе. Теорема допускаетъ дальнѣйшее обобщеніе, если воспользоваться результатами Jackson'a (Approximation by trigonometric sums and polynomials», New York, 1912, Transact. of the americ. mathem. soc., Vol. XIII, nº 4).

Такимъ путемъ можно показать, что *если функція $f(x)$ удовлетворяетъ условію (27), то всякая формула квадратуръ разсматриваемаго типа сходится, коль скоро*

$$\mu < s.$$

Введеніемъ вспомогательной функціи (β) можно получить еще болѣе общіе результаты, напр., установить сходимость всякой формулы механическихъ квадратуръ, коэффиціенты которой удовлетворяютъ неравенству (25), при всякомъ $\mu < s$, коль скоро $(s-2)$-ая производная функціи $f(x)$ подчиняется условію

$$\frac{|f^{(s-2)}(x+2h) - 2f^{(s-2)}(x+h) + f^{(s-2)}(x)|}{h^2} < M, \quad h > 0,$$

или условію

$$f^{(s-2)}(x+h) - f^{(s-2)}(x) = h\,\theta(x, h),$$

гдѣ функція $\theta(x, h)$ такова, что ея полная варіація въ данномъ промежуткѣ не превосходитъ даннаго числа M, не зависящаго отъ h.

Этого можно достигнуть, пользуясь пріемами, указанными въ моемъ Мемуарѣ: «Quelques applications nouvelles de la théorie de fermeture etc.». (Записки Императорской Академіи Наукъ Ф. М. О. VIII с., Т. XXXII, nº 4, 1914).

Однако указанныя незначительныя обобщенія представляются мало инте-

ресными, между тѣмъ какъ разсужденія при этомъ значительно усложняются и теряютъ элементарный характеръ, почему я считаю возможнымъ упомянуть о нихъ лишь мимоходомъ.

13. Единственный частный случай, представляющій практическій интересъ, получится изъ предыдущаго общаго при

$$s = 2.$$

Такимъ путемъ получается слѣдующая теорема:

Формулы квадратуръ, коэффиціенты которыхъ удовлетворяютъ условію

$$(\gamma) \qquad \omega(n) = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \leqq Nn,$$

сходятся для всякой функціи, первая производная которой удовлетворяетъ условію

$$(28) \qquad |f'(x+h) - f'(x)| < Mh.$$

Отсюда слѣдуетъ, что *упомянутыя выше формулы квадратуръ А. А. Маркова сходятся для всякой функціи, обладающей только что указаннымъ свойствомъ (28).*

Замѣчаніе. Полезно отмѣтить, что пріемъ, основанный на разысканіи высшаго предѣла суммы

$$(\delta) \qquad K_n = \sum_{k=1}^{n} |A_k| \, |\rho_p(x)|$$

[см. рав. (10)], которымъ мы пользовались и который привелъ къ полному рѣшенію вопроса для формулъ квадратуръ съ положительными коэффиціентами, не въ состояніи привести къ дальнѣйшимъ существеннымъ обобщеніямъ для случая формулъ квадратуръ, характеризуемыхъ условіемъ (γ).

Такъ, напр. указаннымъ путемъ нельзя установить сходимость формулъ квадратуръ этого типа не только для непрерывныхъ, но даже и для функцій, удовлетворяющихъ условію

$$|f(x+h) - f(x)| < Mh.$$

Для формулъ А. А. Маркова, напр., выраженіе (δ) равно

$$K_n = Ln \, |\rho_p(x)|,$$

гдѣ $|\rho_p(x)|$, напомнимъ, обозначаетъ отклоненіе нѣкотораго полинома степени p отъ функціи $f(x)$.

Но, какъ показано въ моемъ вышеупомянутомъ Мемуарѣ, наименьшее возможное отклоненіе полинома степени p отъ разсматриваемаго типа функціи можетъ оказаться большимъ числа

$$\frac{1}{\pi p \, 2\sqrt{2}}.$$

Поэтому, при $p = n$, всегда имѣетъ мѣсто неравенство

$$K_n > \frac{L}{\pi 2\sqrt{2}},$$

исключающее возможность выбора какого бы то ни было подходящаго полинома такъ, чтобы K_n стремилось къ нулю при возрастаніи n.

14. Почти всѣ извѣстныя формулы квадратуръ исчерпываются, насколько мнѣ извѣстно, двумя разобранными выше случаями, когда

$$\omega(n) \leqq A \quad \text{или} \quad \omega(n) \leqq Nn. \tag{29}$$

Особнякомъ стоитъ извѣстная формула Котеса, пожалуй, наиболѣе употребительная на практикѣ.

Изслѣдованіе сходимости этой формулы представляетъ значительныя трудности, связанныя съ вычисленіемъ соотвѣтствующей ей функціи $\omega(n)$.

Безъ особыхъ затрудненій можно установить лишь слѣдующее неравенство [для промежутка (0,1)]

$$\omega(n) < \lambda \frac{2^n}{n\sqrt{n}}, \tag{30}$$

гдѣ λ есть число, не зависящее отъ n.

Во всякомъ случаѣ функція $\omega(n)$ для формулы Котеса возрастаетъ весьма быстро съ увеличеніемъ числа n, почему естественно ожидать, что сходимость этой формулы можетъ быть установлена лишь для весьма ограниченнаго класса функцій.

Предположимъ, что функція $f(x)$ имѣетъ производныя всѣхъ порядковъ, и назовемъ черезъ M_k maximum модуля $f^{(k)}(x)$ въ промежуткѣ отъ 0 до 1.

Полагая въ формулѣ (10), какъ и раньше,

$$p = n$$

и разумѣя подъ $P_n(x)$ полиномъ (α) §^a 11-аго, можемъ писать, если вспомнимъ теоремы, установленныя нами въ §^axъ 31-омъ и 33-ьемъ мемуара «Sur une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les polynomes de Tchébicheff». (Зап. Импер. Акад. Наукъ Ф. М. О. VIII с., Т. XXXIII, n⁰ 8),

$$|\rho_n(x)| < \tau \frac{M_{n+1}\sqrt{n}}{2^n(n+1)!},$$

гдѣ τ есть число, не зависящее отъ n.

На основаніи этого неравенства и (30) формула (10) даетъ

$$|R_n| < L \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \frac{1}{n}.$$

Отсюда выводимъ теорему:

Формула Котеса сходится для всякой функціи, имѣющей производныя всѣхъ порядковъ, удовлетворяющія условію

(31) $$\frac{|f^{(k)}(x)|}{k!} < N,$$

гдѣ k есть какое угодно цѣлое число, а N есть положительное число, не зависящее отъ k.

Замѣчаніе. Для коэффиціентовъ A_k формулы Котеса Я. В. Успенскій вывелъ асимптотическія выраженія[1], при помощи которыхъ легко установить неравенство

---

[1] Привожу, съ согласія автора, эти выраженія, сообщенныя мнѣ въ письмѣ отъ 16-го января текущаго года.

Для промежутка (0, 1), при $k > 0$ и $< n+1$,

$$A_k = \frac{\Gamma(n+1)}{n(\log n)^2\,\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{k} + \frac{(-1)^{n-k-1}}{n-k}\right).$$

При $k=1$

$$A_1 = \frac{1}{n\log n}.$$

$$(\varepsilon) \qquad \omega(n) < N \frac{2^n}{n\sqrt{n}\,(\log n)^2},$$

гдѣ N есть положительное число, не зависящее отъ n.

Съ другой стороны тѣ-же формулы приводятъ къ заключенію, что, во всякомъ случаѣ, при достаточно большомъ n,

$$(\eta) \qquad \omega(n) > K \frac{2^n}{n^2\sqrt{n}\,(\log n)^2},$$

гдѣ K есть другое число, не зависящее отъ n.

Это неравенство, въ связи съ «замѣчаніемъ» предыдущаго §[a], приводитъ къ заключенію, что замѣна неравенства (30) неравенствомъ (ε) или какимъ либо другимъ болѣе точнымъ не въ состояніи привести къ какимъ нибудь интереснымъ обобщеніямъ условія (31).

Даже для функцій, допускающихъ производныя всѣхъ порядковъ, примѣняемый нами пріемъ можетъ лишь усложнить условіе (31), достаточное для сходимости формулы Котеса, не внося существенныхъ обобщеній.

Послѣднее заключеніе вытекаетъ изъ сопоставленія неравенствъ (ε) и (η) съ неравенствомъ (56) моего Мемуара «Quelques applications nouvelles etc.», (стр. 53, § 35).

15. На основаніи всего сказаннаго изслѣдованіе вопроса о сходимости формулъ механическихъ квадратуръ при помощи употребленной нами методы можно считать исчерпаннымъ, тѣмъ болѣе что въ разсмотрѣнныхъ выше трехъ общихъ группахъ этихъ формулъ [характеризуемыхъ условіями (14), (23), (25) и (30)] заключаются всѣ наиболѣе извѣстныя изъ употребляемыхъ въ настоящее время формулъ квадратуръ.

Всякія другія частныя предположенія, какія можно сдѣлать относительно функціи $\omega(n)$, какъ искусственныя, не могутъ представлять какого либо интереса.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Разложеніе молочной кислоты убитыми дрожжами.

В. И. Палладина и Д. А. Сабинина.

(Доложено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

Нами и Ловчиновской[1] было доказано, что разложеніе молочной кислоты убитыми дрожжами въ присутствіи метиленовой синьки (M) идетъ при участіи редуктазы и карбоксилазы съ образованіемъ углекислоты и уксуснаго алдегида по слѣдующей схемѣ:

1) $CH_3.CH.OH.COOH + M = CH_3.CO.COOH + M.H_2$.
2) $CH_3.CO.COOH = CH_3COH + CO_2$.

Нѣсколькими мѣсяцами позднѣе Гарденъ и Норрисъ[2] также нашли, что дрожжи въ присутствіи метиленовой синьки образуютъ изъ молочной кислоты уксусный алдегидъ.

Задачей настоящаго изслѣдованія было найти условія, при которыхъ молочная кислота давала бы не уксусный алдегидъ, а спиртъ. Тогда возникъ вопросъ, какое же вещество замѣняетъ въ естественныхъ условіяхъ метиленовую синьку во время спиртового броженія при разложеніи молочной кислоты. Конечно, такимъ веществомъ можетъ быть только уксусный алдегидъ. Мы представляемъ схему разложенія молочной кислоты дрожжами съ образованіемъ спирта въ слѣдующемъ видѣ:

1) $CH_3.CH.OH.COOH + CH_3COH = CH_3.CO.COOH + CH_3CH_2OH$.
2) $CH_3.CO.COOH = CO_2 + CH_3COH$.

---

[1] Палладинъ, Сабининъ и Ловчиновская. ИАН. 1915, стр. 701.
[2] Harden and Norris. The biochemical Journal 9, 330, 1915.

Образовавшійся уксусный алдегидъ окисляетъ новыя количества молочной кислоты и т. д. Слѣдовательно, въ присутствіи ничтожнаго количества уксуснаго алдегида можно переработать въ спиртъ неопредѣленно большое количество молочной кислоты. Чтобы провѣрить справедливость высказаннаго мнѣнія, нами вмѣсто продажнаго уксуснаго алдегида была взята пировиноградная кислота, которая, разлагаясь карбоксилазой, даетъ уксусный алдегидъ:

$$1)\ CH_3.CH.OH.COOH + CH_3.CO.COOH = CH_3.CH.OH.COOH + CH_3.COH + CO_2.$$

$$2)\ CH_3.CH.OH.COOH + CH_3.COH + CO_2 = CH_3.CO.COOH + CH_3CH_2OH + CO_2.$$

Мы взяли пировиноградную кислоту по двумъ причинамъ. Она, во-первыхъ, даетъ уксусный алдегидъ in statu nascendi. Во-вторыхъ, Оппенгеймеръ[1] утверждаетъ, что пировиноградная кислота вызываетъ разложеніе молочной кислоты сокомъ дрожжей, хотя приводимыя имъ данныя не подтверждаютъ его мнѣнія.

Предыдущая работа была нами прервана вслѣдствіе отсутствія убитыхъ дрожжей. Благодаря любезности В. Л. Омелянскаго, уступившаго намъ имѣвшійся у него въ лабораторіи небольшой запасъ зимина, мы могли произвести настоящее изслѣдованіе.

Количество выдѣляемой углекислоты опредѣлялось при помощи Петтенкоферовскихъ трубокъ. Количество уксуснаго алдегида опредѣлялось по способу Риппера[2]. Количество спирта опредѣлялось по Никлу. Предварительнаго отдѣленія уксуснаго алдегида не производилось, такъ какъ, какъ показали опыты, количества его были слишкомъ малы по сравненію съ количествами спирта и поэтому его присутствіе не могло оказать вліяніе на опредѣленіе спирта по Никлу. Опыты производились при комнатной температурѣ.

Опытъ 1.

Девять колбъ съ 5 гр. зимина въ каждой. Кромѣ того въ трехъ колбахъ по 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали, и по 25 к. см. воды, въ трехъ колбахъ по 25 к. см. молочной кислоты 2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали и по 25 к. см. воды, въ осталь-

---

[1] Oppenheimer. Zeitschrift f. physiologische Chemie. **93**, 235, 1914.

[2] Костычевъ, ИАН. **1915**, стр. 327.

ныхъ трехъ колбахъ по 25 к. см. молочной кислоты 2% и по 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованныхъ ѣдкимъ кали. Выдѣлилось углекислоты въ мгр.:

	Продолжительность опыта въ часахъ. 18 ч.	24 ч.	60 ч.
1. Пировиноградная кислота	116	174	248
2. Молочная кислота	117	164	219
3. Молочная и пировиноградная кислоты	147	223	325

Отсюда слѣдуетъ, что въ 1 часъ въ среднемъ выдѣлялись слѣдующія количества углекислоты:

Продолжительность опыта въ часахъ.	Пировиноградная кислота.		Молочная кислота.		Молочная и пировиноградная кислоты.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
18	116	6,5	117	6,5	147	8,2
6	58	9,5	47	7,8	76	12,6
36	74	2,0	55	1,5	102	2,8
60	248	—	219	—	325	—

Слѣдовательно прибавленіе небольшого количества пировиноградной кислоты слѣдующимъ образомъ усилило выдѣленіе углекислоты на счетъ молочной кислоты:

18 часовъ . . . . 147 — 117 = 30 (+ 25,6%)
24 часа . . . . 223 — 164 = 59 (+ 36,0%)
60 часовъ . . . . 325 — 219 = 106 (+ 48,4%)

Такъ какъ отъ разложенія пировиноградной кислоты могло выдѣлиться только 25 мгр. углекислоты, то отсюда слѣдуетъ, что остальные 81 мгр. (106 — 25 = 81) углекислоты выдѣлились на счетъ молочной кислоты.

Слѣдовательно, *пировиноградная кислота вызываетъ разложеніе молочной кислоты убитыми дрожжами, хотя и въ болѣе слабой степени, чѣмъ метиленовая синька* въ нашихъ прежнихъ опытахъ.

Этотъ избытокъ углекислоты нельзя относить на счетъ стимулированія пировиноградной кислотой самоброженія, такъ какъ по сравненію съ количествомъ углекислоты, выдѣлившейся на молочной кислотѣ, въ порціяхъ

съ самоброженіемъ въ присутствіи пировиноградной кислоты получился ничтожный избытокъ, почти не превысившій 25 мгр., получаемыхъ отъ разложенія пировиноградной кислоты:

18 часовъ	116 — 117 = 0
24 часа	174 — 164 = 10
60 часовъ	248 — 219 = 29 мгр.

Нужно также отмѣтить, что пировиноградная кислота стимулировала разложеніе молочной кислоты сначала слабо (25,6%). Подъ конецъ же опыта эта стимуляція постепенно усиливалась (48,4%).

Опытъ 2.

Три колбы съ 5 гр. зимина въ каждой. Кромѣ того въ первой колбѣ 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали, и 25 к. см. воды, во второй колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали и 25 к. см. воды, въ третьей колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2% и 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованныхъ ѣдкимъ кали. Во время броженія колбы были плотно замкнуты резиновыми пробками. Черезъ 25 часовъ содержимое всѣхъ трехъ колбъ было отогнано въ охлажденные снѣгомъ пріемники. Качественная реакція на уксусный алдегидъ получилась только въ первой и третьей порціяхъ. Количественное опредѣленіе уксуснаго алдегида дало слѣдующіе результаты:

	Количество уксуснаго алдегида:
1. Пировиноградная кислота	13,5 мгр.
2. Молочная кислота	0 »
3. Молочная и пировиноградная кислоты	11,5 »

Въ третьей порціи, на основаніи количества выдѣленной въ первомъ опытѣ углекислоты, нужно было ожидать образованія 59 мгр. уксуснаго алдегида. Въ дѣйствительности же образовалось только 11,5 мгр., т. е. нѣсколько менѣе, чѣмъ въ первой порціи. Отсюда слѣдуетъ, что *разложеніе молочной кислоты убитыми дрожжами въ присутствіи пировиноградной кислоты идетъ безъ образованія уксуснаго алдегида,* т. е. иначе, чѣмъ въ присутствіи метиленовой синьки.

Опытъ 3.

Двѣ колбы съ 5 гр. зимина въ каждой. Кромѣ того въ первой колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали и 25 к. см. воды, во второй колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2% и 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2% нейтрализованныхъ ѣдкимъ кали. Опытъ продолжался 24 часа. Для разложенія связанной углекислоты по окончаніи опыта въ обѣ колбы было прилито по 10 к. см. 10% сѣрной кислоты. Затѣмъ содержимое колбъ отгонялось и въ отгонѣ опредѣлялось количество спирта по Никлу.

	Углекислота.	Спиртъ.
1. Молочная и пировиноградная кислоты	205 мгр.	167 мгр.
2. Молочная кислота	138 »	143 »
	— 67 мгр.	24 мгр.

$$\frac{C_2H_6O}{CO_2} = \frac{24}{67} = 0,35.$$

Въ виду незначительнаго количества спирта слѣдующій опытъ былъ поставленъ на болѣе продолжительное время и съ большимъ количествомъ зимина.

Опытъ 4.

Три колбы по 7 гр. зимина въ каждой. Кромѣ того въ первой колбѣ 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали и 25 к. см. воды, во второй колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2%, нейтрализованной ѣдкимъ кали и 25 к. см. воды, въ третьей колбѣ 25 к. см. молочной кислоты 2% и 25 к. см. пировиноградной кислоты 0,2%, нейтрализованныхъ ѣдкимъ кали. Опытъ продолжался 62 часа. Опредѣленіе углекислоты и спирта было произведено какъ въ предыдущемъ опытѣ.

	Углекислота.	Спиртъ.
1. Пировиноградная кислота	490 мгр.	476 мгр.
2. Молочная кислота	447 »	445 »
3. Молочная и пировиноградная кислоты	695 »	514 »

Слѣдовательно, третья порція дала слѣдующій избытокъ углекислоты и спирта по сравненію со второй:

Углекислота .... 695 — 447 = 248 мгр.
Спиртъ .... 514 — 445 = 69 »

Если же допустить, что въ третьей порціи пировиноградная кислота вызвала не только разложеніе молочной кислоты, а также стимулировала и самоброженіе, то въ такомъ случаѣ изъ данныхъ третьей порціи нужно вычесть данныя не второй, а первой порціи:

Углекислота . . . . 695 — 490 = 205 мгр.
Спиртъ . . . . 514 — 476 = 38 »

Слѣдовательно, даже допустивши стимуляцію пировиноградной кислотой процесса самоброженія въ присутствіи молочной кислоты, мы видимъ, что *пировиноградная кислота вызываетъ разложеніе молочной кислоты убитыми дрожжами съ образованіемъ спирта и углекислоты.* Но замѣчается рѣзкое уклоненіе отъ нормальнаго спиртового броженія, такъ какъ на большое количество выдѣленной углекислоты получается незначительное количество спирта:

$$1) \quad \frac{C_2H_5OH}{CO_2} = \frac{69}{248} = 0{,}27.$$

$$2) \quad \frac{C_2H_5OH}{CO_2} = \frac{38}{205} = 0{,}18.$$

Чѣмъ же было вызвано такое сильное преобладаніе углекислоты надъ спиртомъ? Изъ органической химіи хорошо извѣстно, что очень рѣдко реакціи идутъ вполнѣ согласно съ теоретическимъ уравненіемъ: обыкновенно главная реакція сопровождается болѣе или менѣе значительнымъ количествомъ побочныхъ реакцій. Точно также всѣ изучаемыя нами химическія реакціи, производимыя убитыми организмами, обыкновенно отличаются болѣе или менѣе значительно отъ такихъ же реакцій, идущихъ въ живыхъ организмахъ тѣмъ, что сопровождаются различными побочными реакціями, отсутствующими въ живыхъ организмахъ. По всѣмъ вѣроятіямъ и въ изслѣдованномъ нами случаѣ разложенія молочной кислоты въ присутствіи пировиноградной побочныя реакціи частью заслонили, а частью и измѣнили главную реакцію разложенія молочной кислоты на спиртъ и углекислоту согласно теоретическому уравненію. Возможно, что одной изъ такихъ побочныхъ реакцій была Канниццаровская реакція, очень распространенная въ убитыхъ растеніяхъ и животныхъ. Происходитъ ли она и въ живыхъ организмахъ, — неизвѣстно. Одна эта реакція могла уменьшить выходъ спирта вдвое. Можетъ быть также, что часть молочной кислоты разлагалась съ выдѣленіемъ углекислоты безъ образованія алдегида. Наконецъ возможно, что избытокъ углекислоты получился отъ дальнѣйшаго окисленія

уксуснаго алдегида. Для рѣшенія этихъ вопросовъ нужны дальнѣйшія изслѣдованія.

Нужно имѣть въ виду, что не одна пировиноградная кислота стимулируетъ спиртовое броженіе, а также и нѣкоторыя другія органическія кислоты [1]. Такъ какъ каталитическое дѣйствіе кислотъ зависитъ не только отъ ихъ водородныхъ іоновъ, но и недиссоціированныя кислоты также вызываютъ каталитическое дѣйствіе [2], то возможно, что пировиноградная кислота производила не только отнятіе водорода, образующимися изъ нея уксуснымъ алдегидомъ отъ молочной кислоты, но вызывала еще какое-то иное каталитическое дѣйствіе.

Избытокъ углекислоты надъ спиртомъ обычное явленіе во время анаэробнаго дыханія сѣменныхъ растеній. Нужно надѣяться, что нѣкоторые изъ такихъ случаевъ удастся разъяснить на основаніи дальнѣйшаго изученія разложенія дрожжами молочной кислоты въ присутствіи пировиноградной.

Спиртъ, найденный въ порціяхъ съ одной молочной кислотой, образовался конечно не изъ послѣдней, а былъ результатомъ самоброженія, такъ какъ контрольный опытъ показалъ, что прибавленіе къ зимину нейтрализованной молочной кислоты почти не увеличивало количества выдѣляемой углекислоты и спирта. Такъ 7 гр. зимина за 62 часа во время самоброженія выдѣлили 400 мгр. углекислоты и образовали 417 мгр. спирта.

Какъ отрицательные результаты опытовъ Бухнера и другихъ изслѣдователей не доказываютъ, что молочная кислота не можетъ быть промежуточнымъ продуктомъ спиртового броженія, такъ точно такъ же и наши положительные результаты — въ виду обнаруженной широкой способности убитыхъ дрожжей разлагать самыя разнообразныя соединенія, завѣдомо никакого отношенія къ спиртовому броженію не имѣющія [3] — не доказываютъ еще окончательно, что молочная кислота является промежуточнымъ продуктомъ спиртового броженія. Нужно еще остановить спиртовое броженіе на стадіи молочной кислоты, чѣмъ мы въ настоящее время и заняты. Во всякомъ случаѣ наши опыты даютъ, во-первыхъ, схему, указывающую, въ какомъ направленіи нужно работать, и, во-вторыхъ, доказываютъ, что спиртъ является не результатомъ распада, а продуктомъ возстановленія

---

[1] C. Neuberg and Czapski. Biochemische Zeitschrift. **67**, 51, 1914. Цитировано по Journal of the chem. Society. May. 1915.

[2] Dawson and Powis. Journal of the chemical Society. **103**, 2135, 1913.

[3] Напримѣръ, на основаніи образованія анилина изъ нитробензола убитыми дрожжами нельзя говорить, что эти вещества нормальные продукты обмѣна веществъ въ дрожжахъ.

уксуснаго алдегида вслѣдствіе отнятія водорода отъ одного изъ промежуточныхъ продуктовъ распада глюкозы.

Изслѣдованія надъ значеніемъ водорода во время спиртового броженія и дыханія внесли полный переворотъ въ наши воззрѣнія на эти процессы. Они показали, что реакціи возстановленія имѣютъ основное значеніе. Отъ нихъ, во-первыхъ, зависятъ анаэробныя окисленія. Во-вторыхъ, онѣ выяснили, что во время образованія промежуточныхъ продуктовъ происходитъ перемѣщеніе внутри молекулы глюкозы не кислорода, какъ думалъ Гоппе-Зейлеръ, а водорода. Въ-третьихъ, одними реакціями распада объяснить химизмъ спиртового броженія и дыханія нельзя, такъ какъ водородъ перемѣщается не только въ предѣлахъ одной молекулы, но также переходитъ отъ одной молекулы къ другой. Слѣдовательно, во время спиртового броженія и дыханія происходитъ взаимодѣйствіе молекулъ между собой.

Ботаническій кабинетъ
Петроградскаго Университета.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Фауна позвоночныхъ въ верхнесарматскихъ отложеніяхъ Ставропольской губерніи.

А. П. Иванова.

(Представлено въ засѣданіи Физико-Математическаго Отдѣленія 20 января 1916 г.).

Лѣтомъ прошлаго 1915 года, одинъ изъ моихъ помощниковъ по геологическому изслѣдованію Ставропольской губерніи — А. А. Иванчинъ-Писаревъ сообщилъ мнѣ, что онъ нашелъ въ верхне-сарматскихъ пескахъ горы Куцаї, близъ села Петровскаго много различныхъ костей. Прибывъ въ сентябрѣ прошлаго года въ городъ Ставрополь, я сейчасъ же осмотрѣлъ сборы А. А. Иванчина-Писарева и убѣдился, что его находка представляетъ значительный интересъ, такъ какъ среди массы (около 1 пуда) цѣльныхъ и обломковъ костей легко опредѣлились не менѣе 10 родовъ млекопитающихъ, рептилій и рыбъ костистыхъ и ганоидныхъ. Хотя общій составъ сбора соотвѣтственно своимъ условіямъ залеганія указывалъ на преобладаніе водныхъ животныхъ, но присутствіе наземныхъ млекопитающихъ значительно повышаетъ цѣнность открытой А. А. Иванчинъ-Писаревымъ фауны.

Въ сопровожденіи А. А. Иванчинъ-Писарева черезъ нѣсколько дней я отправился на гору Куцай и убѣдился въ правильности опредѣленія имъ условія залеганія найденныхъ костей. Дѣйствительно, вершина горы Куцай, какъ и всѣ верхи въ окрестностяхъ села Петровскаго, сложена сверху известковыми рыхлыми песчаниками, а внизу сыпучими бѣлыми кварцевыми песками, общей мощности 8 — 12 м., съ массою (мѣстами) *Mactra caspia*.

Въ нижней части песковъ проходятъ прослойки сѣрой песчанистой глины, содержащія также *Mactra caspia* Eichw. Песчаный комплексъ верхняго сармата подстилается мощной толщей песчанистыхъ и вязкихъ темныхъ глинъ съ обильной фауной средняго сармата (*Cardium Fittoni* Orb., *C. obsoletum* Eichw., *Mactra ponderosa* Eichw.). Въ описываемомъ обнаженіи отсутствуютъ столь характерные для верхняго сармата Ставрополь-

ской губерніи слои красныхъ прѣсноводныхъ мергелей съ *Planorbis banaticus* и *Paludina*, которые встрѣчались мною и моими сотрудниками почти во всѣхъ обнаженіяхъ верхняго сармата отъ села Константиновки на западѣ до села Бурлацкаго на востокѣ. Всего въ 1 — $1^1/_2$ верстѣ къ *S* отъ Куцая толща прѣсноводныхъ мергелей съ *Planorbis* и *Paladina*, мощностью до 4 м., уже наблюдается. Въ указанномъ пунктѣ горы Куцай прѣсноводныя отложенія выражены, повидимому, песками и, можетъ быть, прослойками глинъ, какъ это наблюдалось мною напримѣръ въ селѣ Константиновкѣ, гдѣ мергелей около 1 м. и недостаточно различимыя крупныя *Unio* встрѣчаются здѣсь въ тонкихъ прослойкахъ вязкихъ глинъ, прорѣзающихъ толщу 3 — 4 м. песковъ, лежащихъ ниже мергелей съ *Planorbis*. Вообще же *Mactra caspia* Eichw. и *Mactra crassicollis* Sinz. встрѣчаются въ ставропольскомъ верхнемъ сарматѣ и совмѣстно съ прѣсноводными моллюсками, и даже въ типичныхъ прѣсноводныхъ мергеляхъ, напримѣръ въ Крутой Балкѣ около села Высоцкаго я находилъ *Mactra caspia* вмѣстѣ съ *Planorbis*'ами. Въ обнаженіяхъ горы Куцая однако прѣсноводныхъ моллюсковъ ни въ пескахъ, ни въ глинахъ не найдено; замѣчу, однако, что особаго усердія къ отысканію прѣсноводныхъ моллюсковъ здѣсь нами и не прилагалось.

Кости *Phoca* и другихъ водныхъ животныхъ залегаютъ на Куцаѣ несомнѣнно въ нижнихъ 2 — 3 м. песковъ и глинъ верхняго сармата, обломки же костей крупныхъ наземныхъ млекопитающихъ лежатъ несомнѣнно нѣсколько выше, но все же въ нижнихъ 3—5 м. песчано-глинистой толщи; такое, по крайней мѣрѣ, получилось впечатлѣніе при поверхностномъ изслѣдованіи, безъ расчистки этого сыпучаго песчанаго обнаженія. Главная масса костей нами собрана у основанія песковъ въ осыпи, на поверхности глинистыхъ прослоекъ. по всюду, гдѣ представлялось возможнымъ нѣсколькими ударами ручной лопаты обнаружить коренное залеганіе, мы всегда находили *in situ* нѣсколько экземпляровъ костей.

Совмѣстная моя поѣздка съ А. А. Иванчинъ-Писаревымъ значительно расширила составъ фауны въ сторону наземныхъ млекопитающихъ, служившихъ главнымъ предметомъ моихъ поисковъ, но все же, хотя, какъ видно изъ нижеслѣдующаго списка, найденная безъ раскопокъ и всего за одинъ день фауна оказалась довольно богатой, ожиданія найти хоть части черепа или даже челюсти не оправдались. Соотвѣтственно съ характеромъ отложеній, — морскіе сыпучіе среднезернистые кварцевые пески съ прослойками крупнозернистыхъ (зерна до 2 — 3 мм.) — и трудно ожидать хорошаго сохраненія скелетовъ наземныхъ животныхъ. Для сужденія о петрографическомъ генезисѣ верхне-сарматскихъ песковъ этого обнаженія, весьма

интересны слѣдующія, найденныя мною экзотическія находки: три окремнелыхъ обломка брюшной створки *Spirifer* sp., одинъ изъ группы *fasciger*, 2 окремнелыхъ, почти полныхъ, одиночныхъ коралла (*Bothrophyllum?*), одинъ экземпляръ *Syringopora* и нѣсколько десятковъ кремней величиной до 5 с. м. Вѣроятнѣе всего, конечно, искать родины этихъ каменноугольныхъ валуновъ въ области сѣвернаго побережья Маныча, т. е. въ связи съ найденными здѣсь А. Богачевымъ слѣдами каменноугольныхъ отложеній.

Только на дняхъ, въ концѣ декабря, получены мною изъ Ставрополя ящики съ куцайскими костями.

Предварительный списокъ найденныхъ костей таковъ:

1. *Hipparion gracile* Kaup. нѣсколько верхнихъ и нижнихъ *m*.
2. *Hipparion* sp. одинъ неполный m_n.
3. *Rhinoceros* sp. одинъ зубъ, m_n.
4. *Aceratherium* sp. 2 зуба m_n.
5. *Listriodon* (*non splendens* Meyer) обломокъ нижняго *C*.
6. *Gazella?* — фаланга и *astragalus*.
7. Крупное парнопалое — *astragalus*, *calconeum*, фаланга.
8. *Sus?* sp., одинъ обломокъ *pm*.
9. *Phoca aff. pontica* (нѣсколько меньше *P. pontica*), по нѣскольку десятковъ почти всѣхъ характерныхъ костей, но только 7 обломковъ нижнихъ челюстей съ 2 — 5 зубами.
10. *Cetotherium priscum* Brand. — 3 *humerus'a*, нѣсколько позвонковъ и 3 *ossa tymnani*.
11. *Cetotherium?* sp., 3 большихъ 6 с. т. *ossa tymnani* и нѣсколько позвонковъ съ діаметромъ почти 6 см.
12. *Aves* — нѣсколько шейныхъ позвонковъ и костей конечностей.
13. *Reptilia* — нѣсколько мелкихъ позвонковъ.
14. Черепаха — много обломковъ щитовъ, главнымъ образомъ нижняго, очень толстаго (до 10 мм.).
15. *Acipenseridae* — большое количество очень крупныхъ, до 15 с. м., толстыхъ кожныхъ чушей и костей.
16. *Chrysophrys* sp. — къ видамъ этого рода несомнѣнно относятся многочисленные тупоконическіе, слегка загнутые, круглые выпуклые и овальные плоскіе съ круговымъ валикомъ снизу черные зубы, во множествѣ находящіеся въ пескахъ куцайскаго обнаженія. Нѣсколько найденныхъ костей черепа повидимому также относятся сюда.
17. *Pisces* — мелкіе, острые тонкоконическіе черные зубы.

Вышеприведенный предварительный списокъ несомнѣнно значительно расширится, если обратить специальное вниманіе на поиски фауны позвоночныхъ въ верхне-сарматскихъ отложеніяхъ Ставропольской губерніи, обнаженія которыхъ геологически изучены нами въ нѣсколькихъ десяткахъ пунктовъ. Кости водныхъ млекопитающихъ нерѣдки и въ болѣе низкихъ горизонтахъ (среднемъ и нижнемъ) сармата Ставропольской губерніи, какъ и во многихъ другихъ частяхъ южной Россіи, но остатки ганоидныхъ рыбъ и *Chrysophrys* повидимому довольно рѣдки. Стоитъ отмѣтить, что круглые зубы *Chrysophrys* находились мною въ фитоніевыхъ известнякахъ окрестности Ставрополя, а въ нижней части средняго сармата, въ тощихъ глинахъ у села Татарки мною были найдены въ 1914 году очень крупныя, до 5 см. чешуи, повидимому относящіяся къ тому же роду, по нижеслѣдующему основанію: А. А. Иванчинъ-Писаревъ нашелъ въ нижней части тощихъ глинъ средняго сармата, на 30 — 40 м. ниже подошвы песковъ съ *Mactra caspia* большое количество огромныхъ, до 10 с. м. діаметръ и 4 мм. толщиной, чешуй и другихъ крупныхъ рыбьихъ костей, среди которыхъ М. Г. Тереховъ разыскалъ при тщательной препаровкѣ обломки небныхъ костей съ сидящими на нихъ мелкими круглыми зубами *Chrysophrys*. Присутствіе нѣсколькихъ характерныхъ представителей пикермійской фауны въ верхнемъ сарматѣ восточной половины Ставропольской губерніи конечно не требуетъ особаго подчеркиванія; этотъ районъ является самымъ восточнымъ изъ русскихъ пикермійскихъ мѣсторожденій. Описанный Н. Хоменко[1] обломокъ челюсти *Hipparion* sp. изъ села Бурлацкаго Ставропольской губерніи несомнѣнно происходитъ также изъ верхне-сарматскихъ известковистыхъ песчаниковъ, такъ какъ известково-песчаныхъ отложеній средняго сармата у села Бурлацкаго и выше и ниже по рѣкѣ Тумузловкѣ, нѣтъ: пески и песчанистые известняки съ *Mactra caspia* и *Mactra crassicollis* лежатъ здѣсь на сильно размытыхъ темныхъ глинахъ съ *Cryptomactra pes anseris*.

Москва, 14 января 1916 г.

---

[1] Труды Ставропольскаго О-ва для изученія сѣверо-кавказскаго края. Т. III, вып. 1. 1913 г.

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ въ январѣ 1916 года).

1) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin....... VI Série). 1916. № 1, 15 января. Стр. 1—56. Съ 4 табл. 1916. lex. 8°.— 1615 экз.

2) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія (Bulletin....... VI Série). 1916. № 2, 1 февраля. Стр. 57—98. Съ 2 табл. 1916. lex. 8°.— 1615 экз.

3) **Записки И. А. Н.** по Физико-Математическому Отдѣленію. (Mémoires...... VIII Série. Classe Physico-Mathématique). Томъ XXVIII, № 9. Научные результаты экспедиціи братьевъ Кузнецовыхъ на Полярный Уралъ въ 1909 г., подъ начальствомъ О. О. Баклунда. Вып. 9. (Résultats scientifiques de l'Expédition des frères Kuznecov (Kouznetzov) à l'Oural Arctique en 1909, sous la direction de H. Backlund. Livr. 9). N. Annandale. Description of a freshwater sponge from the North-West of Siberia (I + 3 стр.). 1915. 4°.—800 экз. Цѣна 25 коп.; 25 cop.

4) **Труды Радіевой Экспедиціи Императорской Академіи Наукъ.** № 4. А. Гинзбергъ. Къ петрографіи Закавказья. (По матеріаламъ Г. І. Касперовича. Съ приложеніемъ списка минераловъ, составленнаго А. Е. Ферсманомъ) (I + 30 стр. + 1 табл.). 1915. lex. 8°.— 115 экз.
Цѣна 40 коп.; 40 cop.

5) **Труды Радіевой Экспедиціи Императорской Академіи Наукъ.** № 6. Н. Орловъ. Къ вопросу о нахожденіи радіоактивныхъ веществъ въ шлихахъ золотоносныхъ областей Сибири (II + 52 стр.). 1915. lex. 8°.—415 экз.
Цѣна 70 коп.; 70 cop.

6) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 2. Что сдѣлано въ Россіи въ 1915 году по культурѣ лекарственныхъ растеній. В. Л. Комарова (I + 12 стр.). 1916. 8°. — 2015 экз.

Цѣна 10 коп.; 10 cop.

7) **Отчеты о дѣятельности Комиссіи по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи** состоящей при Императорской Академіи Наукъ. № 1 (I + 21 стр.). 1915. lex. 8°. — 515 экз. Въ продажу не поступаетъ.

8) **Христіанскій Востокъ.** Годъ 4-й. 1915. Серія, посвященная изученію христіанской культуры народовъ Азіи и Африки. Томъ IV, выпускъ II (стр. 141—228 + табл. I — X). 1915. lex. 8°. — 515 экз.

Цѣна 1 руб. 35 коп.; 1 rbl. 35 cop.

9) **Сборникъ Музея Антропологіи и Этнографіи** при Императорской Академіи Наукъ. Томъ II, 4. (Publications du Musée d'Anthropologie et d'Ethnographie de l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd. Volume II, 4). Систематическое иллюстрированное описаніе коллекціи уродовъ Музея Антропологіи и Этнографіи имени Императора Петра Великаго при Императорской Академіи Наукъ. Выпускъ III. Сросшіеся грудной клѣткой. — Thoracopagi. Составилъ Д-ръ мед. К. З. Яцута (III + 105—152 стр., изъ нихъ 12 табл. рис.). 1915. lex. 8°. — 415 экз. Цѣна 1 руб.: 1 rbl.

10) **Словарь Русскаго языка**, составленный Вторымъ Отдѣленіемъ Императорской Академіи Наукъ. Пятаго тома выпускъ первый. Л. — Лёгкій (VI + I + столб. 1—320). 1915. б. 8°. — 6015 + 50 вел. экз. Цѣна 75 коп.

11) **Извѣстія Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ 1915 г.** Тома XX-го книжка 4-я (VII + 329 стр.). 1916. 8°. — 815 экз. Цѣна 1 руб. 50 коп.

12) **Каталогъ изданій Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ.** Февраль 1916 г. (25 стр.). 1916. 8°. — 315 экз.

Въ продажу не поступаетъ.

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.

Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Февраль 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 4.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

1 МАРТА.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

1 MARS.

ПЕТРОГРАДЪ.—PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ, — семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей.

§ 7.

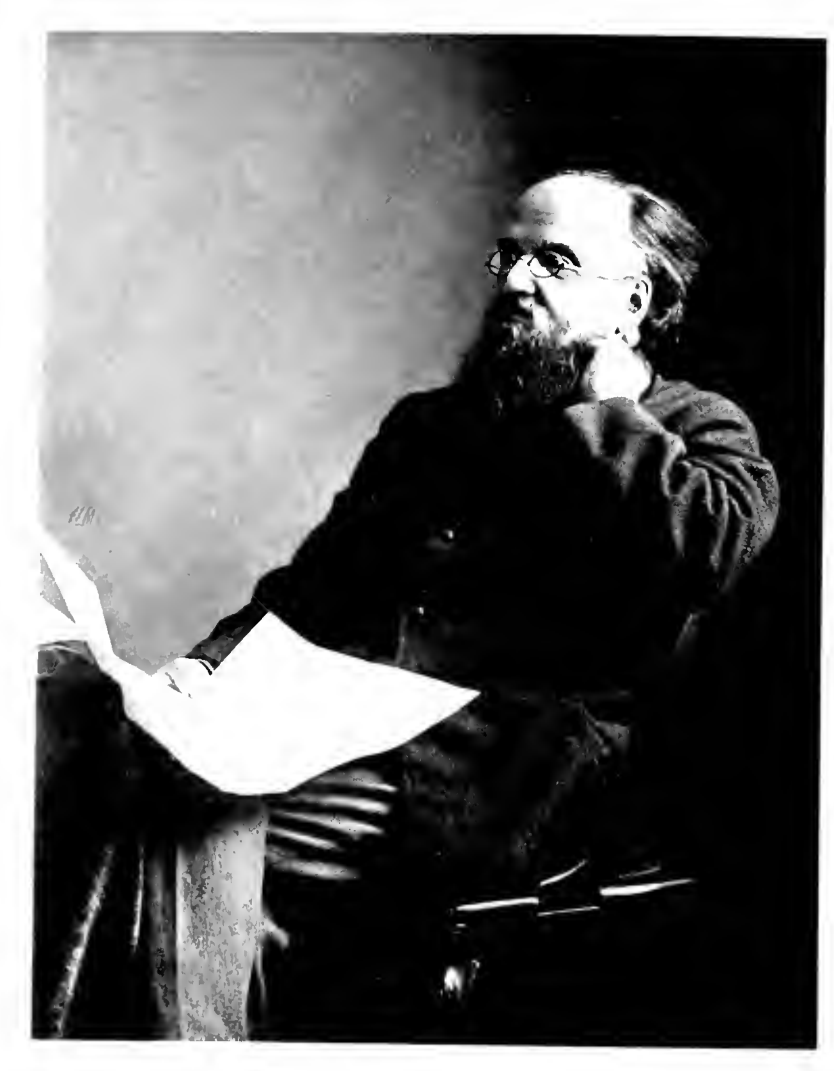
„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.



Ф ТОТИПІЯ И ТИП. А. Ф. ДРЕ ЛЕРА

А. И. ВОЕЙКОВЪ.

Съ фотографіи Boissonas et Eggle

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Александръ Ивановичъ Воейковъ.

Некрологъ.

(Читанъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 3 февраля 1916 года академикомъ **М. А. Рыкачевымъ**).

28 января скончался корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, Александръ Ивановичъ Воейковъ. Въ лицѣ Александра Ивановича утрачена крупная научная сила. Изъ современныхъ ученыхъ весьма и весьма немногіе могутъ стать въ уровень съ Александромъ Ивановичемъ по отношенію къ тому, что сдѣлано имъ въ области метеорологіи и въ особенности — климатологіи.

Покойный принадлежалъ къ древнему роду потомственныхъ дворянъ; родился въ Москвѣ 8 мая 1842 года. Отецъ Александра Ивановича, Иванъ Ѳедоровичъ, былъ военнымъ, участвовалъ въ кампаніяхъ отечественной войны, былъ раненъ въ Ферь-Шампенуазѣ; скоро вышелъ въ отставку, проживалъ въ деревнѣ. Мать Александра Ивановича была Варвара Дмитріевна, урожденная Мертваго. Родители Александра Ивановича скончались, когда ему было 5 лѣтъ. Онъ воспитывался въ семьѣ дяди своего Дмитрія Дмитріевича Мертваго, помѣщика Московской губерніи, проживавшаго въ подмосковномъ имѣніи. Тамъ же Александръ Ивановичъ провелъ дѣтство.

Въ 1860 году онъ поступилъ на физико-математическій факультетъ Петроградскаго Университета. По случаю студенческихъ волненій ему пришлось въ слѣдующемъ году покинуть Университетъ и оканчивать образованіе за границею; въ 1865 году онъ получилъ въ Геттингенскомъ Университетѣ степень доктора философіи.

Въ 1880 году онъ былъ избранъ почетнымъ докторомъ физической географіи Императорскаго Московскаго Университета. Въ 1882 году поступилъ приватъ-доцентомъ въ Петроградскій университетъ, а съ 1887 состоялъ ординарнымъ и съ 1912-го заслуженнымъ профессоромъ того же университета. Корреспондентомъ Императорской Академіи Наукъ онъ избранъ въ 1910 году.

Ко времени возвращенія Александра Ивановича въ Россію въ 1866 году, Главная Физическая Обсерваторія была переведена въ вѣдѣніе Императорской Академіи Наукъ; директоромъ ея на мѣсто скончавшагося основателя Обсерваторіи Купфера былъ избранъ маститый метеорологъ Кемцъ, заставшій Обсерваторію, вслѣдствіе полнаго отсутствія у Купфера интеллигентныхъ помощниковъ, въ отчаянномъ состояніи; на первыхъ же порахъ потребовался помощникъ; на эту должность, пока не штатную, былъ приглашенъ А. И. Воейковъ; было условлено въ какой день онъ долженъ былъ явиться, но оказалось, что въ это время онъ уже отправился въ одно изъ своихъ путешествій, позабывъ, вѣроятно, по свойственной ему разсѣянности, предупредить объ отказѣ на сдѣланное ему предложеніе. Этотъ характерный эпизодъ отчасти опредѣляетъ и его дальнѣйшую дѣятельность въ ближайшіе годы. Дѣйствительно, Александръ Ивановичъ Воейковъ былъ прирожденный любитель путешествій, предпочитавшій созерцать и изучать природу непосредственно, а не только по книгамъ; ему не по душѣ была бы замкнутая кабинетная работа, притомъ въ значительной степени административная. А. И. Воейковъ обладалъ всѣми дарами природы и подготовкою, чтобы сдѣлаться идеальнымъ путешественникомъ, какимъ онъ себя и заявилъ. Владѣя свободно, помимо русскаго, языками французскимъ, нѣмецкимъ, англійскимъ и испанскимъ, съ которымъ онъ успѣлъ познакомиться во время путешествія по Южной Америкѣ, хорошо знакомый съ современнымъ состояніемъ науки по избранной имъ спеціальности — онъ чувствовалъ себя какъ дома въ интеллигентныхъ кругахъ всѣхъ странъ земного шара. Его способность ограничивать свои потребности до крайности и переносить неудобства пути — дозволяла ему посѣщать и трудно доступныя мѣстности, а его проникновенная наблюдательность, схватывающая все, что представляютъ интереснаго и новаго происходящія явленія, въ связи съ замѣчательною памятью, давала ему возможность выносить изъ путешествій цѣнный багажъ для науки. Свою любовь къ путешествіямъ Александръ Ивановичъ проявилъ съ юныхъ лѣтъ; 15—16-ти лѣтъ онъ путешествовалъ по Западной Европѣ и въ Малой Азіи. Во время послѣдующихъ путешествій онъ посѣтилъ почти всѣ страны Стараго и Новаго Свѣта, исколесивъ Европейскую

Россію, неоднократно посѣщалъ Кавказъ, Туркестанъ и другія наши окраины; большое число путешествій было посвящено Западной Европѣ; подробно были имъ обслѣдованы Галиція, Буковина, Румынія, Венгрія и Трансильванія. Изъ большихъ и болѣе продолжительныхъ путешествій упомянемъ о его трехлѣтнемъ путешествіи по Сѣверной и Южной Америкѣ съ 1873 до 1875 года и, затѣмъ о путешествіяхъ въ Индію, на островъ Яву и въ Японію, совершенныхъ въ послѣдующіе 2 года.

Возвращаясь изъ путешествій, Александръ Ивановичъ дѣлился своими впечатлѣніями и добытыми результатами съ любителями географіи и метеорологіи, его доклады, живой разсказъ о путешествіи, простое и ясное изложеніе добытыхъ результатовъ — привлекали многочисленныхъ слушателей въ Географическое Общество, въ которомъ онъ главнымъ образомъ работалъ. Послѣ каждаго путешествія матеріалъ обрабатывался и былъ обнародованъ. Всѣ свои путешествія Александръ Ивановичъ предпринималъ почти исключительно на свои средства; для этой цѣли онъ не задумался затратить все свое состояніе — такъ что послѣдніе годы онъ жилъ исключительно на свой заработокъ.

Научная дѣятельность Александра Ивановича посвящена была весьма разнообразнымъ вопросамъ метеорологіи какъ общаго характера, такъ и болѣе спеціальнаго, и въ особенности — климатологіи. Въ 1910 году я представилъ Академіи, насколько возможно, полный списокъ трудовъ Александра Ивановича, занявшій 12 страницъ большого формата и заключающій въ себѣ до 460 названій трудовъ и статей, изданныхъ А. И. Воейковымъ въ Россіи и за границей, на русскомъ, французскомъ, нѣмецкомъ и англійскомъ языкахъ, съ 1865 до 1910 года. Къ этому списку за послѣднія 5 лѣтъ прибавилось еще нѣсколько десятковъ статей. Сюда не вошли нѣсколько сотенъ мелкихъ статей, замѣтокъ и краткихъ рецензій, печатавшихся въ Метеорологическомъ Вѣстникѣ подъ рубриками: «Мелкія статьи» и «Обзоръ литературы». Александръ Ивановичъ имѣлъ даръ обобщать наблюдаемыя явленія, давать свое освѣщеніе накопленному наукою матеріалу и излагать свои выводы просто, ясно и доступно для широкихъ круговъ; поэтому его труды не только двигаютъ науку, но и способствуютъ ея популяризаціи.

Изъ большихъ и наиболѣе важныхъ трудовъ его, болѣе общаго характера, назовемъ: «Климаты земного шара, въ особенности Россіи» — отдѣльное изданіе 1884 года, въ 640 стр. съ 24 таблицами; «Die atmosphaerische Circulation. Verbreitung des Luftdruckes der Winde und der Regen auf der Oberfläche der Erde», Petermanns Mitteilungen 1874 (Циркуляція атмосферы. Распредѣленіе вѣтровъ и дождей на земной поверхности);

«Discussion and analysis of Professor Coffin's tables and charts of the winds of the Globe»[1].

Изъ большого ряда трудовъ, посвященныхъ климату отдѣльныхъ мѣстностей, упомянемъ о «Климатѣ Полѣсья», напечатанномъ въ приложеніи къ очерку работъ западной экспедиціи по осушенію болотъ въ теченіе 1873—1898 гг. Александръ Ивановичъ принималъ дѣятельное участіе въ разработкѣ программы работъ, организованныхъ экспедиціею по изслѣдованію климата этого края, а по истеченіи двадцатипятилѣтія далъ и научные результаты, имѣющіе важное значеніе и для практическихъ цѣлей. Трудъ изданъ въ 1899, а передъ смертью Александръ Ивановичъ былъ усиленно занятъ вторымъ, значительно пополненнымъ изданіемъ этого труда по порученію Отдѣла Земельныхъ Улучшеній. Книга должна была выйти въ февралѣ текущаго года.

Не мало вниманія удѣлялъ Александръ Ивановичъ Туркестану, неоднократно имъ посѣщенному и которому онъ посвятилъ нѣсколько трудовъ. Онъ былъ однимъ изъ инипіаторовъ, возбудившихъ интересъ къ развитію хлопководства въ этомъ краѣ. Въ 1912 г., когда вопросъ этотъ стоялъ остро по случаю встрѣтившихся затрудненій получать этотъ матеріалъ изъ Америки, Александръ Ивановичъ по соглашенію съ Хлопковымъ Комитетомъ и съ Главнымъ Управленіемъ Землеустройства и Земледѣлія совершилъ $4^1/_2$ мѣсячное путешествіе по Туркестану главнымъ образомъ съ цѣлью изслѣдованія на мѣстѣ этого вопроса. Результатомъ явился изданный Хлопковымъ Комитетомъ докладъ, въ которомъ всесторонне изложены условія успѣха въ этомъ дѣлѣ. Другимъ результатомъ этой поѣздки явился въ 1914 г. на французскомъ языкѣ обширный трудъ Александра Ивановича «Le Turkestan Russe», съ текстомъ въ 360 страницъ, иллюстрированный картами и превосходными фотографіями, характеризующими рельефъ мѣстности, растительность, архитектуру древнихъ памятниковъ, типы обитателей и проч. Трудъ даетъ въ краткомъ популярномъ изложеніи полный географическій очеркъ страны.

Большое число статей посвящено климатамъ разныхъ мѣстностей Россіи и другихъ странъ, въ томъ числѣ многія относятся и къ климату лѣчебныхъ мѣстъ. Въ статьѣ «Климатъ Кисловодска въ зимнее полугодіе и

---

[1] Этотъ послѣдній трудъ составляетъ текстъ книги: Coffin, Winds of the Globe, Washingtoп Эта важная для науки и практики работа была предпринята Смитсоніевымъ Институтомъ совмѣстно съ Кофиномъ, который скончался, когда вычисленія цифровыхъ таблицъ не были закончены. Институтъ, воспользовавшись пребываніемъ Александра Ивановича въ Соединенныхъ Штатахъ, предложилъ ему закончить работу и написать весь текстъ.

сравненіе его съ другими климатическими мѣстами» Александръ Ивановичъ убѣдительно доказываетъ, что въ климатическомъ отношеніи Кисловодскъ не уступаетъ наиболѣе популярнымъ заграничнымъ курортамъ.

По другимъ отдѣламъ, много статей посвящено примѣненію метеорологіи къ сельскому хозяйству.

Рядъ статей относится къ болѣе общимъ вопросамъ, какъ напримѣръ объ измѣненіи и колебаніяхъ климата земного шара, о вліяніи климата на человѣка и человѣка на климатъ.

Чтобы дать понятіе о разнообразіи предметовъ, которыми занимался Александръ Ивановичъ, я привожу въ дополненіе къ изложенному указаніе на еще нѣсколько его трудовъ:

Измѣненіе уровня Волги и Каспійскаго моря. 1871.

Путешествія: по центральной Америкѣ, по Индіи, кругомъ свѣта. 1875—1876.

Климатъ области муссоновъ Восточной Азіи. 1879.

Объ акклиматизаціи чайнаго дерева и бамбука въ Закавказьѣ. 1883.

О нѣкоторыхъ условіяхъ распредѣленія тепла въ океанахъ и ихъ отношеніи къ термостатикѣ земного шара. 1883.

Чередованіе теплыхъ и холодныхъ зимъ. 1891.

Вулканическое извергеніе на Антильскихъ островахъ и его значеніе для метеорологіи. 1902.

Будетъ ли Тихій океанъ главнымъ торговымъ путемъ земного шара. 1904.

Климатическія условія ледниковъ и ледяныхъ покрововъ сѣвернаго полушарія настоящихъ и прошедшихъ. 1909.

Опьяняющіе напитки, ихъ свойства и географическое распространеніе. 1910.

Горные и степные суховѣи. 1912.

Круговоротъ водяныхъ паровъ и соленостей морей. 1911.

Морскіе береговые бризы. 1914.

Какъ убѣжденный вегетаріанецъ, Александръ Ивановичъ написалъ и по этому предмету нѣсколько статей.

Охватывая въ совокупности всѣ труды Александра Ивановича, намъ представляется, что тѣ изъ нихъ, которые посвящены другимъ странамъ или общимъ вопросамъ по физической географіи, по метеорологіи и по климатологіи составляютъ фонъ для указанія того мѣста, которое на немъ занимаетъ Россія.

Особенно велика заслуга Александра Ивановича въ тѣхъ трудахъ,

которые двинули впередъ метеорологическія изслѣдованія Россіи; сюда относится его дѣятельность по изслѣдованію грозъ и количества выпадающихъ осадковъ и въ особенности по настойчиво и систематично проведеннымъ имъ наблюденіямъ надъ снѣговымъ покровомъ.

Въ 1870 году Александръ Ивановичъ издалъ въ I томѣ «Метеорологическаго сборника» Академіи Наукъ свой трудъ «О распредѣленіи дождей въ Россіи», предпринятый имъ именно съ цѣлью — обратить вниманіе на важное значеніе этихъ изслѣдованій; онъ указываетъ на крайній недостатокъ дождемѣрныхъ станцій, лишающій возможности отвѣчать на многіе вопросы, важные не только въ научномъ, но и въ практическомъ отношеніи, какъ напримѣръ — о вліяніи лѣсовъ на осадки и др. Несмотря на скудный матеріалъ автору удалось подмѣтить связь распредѣленія осадковъ съ характеромъ растительности, съ распредѣленіемъ вѣтровъ и прочее. Въ заключеніе своей работы авторъ указываетъ на тѣ мѣстности, въ которыхъ особенно желательно имѣть болѣе густую сѣть правильно дѣйствующихъ дождемѣрныхъ станцій. «Если это будетъ сдѣлано», говоритъ Александръ Ивановичъ, «лѣтъ черезъ 10 можно приняться за ту же работу, но уже дать точные законы вмѣсто гипотезъ».

Какъ бы идя навстрѣчу этимъ пожеланіямъ, въ это время Императорское Русское Географическое Общество было озабочено учрежденіемъ центральнаго метеорологическаго комитета, который долженъ находиться въ постоянныхъ сношеніяхъ съ наблюдателями, снабжать ихъ приборами и инструкціями и давать общее направленіе всей работѣ по изслѣдованію Россіи въ метеорологическомъ отношеніи — въ дополненіе къ тому, что дѣлается Главною Физическою Обсерваторіею.

Въ Географическое Общество А. И. Воейковъ поступилъ тотчасъ по возвращеніи изъ-за границы послѣ окончанія университетскаго образованія, а именно 19-го января 1866 года; съ тѣхъ поръ онъ состоялъ однимъ изъ самыхъ дѣятельныхъ его членовъ; неоднократно онъ былъ избираемъ въ члены Совѣта, а въ послѣдніе годы состоялъ почетнымъ членомъ Общества.

Въ организаціи метеорологической комиссіи А. И. Воейковъ принималъ самое живое участіе; ему было поручено во время его заграничной поѣздки — войти въ сношеніе съ метеорологическими Обществами и учрежденіями для обмѣна изданіями и вообще для установленія связи съ упомянутою комиссіею, которая была окончательно организована въ 1870 году.

Особое вниманіе комиссіи было обращено на организацію густой сѣти наблюденій надъ осадками и грозами. По возвращеніи изъ-за границы А. И. Воейковъ написалъ популярную статью о важности этихъ наблюденій,

которая была напечатана во многихъ газетахъ. Имъ же обработаны и первыя наблюденія вновь организованной сѣти. Результаты изданы въ его статьѣ «Осадки и грозы съ декабря 1870 по ноябрь 1871 года», помѣщенной въ VI томѣ Записокъ Географическаго Общества. Въ этомъ же томѣ помѣщена статья его «Распредѣленіе осадковъ въ Россіи», основанная на болѣе обильномъ матеріалѣ.

Предпринятый Александромъ Ивановичемъ рядъ заграничныхъ путешествій отвлекъ на нѣсколько лѣтъ его вниманіе отъ Комиссіи. Налаженныя метеорологическія наблюденія, поступавшія въ Общество, передавались въ Главную Физическую Обсерваторію. Въ 1883 году Метеорологическая Комиссія была преобразована. Предсѣдателемъ новой и съ этого времени постоянной комиссіи, въ ея новомъ составѣ, единогласно избранъ А. И. Воейковъ, который и оставался на этомъ посту до своей смерти. Дѣятельность этой новой комиссіи, благодаря ея энергичному и неутомимому предсѣдателю, умѣвшему привлекать сотрудниковъ, образовала фактически какъ бы новое отдѣленіе Общества, съ своимъ органомъ «Метеорологическій Вѣстникъ», хотя номинально комиссія числится при Отдѣленіи Физической Географіи. По инициативѣ предсѣдателя особое вниманіе комиссіи было обращено на примѣненіе метеорологіи къ сельскому хозяйству, — были выработаны и разосланы наблюдателямъ соотвѣтственныя инструкціи въ дополненіе къ общимъ метеорологическимъ. Произведенныя по этимъ инструкціямъ наблюденія собирались въ комиссіи, обрабатывались и издавались А. И. Воейковымъ ежегодно съ 1885 до 1893 года. Впослѣдствіи этими изслѣдованіями занялось Главное Управленіе Землеустройства и Земледѣлія, учредившее для этой цѣли особое Бюро.

Въ связи съ сельскохозяйственною метеорологіею Александръ Ивановичъ поднялъ вопросъ о необходимости систематическихъ изслѣдованій снѣгового покрова.

Еще въ 1871 году въ статьѣ «Вліяніе снѣговой поверхности на климатъ» онъ указывалъ на важное значеніе снѣгового покрова для науки, для сельскаго хозяйства и проч.; горячо призывалъ къ организаціи соотвѣтственныхъ наблюденій; но только съ образованіемъ новой комиссіи ему удалось провести это дѣло.

Въ замѣчательной статьѣ «Снѣжный покровъ, его вліяніе на климатъ и погоду и способы изслѣдованія», вышедшей въ 1885 году и во второмъ изданіи въ 1889 году, Александръ Ивановичъ убѣдительно и исчерпывающимъ образомъ доказываетъ — какое вліяніе снѣговой покровъ оказываетъ на температуру почвы и воздуха, на весеннія наводки, на сельское хозяйство

и на пути сообщенія. Изслѣдованія снѣжнаго покрова дали бы возможность предусматривать нѣкоторыя выдающіяся явленія, какъ напримѣръ — наступленіе высокихъ половодій. Авторъ указываетъ на необходимость систематическихъ наблюденій надъ высотою покрова и надъ плотностью его въ дополненіе къ другимъ характернымъ явленіямъ относительно начала залеганія, таянія, структуры снѣга и проч.

Статью свою авторъ заканчиваетъ словами: «Въ томъ видѣ, какъ я его ставлю, вопросъ этотъ—государственный въ полномъ смыслѣ слова и я убѣжденъ, что придетъ время, когда онъ и будетъ признанъ таковымъ, но пока этого нѣтъ, — возможно кое-что сдѣлать и въ болѣе скромныхъ размѣрахъ».

Предвидѣнное время — признанія изслѣдованій снѣгового покрова имѣющимъ государственное значеніе — до нѣкоторой степени можно считать наступившимъ; но для этого еще много пришлось потрудиться какъ самому автору, такъ и предсѣдательствуемой имъ комиссіи. Замѣчаніе «пока нѣтъ этого, все же возможно кое-что сдѣлать» было залогомъ, что цѣль будетъ достигнута.

Статья А. И. Воейкова послужила основаніемъ комиссіи для выработки инструкціи, которая и была разослана наблюдателямъ. Первыя наблюденія поступили въ комиссію за зиму 1888 — 1889; матеріалъ этотъ былъ обработанъ и изданъ Александромъ Ивановичемъ въ 1890 году. Съ осени 1890 года снѣгомѣрныя наблюденія были введены и въ сѣти Главной Физической Обсерваторіи, вмѣстѣ съ тѣмъ обезпечено дальнѣйшее развитіе этихъ изслѣдованій.

Отличительною чертою Александра Ивановича, какъ предсѣдателя комиссіи, было поощреніе всякой частной иниціативы и стремленіе вызывать интересъ къ метеорологіи, чему много способствовали популярные труды и чтенія предсѣдателя, затѣмъ оживленныя, открытыя для публики, бесѣды въ комиссіи, частыя личныя общенія Александра Ивановича съ сельскими хозяевами и въ особенности съ наблюдателями.

Въ 1889 году, во время VIII съѣзда естествоиспытателей и врачей, на засѣданіи комиссіи, привлекшей многолюдное собраніе любителей метеорологіи, возникъ вопросъ о созданіи особаго органа метеорологіи, въ которомъ бы печатались ученыя работы, популярныя статьи, рецензіи и рефераты и обзоръ погоды. Тутъ же нашлись лица, изъявившія готовность принять участіе въ журналѣ и оказать матеріальную поддержку на предварительные расходы. Такимъ образомъ былъ основанъ Метеорологическій Вѣстникъ, который съ 1890 года выходитъ ежемѣсячно подъ редакціей особаго комитета, въ составъ котораго вошелъ и Александръ Ивановичъ;

сотоварищи его смѣнялись, но онъ оставался безъ смѣны до смерти своей. Журналъ этотъ является органомъ метеорологической комиссіи. За всѣ 26 лѣтъ существованія журнала — самый богатый и цѣнный научный матеріалъ для него поставлялъ Александръ Ивановичъ.

Относительно профессорской дѣятельности Александра Ивановича я ограничусь указаніемъ на его курсы метеорологіи, выдержавшіе нѣсколько изданій.

Война вызвала двѣ статьи Александра Ивановича: «Климатъ царства Польскаго, Галиціи, Буковины, Сѣверной Венгріи, Чехіи, Моравіи и восточныхъ областей Пруссіи» и «Пушечная пальба и дожди». Первая изъ нихъ помѣщена въ январьской книжкѣ Метеорологическаго Вѣстника 1915 г.: въ ней для района военныхъ дѣйствій и для сосѣднихъ областей, къ югу и западу — куда авторъ надѣялся наши войска вскорѣ достигнуть — дается орографія мѣстности, режимъ рѣкъ, климатическій очеркъ, съ краткою сводною таблицею данныхъ по температурѣ, осадкамъ за каждый мѣсяцъ и за годъ. На сколько подобныя справочныя свѣдѣнія полезны для военныхъ цѣлей видно изъ того, что военное вѣдомство обратилось къ Главной Физической Обсерваторіи съ просьбой издать климатическія данныя всѣхъ областей, входящихъ въ сферу военныхъ дѣйствій; эта работа энергично производится Обсерваторіею помѣсячно, конечно въ болѣе полномъ видѣ, чѣмъ это было возможно одному лицу и сразу за 12 мѣсяцевъ.

Въ былое время, въ особенности въ началѣ научной дѣятельности Александра Ивановича въ русской наукѣ, какъ и въ Россіи вообще, существовали партіи, нѣмецкая и русская. Вліяніе той и другой въ Географическомъ Обществѣ сказалось между прочимъ въ томъ, что издаваемый имъ въ Дерптѣ на нѣмецкомъ языкѣ «Repertorium für Meteorologie» былъ замѣненъ учрежденіемъ Метеорологической Комиссіи, обзаведшейся своимъ органомъ «Метеорологическимъ Вѣстникомъ», издающимся на русскомъ языкѣ и, конечно, не въ Дерптѣ, а въ Петроградѣ. Александръ Ивановичъ былъ всегда поборникомъ русской партіи.

Все изложенное уже отчасти характеризуетъ личность Александра Ивановича, какъ человѣка. Онъ былъ въ высокой степени симпатиченъ. Это была открытая душа, широкая русская натура, развившаяся въ хорошую сторону. Онъ отличался добрымъ, отзывчивымъ сердцемъ; отчаянное положеніе бѣженцевъ изъ разореннаго жестокимъ врагомъ края затронуло Александра Ивановича до глубины души, какъ это видно изъ того факта, что въ найденныхъ послѣ его смерти записяхъ отмѣчена выдача на помощь бѣженцамъ, въ разное время съ августа по январь, въ общемъ итогѣ до

3500 рублей. Съ особымъ участіемъ онъ относился къ молодежи, всячески старался ей помочь, въ особенности въ предпринимаемыхъ научныхъ работахъ.

Всѣ, знавшіе Александра Ивановича отъ всего сердца пожалѣютъ о нашей тяжкой утратѣ. До послѣдняго времени Александръ Ивановичъ былъ еще бодръ и продолжалъ во всей силѣ свою творческую научную дѣятельность. Многія работы были имъ начаты или задуманы. Послѣдній его выходъ изъ дома былъ для сдачи корректуры, послѣ инфлуэнцы, отъ которой онъ еще не оправился; этотъ шагъ былъ роковымъ, послѣдовало воспаленіе легкихъ, приведшее къ печальному концу.

Почтимте память выдающагося ученаго и хорошаго человѣка.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ДОКЛАДЫ О НАУЧНЫХЪ ТРУДАХЪ.

С. Ѳ. Дмитріевъ. Къ циклу развитія *Phyllachora Podagrariae* (Roth) Fuckel и *Septoria Chelidonii* Desm. (S. F. Dmitriev. Sur le cycle évolutif de *Phyllachora Podagrariae* (Roth) Fuckel et *Septoria Chelidonii* Desm.).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Исходя изъ стромы съ зачатками перитецієвъ *Phyllachora Podagrariae* Fuckel, авторъ получилъ весною на перезимовавшихъ листьяхъ какъ пикниды съ стилоспорами, такъ и зрѣлые перитеціи съ сумками. По наблюденіямъ автора въ циклъ развитія названнаго гриба входятъ слѣдующія формы: 1) *Septoria Podagrariae* Lasch; 2) склероціи; 3) *Phyllosticta Aegopodii* Curt.; 4) *Septoriella Podagrariae* Dmitr. n. f.; 5) *Euryachora Podagrariae* Dmitr. n. comb. Послѣдняя, сумчатая, форма развивается въ крайне маломъ количествѣ.

У другого наблюдавшагося авторомъ гриба — *Septoria Chelidonii* Desm. — съ осени залагаются склероціи, превращающіеся весною снова въ пикниды со стилоспорами. Такимъ образомъ, этотъ грибъ совершенно утратилъ способность къ образованію сумчатой формы.

На микротомныхъ окрашенныхъ срѣзахъ авторъ прослѣдилъ стадіи развитія изъ склероціевъ весеннихъ пикнидъ у обоихъ грибовъ.

Къ статьѣ приложена 1 таблица (6 рисунковъ).

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» Императорской Академіи Наукъ.

В. Ч. Дорогостайскій. Матеріалы для карцинологической фауны оз. Байкала. (V. Č. Dorogostajskij. Contribution à la faune carcinologique du lac Baïkal).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г. академикомъ **В. Н. Насоновымъ**).

Лѣтомъ 1915 года мною были изучены рядъ мѣстностей въ южной части озера Байкала въ отношеніи ихъ водной фауны. Наибольшій инте-

ресъ представила фауна части Байкала, прилегающей къ дельтѣ рѣки Селенги, гдѣ было найдено хотя и небольшое количество видовъ, но весьма интересныхъ въ томъ отношеніи, что на нихъ весьма опредѣленно сказалось вліяніе среды. Здѣсь-же была открыта одна новая форма гаммарида изъ рода *Axelboecnia*, указывающая на родство байкальскаго вида *Axelboecnia carpenteri* съ каспійскимъ *Boecnia spinosa*. Особый интересъ представляетъ фауна лагунъ озера Байкала («соровъ»), которая весьма отлична отъ фауны открытыхъ водъ озера, хотя нѣкоторыя формы изъ Байкала и проникаютъ въ «соры». Относительно миграціи байкальскихъ видовъ въ тѣни было добыто нѣсколько новыхъ фактовъ: такъ къ единственному виду гаммаридъ— *Brandtia fasciata*—который, по Дыбовскому, заходитъ въ рѣки, слѣдуетъ прибавить еще два вновь открытыхъ. Въ противуположность фаунѣ дельты Селенги, въ животномъ населеніи другихъ посѣщенныхъ мѣстъ Байкала, никакихъ особенныхъ уклоненій въ организаціи животныхъ мною замѣчено не было и здѣсь различіе условій существованія сказалось лишь въ составѣ фауны. Всего много собрано и зарисовано въ краскахъ болѣе 120 видовъ гаммаридъ, среди которыхъ много новыхъ. Пока обработана группа такъ называемыхъ вооруженныхъ гаммаридъ. Изъ 43 представителей этой группы — 12 оказались новыми. Особенно поражаютъ оригинальностью строенія и живостью окраски новые виды: *Brochyuropus nassonowi* n. sp., *Axelboecnia patanini* n. sp., *Parapallasea wosnessenskii* n. sp. и *Acanthogammarus rodionowi* n. sp.

Положено напечатать въ «Запискахъ Физико-Математическаго Отдѣленія» Императорской Академіи Наукъ.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Освобожденіе экспедиціи Вилькицкаго отъ льдовъ въ связи съ синоптическимъ характеромъ зимы и лѣта 1915 года.

Кн. Б. Б. Голицына.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 3 февраля 1916 г.).

Весною 1915 года Морское Вѣдомство приступило къ снаряженію вспомогательной экспедиціи для зимовавшей на судахъ «Вайгачъ» и «Таймыръ» Гидрографической Экспедиціи Сѣвернаго Ледовитаго океана и къ тому же времени въ Обсерваторіи былъ законченъ физикомъ синоптическаго отдѣленія Обсерваторіи Б. П. Мультановскимъ синоптическій анализъ зимы 1914—15 г. и составлено предсказаніе о районахъ большихъ половодій на рѣкахъ Европейской Россіи и Сибири — между прочимъ и въ бассейнахъ Лены и Енисея. Обѣ серіи работъ, произведенныхъ въ Обсерваторіи, выяснили положеніе и напряженность части полярнаго центра дѣйствія атмосферы, подъ непосредственнымъ воздѣйствіемъ которой находилась въ теченіе всей зимы Гидрографическая Экспедиція.

Въ виду интереса, возбуждаемаго этою Экспедиціею, представлялось весьма желательнымъ сдѣлать попытку опредѣленія, хотя-бы въ общихъ чертахъ, ожидаемыхъ лѣтомъ 1915 г. условій погоды въ районѣ устья Енисея-Таймыръ и учесть время поступленія вешней воды въ Карское море. Въ Обсерваторіи была предпринята попытка къ изслѣдованію въ этомъ направленіи съ примѣненіемъ выработанныхъ — въ зависимости отъ центровъ дѣйствія атмосферы — типовъ погоды и опредѣленіемъ вѣроятнаго направленія дрейфа подъ вліяніемъ этихъ типовъ.

Съ соображеніями, вытекавшими изъ этихъ изслѣдованій Мультановскаго, былъ подробно и заблаговременно ознакомленъ *въ апрѣлѣ 1915 г.*

завѣдующій Гидро-Метеорологическою Частью Главнаго Гидрографическаго Управленія Л. Л. Брейтфусъ, которому было поручено снаряженіе вспомогательной экспедиціи. Соображенія эти въ краткихъ чертахъ таковы.

Синоптическія предположенія. Зима 1914—15 г. характеризовалась многократными и сильными воздѣйствіями полярнаго центра дѣйствія атмосферы и надлежало прежде всего опредѣлить географическое положеніе послѣдняго. Въ области, включающей бассейны Мезени, Вычегды, Камы и большей части Оби, въ теченіе зимы не наблюдались центры отрицательныхъ отклоненій барометра отъ нормы. Эта область дѣлится меридіаномъ 60° Ost Gr. на двѣ части: восточная соотвѣтствуетъ такъ называемому нижне-Обскому максимуму, западная — воздѣйствіямъ полярнаго центра, идущимъ отъ Шпицбергена и болѣе активнымъ, чѣмъ нижне-Обскій максимумъ.

Отобравъ наиболѣе рѣзкія отрицательныя отклоненія барометра отъ нормы (по періодамъ) въ теченіе всей зимы и нанеся ихъ на карту, было замѣчено, что они располагались въ эту зиму приблизительно по 55° N по всей Европѣ. Отсюда слѣдуетъ заключить, принявъ во вниманіе обычныя разстоянія, что центры соотвѣтствующихъ имъ положительныхъ отклоненій располагаются около 80° N и по предыдущему около 60° Ost Gr, т. е. вблизи земли Франца-Іосифа.

Затѣмъ изъ картъ зимнихъ періодовъ были отобраны тѣ, которыя дѣйствительно показали внѣдреніе областей положительныхъ отклоненій съ сѣвера (изолиніи открыты съ сѣвера), на нихъ прочерчены линіи гребней (срединныя линіи) и продолжены къ сѣверу до 80° N. Тѣ періоды, въ которыхъ линіи гребней легли восточнѣе 60° Ost Gr, отнесены къ типу нижне-Обскаго максимума, остальные — ко второй группѣ. Группы эти составились изъ 6 періодовъ каждая, сумма дней въ первой 29, а во второй — 27 и къ нимъ же относятся еще 25 дней менѣе рѣзко выраженныхъ періодовъ тѣхъ же группъ — всего 81 день.

Исходными точками для дальнѣйшаго послужили слѣдующія положенія: 1) упорныя и сильныя полярныя воздѣйствія, наблюдавшіяся въ теченіе всей зимы, не могутъ закончиться сразу и слѣдуетъ ожидать, что онѣ скажутся весною и лѣтомъ (весна и лѣто — среднихъ широтъ); 2) ожидаемыя большія половодія на опредѣленныхъ рѣкахъ Европейской Россіи и Восточной Сибири потребуютъ для своего осуществленія совершенно опредѣленныхъ синоптическихъ условій.

Такимъ образомъ слѣдовало попытаться представить себѣ синоптическія положенія, при которыхъ 1) наступило бы рѣзкое тепло на Ленѣ и

Енисеѣ при условіи, 2) что распадъ зимней положительной аномаліи у земли Франца-Іосифа будетъ идти замедленнымъ темпомъ.

Отдавая себѣ вполнѣ отчетъ, что природа располагаетъ многими способами для осуществленія какого-нибудь эпизода, можно было предположить слѣдующую картину, удовлетворяющую указаннымъ двумъ условіямъ, а именно: центръ положительныхъ зимнихъ аномалій смѣщенъ на Таймыръ, по Европѣ идетъ подтокъ теплаго океаническаго воздуха и наблюдаются прорывы къ сѣверу частныхъ минимумовъ западнѣе Чернаго моря и западнѣе Байкала.

Область пониженнаго давленія у Англіи необходимо удержать, чтобы получить согласную теплую тягу съ океана.

Такъ какъ этотъ Англійскій циклонъ въ теченіе зимы былъ такъ-же постояненъ, какъ и центръ повышеннаго давленія у земли Франца-Іосифа, то съ нимъ связано: 1) развитіе дрейфоваго теченія къ сѣверу вдоль береговъ Норвегіи и соотвѣтствующее увеличеніе контрдрейфовъ съ востока (вѣроятно южнѣе Шпицбергена) и сѣверовостока (западнѣе Исландіи) и 2) въ тепломъ сезонѣ надо было ожидать положенія области положительныхъ отклоненій барометра приблизительно по 80° N, между Шпицбергеномъ и Гренландіею.

Такое положеніе привело бы къ тому, что двойственный по своимъ проявленіямъ центръ зимнихъ положительныхъ аномалій у земли Франца-Іосифа распадется на свои составныя части: одна передвинется на Таймыръ, а другая на полярное Гренландское теченіе, т. е. изъ положенія, въ общемъ напоминающаго пассивный полярный максимумъ, мы переходимъ къ положеніямъ активнаго полярнаго сѣверозападнаго положенія и при осуществленіи его слѣдовало ожидать возврата холодовъ между прочимъ и въ районѣ буйнаго таянія снѣговъ на Ленѣ и Енисеѣ.

Для удержанія максимума на Гренландскомъ полярномъ теченіи необходимо существованіе стаціонарной области низкаго давленія приблизительно на землѣ Франца-Іосифа, прохожденіе ряда частныхъ минимумовъ съ сѣверо-запада мимо Шпицбергена и наличіе вторичной циклонической области въ Европейской Россіи. Комбинація этихъ циклоническихъ областей должна вызвать дрейфъ вдоль береговъ Карскаго моря въ направленіи къ сѣверо-востоку, т. е. отъ устьевъ Оби и Енисея къ Таймыру.

Таковы были бы два основныхъ типа, оба теплые въ интересующемъ насъ районѣ, которыхъ можно было ожидать лѣтомъ 1915 г.

Дальнѣйшей стадіи расхожденія центровъ зимнихъ положительныхъ отклоненій барометра отъ нормы ожидать было трудно, такъ какъ замѣ-

чено, что типы погоды въ теченіе отдѣльныхъ сезоновъ имѣютъ стремленіе колебаться въ сравнительно узкихъ предѣлахъ, что и придаетъ опредѣленную характеристику данному сезону (инерція типовъ погоды). Но если бы и наступила эта дальнѣйшая стадія, то выразиться она могла лишь какъ смѣшанный типъ съ большими полярными воздѣйствіями, что не мѣняло бы условій дрейфа теплой воды въ Карскомъ морѣ.

Если бы имѣлись подъ рукою многолѣтнія наблюденія надъ высокими половодьями Лены и Енисея, то можно было бы довольно точно опредѣлить моментъ начала перелома на рѣзкое тепло. Въ концѣ же марта 1915 года пришлось сдѣлать недостаточно обоснованное (на основаніи всего 2 графиковъ подъема воды у Витима и Киренска въ 1899 и 1900 гг.) предположеніе, что такой переломъ надо ожидать въ первой половинѣ мая стараго стиля, тогда какъ онъ осуществился въ тотъ же срокъ, но по новому стилю— ошибка въ двѣ недѣли.

Гидрологическія данныя. Анализъ зимы давалъ возможность ожидать накопленія снѣга въ районѣ нижняго Енисея и нижняго теченія нижней Тунгузки, который долженъ былъ стаять при первомъ же переломѣ на тепло, растопившемъ и верховые снѣга на Енисеѣ. Такимъ образомъ, вскрытіе устья Енисея шло-бы за счетъ низового залеганія снѣга, а главная масса талой воды съ верховьевъ и верхнихъ притоковъ попадала бы въ очищенный ото льда и подогрѣтый первою порціею Енисейскій заливъ.

Въ концѣ іюня 1877 года Нуммелинъ съ трудомъ отсидѣлся на крышѣ зимовья въ устьѣ Енисея при прохожденіи волны половодья. Весною этого года было — какъ и въ 1915 году — большое половодье на Днѣпрѣ и эти аналогіи показываютъ близкое синоптическое сходство зимъ 77 и 15 гг. (по условіямъ залеганія покрова) и послѣдующихъ теплыхъ періодовъ (условія таянія)[1]. Допустимо предположить, что и лѣтнія условія должны были оказаться близкими. А условія лѣта 1877 года были таковы, что позволили выполнить «Утренней Зарѣ» свое историческое плаваніе изъ устьевъ Енисея (21, VIII), черезъ Карскія ворота (30, VIII), Варде (11, IX), Христіанію (31, X), Мотала (20, XI), въ Петроградъ (3, XII). Шхуна эта, передѣланная изъ рѣчной баржи, имѣла размѣры 56 фут. длины, 14 фут. ширины, 6 фут. высоты (Nordenskiold, Voyage de la «Vega» etc. I, p. 279).

Согласіе выводовъ, полученныхъ изъ разсмотрѣнія синоптическихъ и

---

[1] Синоптическій анализъ зимы 77 г. былъ намѣченъ, но отложенъ изъ-за другихъ работъ.

гидрологическихъ положенiй, давало надежду, что зимовавшiя суда экспедицiи Вилькицкаго и «Эклипсъ» получатъ возможность освободиться лѣтомъ 1915 года и позволяло предполагать, что это освобожденiе совершится сравнительно рано.

Въ настоящее время извѣстно, что навигацiя около западнаго берега Таймырскаго полуострова дѣйствительно началась сравнительно рано: взламыванiе годового льда въ мѣстѣ зимовки барка «Эклипсъ» у Сибирскаго материка подъ 92° Ost Gr. началось 5/18 iюля 1915 года, а на мѣстѣ зимовки транспортовъ «Вайгачъ» и «Таймыръ» — нѣсколько позже, причемъ всѣ три судна освободились ото льда и вышли въ море 29 iюля стараго стиля (11 августа). Обращаетъ на себя вниманiе и доступность острова Уединенiя въ эту навигацiю.

Эта первая и притомъ въ общемъ вполнѣ удачная попытка примѣненiя новыхъ методовъ предвидѣнiя ожидаемой погоды, разработанныхъ на основанiи накопившагося обширнаго наблюдательнаго матерiала въ синоптическомъ Отдѣленiи Обсерваторiи подъ руководствомъ Б. П. Мультановскаго и основы которой были приведены выше, заслуживаетъ быть отмѣченной.

По поводу изложеннаго завѣдующiй Гидро-Метеорологической Частью Главнаго Гидрографическаго Управленiя Морского Министерства Л. Л. Брейтфусъ мнѣ между прочимъ пишетъ:

«Приступая весною минувшаго года къ снаряженiю экспедицiи въ помощь Гидрографической Экспедицiи Сѣвернаго Ледовитаго океана, какъ извѣстно зазимовавшей на судахъ «Таймыръ» и «Вайгачъ» около западнаго берега Таймырскаго полуострова, Морскому Вѣдомству приходилось принимать совершенно особыя мѣры въ виду крайне суровыхъ условiй на Сибирскомъ сѣверѣ въ теченiе зимы 1914/1915 года, дававшихъ мало надеждъ на освобожденiе этихъ судовъ. Пришлось организовать отправку угля къ острову Диксонъ не только черезъ Красноярскъ и черезъ Карское море, но также послать на берегъ Сѣвернаго Ледовитаго океана большую партiю оленей съ жизненными припасами.

Между тѣмъ, какъ показала дѣйствительность, навигацiя около западнаго берега Таймырскаго полуострова началась сравнительно рано: взламыванiе годового льда въ мѣстѣ зимовки судна «Эклипсъ» (у Сибирскаго материка въ 92 долготѣ, восточной отъ Гринвича) началась 5/18 iюля 1915 года, а далѣе къ востоку, въ мѣстѣ зимовки транспортовъ «Таймыръ» и «Вайгачъ», — нѣсколько позже, причемъ всѣ три судна освободились отъ льда и вышли въ море 29 iюля (11 августа).

Въ связи съ этимъ явленіемъ работы, которыя, какъ мнѣ извѣстно, ведутся у Васъ въ Обсерваторіи въ Синоптическомъ Отдѣленіи, пріобрѣтаютъ огромное значеніе: я имѣю въ виду работы по выработкѣ типовъ погоды въ полярныхъ широтахъ въ связи съ центрами дѣйствія атмосферы и попытки приложить эти типы къ предвидѣнію барическихъ измѣненій на продолжительный срокъ, а также и изслѣдованія другого важнаго фактора условій навигаціи въ Полярномъ океанѣ — талой воды, поступающей изъ Сибирскихъ рѣкъ, и именно: учетъ ожидаемаго поступленія ея.

Эти обѣ серіи изысканій, съ которыми меня еще въ апрѣлѣ минувшаго года познакомилъ завѣдующій Синоптическимъ Отдѣленіемъ г. Мультановскій, давали надежду на хорошія условія навигаціи и своевременное, еще лѣтомъ, освобожденіе зазимовавшихъ судовъ.

Въ виду столь хорошаго совпаденія предсказаній съ получившими оправданіе благопріятными гидро-метеорологическими условіями во всемъ обширномъ районѣ Карскаго моря (между прочимъ и доступность острова Уединенія), я позволяю себѣ обратить Ваше вниманіе на эти факты и горячо рекомендовать продолжать упомянутыя выше изысканія, которыя могутъ явиться весьма цѣнными, какъ для науки, такъ и для практической жизни.

Гидро-метеорологическія наблюденія, производившіяся въ 1914 и 1915 годахъ на зимовавшемъ въ Карскомъ морѣ суднѣ «Эклипсъ», нынѣ закончены обработкою и будутъ въ непродолжительномъ времени доставлены Вамъ въ печатномъ видѣ».

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Sur la théorie de fermeture.

Par W. Stekloff (V. Steklov).

(Présenté à l'Académie le 20 Janvier [2 Février] 1916).

1. Je vais exposer, dans cette Note, une méthode nouvelle de la démonstration d'un théorème, fondamental dans la théorie de fermeture.

Cette méthode, mettant en évidence une connexion intime entre divers problèmes, permet de les résoudre simultanément d'une manière uniforme et, ce qui est particulièrement important, tout à fait élémentaire et si simple qu'elle ne laisse rien à désirer.

Parmi les problèmes différents, dont nous venons de parler, nous rappellerons le problème de représentation approchée des fonctions continues à l'aide des polynomes, le problème du développement des fonctions en séries procédant suivant les fonctions données formant un système orthogonal, divers problèmes qui se rattachent à la théorie du calcul approché des intégrales définies et, enfin, ceux qui se rattachent à la théorie de fermeture.

En me reservant d'étudier certains des problèmes, que je viens d'indiquer, dans une autre Note, je me bornerai ici par une question de la théorie de fermeture.

2. Soit $f(x)$ une fonction, continue avec ces dérivées de deux premiers ordres dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Remplaçant

$$x \quad \text{par} \quad \cos\varphi, \quad (0 \leq \varphi \leq \pi)$$

posons, pour simplifier l'écriture,

$$f(\cos\varphi) = \Phi(\varphi).$$

Formons la somme

$$\sum_n [\Phi(\varphi)] = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k\varphi,$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\psi)\, d\psi,$$

$$a_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\psi) \cos k\psi \, d\psi \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

et n désigne un entier quelconque.

Il est évident que

$$\sum_n [\Phi(\varphi)] = \frac{\Phi(\varphi)}{\pi},$$

si

$$\Phi(\psi) = \Phi(\varphi).$$

On peut donc écrire

$$(1) \quad \Phi(\varphi) - \sum_n [\Phi(\varphi)] = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \Big(\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)\Big)\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi \cos k\psi\right) d\psi.$$

En tenant compte de la formule presqu'évidente

$$1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi \cos k\psi = \frac{\cos n\varphi \cos(n+1)\psi - \cos(n+1)\varphi \cos n\psi}{\cos\varphi - \cos\psi}$$

et faisant

$$F(\varphi, \psi) = \frac{\Phi(\varphi) - \Phi(\psi)}{\cos\varphi - \cos\psi},$$

on obtient, en vertu de (1),

$$(2) \qquad \Phi(\varphi) - \sum_n [\Phi(\varphi)] = b_{n+1} \cos n\varphi - b_n \cos(n+1)\varphi\,[1],$$

où, en général,

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(\varphi, \psi) \cos k\psi \, d\psi.$$

En remarquant que

$$b_k = -\frac{1}{\pi k} \int_0^\pi \frac{\partial F(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \sin k\psi \, d\psi,$$

on en tire

$$|b_k| < \frac{1}{k} \int_0^\pi \left| \frac{\partial F(\varphi, \psi)}{\partial \psi} \right| d\psi.$$

Si l'on remplace

$$\cos\varphi \quad \text{par } x \quad \text{et} \quad \cos\psi \quad \text{par } y,$$

on obtient

$$(3) \qquad |b_k| < \frac{1}{k} \int_{-1}^{+1} \left| \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \right| dy,$$

où l'on a posé

$$F(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}.$$

---

[1] On peut considérer cette formule comme une transformation d'un cas particulier de la formule générale

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k \varphi_k(x) = \frac{1}{Q_n} \int_a^b p(x) \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \psi_n(x, y) \, dy,$$

où

$$\psi_n(x, y) = \varphi_n(x)\, \varphi_{n+1}(y) - \varphi_{n+1}(x)\, \varphi_n(x),$$

$\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ étant les polynomes de Tchébychef, mais nous avons préféré à dessein une voie directe et tout à fait élémentaire pour rendre les raisonnements compréhensibles pour tout lecteur n'ayant que les connaissances des notions premières du Calcul infinitésimal.

En remarquant que

$$(4) \qquad \left| \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \right| < \frac{M_2}{2},$$

M_2 désignant le maximum de

$$| f''(x) |$$

dans l'intervalle (—1, +1), on trouve, en tenant compte de (3) et (4),

$$| b_k | < \frac{M_2}{k}.$$

Moyennant cette inégalité on trouve, en ayant égard à (2),

$$(5) \qquad \left| \Phi(\varphi) - \sum_n \left[\Phi(\varphi)\right] \right| = | f(x) - P_n(x) | < 2\frac{M_2}{n},$$

où $P_n(x)$ *désigne, évidemment, un polynome en* x *de degré* n.

3. Désignons par

$$\varphi(x)$$

une fonction quelconque, assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle (—1, +1), et formons la fonction

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{h^2} \int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} \varphi(z)\, dz,$$

h étant une constante positive.

Choisissons le nombre arbitraire h de façon qu'on ait

$$(7) \qquad | \varphi(x+\delta) - \varphi(x) | < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad \delta \leqq 2h,$$

ε désignant un nombre positif donné à l'avance, ce qui est toujours possible d'après l'hypothèse faite au sujet de la fonction $\varphi(x)$.

Dans ce cas on tire aisément de (6)

$$(8) \qquad | f(x) - \varphi(x) | < \frac{\varepsilon}{2},$$

quelle que soit la valeur de x dans l'intervalle (—1, +1).

D'autre part, la fonction $f(x)$ définie par la formule (6) admet la dérivée seconde

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\varphi(x+2h) - 2\varphi(x+h) + \varphi(x)\right),$$

d'où, en vertu de (7),

$$|f''(x)| < 2\frac{\varepsilon}{h^2}.$$

4. Appliquons maintenant l'inégalité (5) à la fonction $f(x)$ définie par l'équation (6).

En y faisant

$$M_2 = 2\frac{\varepsilon}{h^2},$$

on trouve

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{4\varepsilon}{h^2 n}.$$

Quels que soient les nombres h et ε, choisis de la manière indiquée plus haut, on peut toujours trouver un entier n_0 tel qu'on ait

$$|f(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0.$$

Cette inégalité et celle de (8) conduisent tout de suite à la suivante

(9) $$|\varphi(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0.$$

Cette inégalité subsiste pour toute fonction $\varphi(x)$ assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Elle fournit, remarquons en passant, l'une des démonstrations le plus simples du théorème qui porte aujourd'hui le nom du théorème de Weierstrass.

Nous avons choisi, pour plus de simplicité, l'intervalle $(-1, +1)$, mais il est évident que *l'inégalité (9) reste vraie pour tout intervalle donné (a, b), quels que soient les nombres donnés a et b.*

3. Désignons maintenant par

$$p(x)$$

une fonction donnée, positive dans (a, b), par

$$f(x) \quad \text{et} \quad \varphi(x)$$

deux autres fonctions quelconques.

Soit

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \ldots, \quad \varphi_k(x), \ldots$$

une suite quelconque de fonctions bien déterminées dans l'intervalle (a, b) et satisfaisant aux conditions

$$\int_a^b p(x)\, \varphi_k(x)\, \varphi_m(x)\, dx = 0, \quad \text{si} \quad k \lessgtr m.$$

et

$$\int_a^b p(x)\, \varphi_k^2(x)\, dx = 1.$$

Posons

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{p} A_k\, \varphi_k(x) + \rho_p(x), \quad A_k = \int_a^b p(x)\, \varphi(x)\, \varphi_k(x)\, dx,$$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{p} B_k\, \varphi_k(x) + R_p(x), \quad B_k = \int_a^b p(x)\, f(x)\, \varphi_k(x)\, dx,$$

p désignant un entier quelconque.

En répétant textuellement les raisonnements du n° 6 de mon Mémoire «Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales etc.». (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M. VIII s.. T. XXX, n° 4, 1911), on obtient

$$\rho_p(x) = \varphi(x) - f(x) + R_p(x) + \sum_{k=0}^{p} (B_k - A_k)\, \varphi_k(x),$$

d'où

$$S_p(\varphi(x)) = \int_a^b p(x)\,\rho_p^2(x)\,dx = \int_a^b p(x)\,\rho_p(x)\,R_p(x)\,dx + \int_a^b p(x)\,(\varphi(x) - f(x))\,\rho_p(x)\,dx$$

et puis, à l'aide de l'inégalité bien connue de Bouniakowsky,

$$(10) \qquad \sqrt{S_p(\varphi(x))} \leqq \sqrt{S_p(f(x))} + \sqrt{\int_a^b p(x)\,\big(\varphi(x) - f(x)\big)^2\,dx},$$

où l'on a posé

$$S_p(f(x)) = \int_a^b p(x)\,R_p^2(x)\,dx.$$

6. Faisons l'hypothèse que pour tout polynome $P(x)$ subsiste l'équation

$$\int_a^b p(x)\,P^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2, \quad C_k = \int_a^b p(x)\,P(x)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

que j'appelle *l'équation de fermeture*, c'est à dire qu'on ait

$$(11) \qquad S_p(P(x)) < \left(\frac{\varepsilon'}{2}\right)^2 \quad \text{pour} \quad p \geqq p_0,$$

p_0 étant un entier assez grand.

Remplaçons, dans (10), $f(x)$ par le polynome $P_n(x)$ qui entre dans l'inégalité (9).

En tenant compte de cette dernière inégalité et de l'inégalité (11), on tire de (10)

$$\sqrt{S_p(\varphi(x))} < \varepsilon' \quad \text{pour} \quad p \geqq p_0,$$

ce qui démontre le théorème suivant:

Si l'équation de fermeture a lieu pour tout polynome en x, elle aura nécessairement lieu pour toute fonction $\varphi(x)$ assujettie à la seule condition d'être continue dans l'intervalle donné (Théorème VII de mon Mémoire «Sur la théorie de fermeture etc.», cité plus haut).

Il ne nous reste qu'à répéter les raisonnements du n⁰ 7 de ce Mémoire pour arriver au théorème fondamental dont nous avons parlé au n⁰ 1 de cette Note:

Si l'équation de fermeture a lieu pour tout polynome en x, elle aura nécessairement lieu pour toute fonction $\varphi(x)$ assujettie à la seule condition d'être intégrable dans l'intervalle donné (Théorème VIII du Mémoire «Sur la théorie de fermeture etc.»).

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Трубки червей изъ семейства *Amphictenidae* въ русскомъ міоценѣ.

Н. Андрусова.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 20 января 1916 г.).

Въ различныхъ горизонтахъ русскаго міоцена попадаются усѣченно-коническія трубки, открытыя съ обоихъ концовъ и по внѣшнему виду напоминающія трубки *Dentalium*, но не сплошныя известковыя, какъ у послѣдняго рода, но склеенныя изъ постороннихъ тѣлъ. О томъ, что это за тѣла, будетъ видно изъ нижеслѣдующаго описанія. Этого рода трубки были встрѣчены мною въ чокракскомъ горизонтѣ, въ спаніодонтовыхъ пластахъ, въ фоладовой фаціи конкскаго горизонта, въ нижне- и въ среднесарматскихъ пластахъ.

Трубки изъ чокракскаго горизонта въ моей коллекціи имѣются изъ Чумной балки у Мисыра и съ мыса Тархана на Керченскомъ полуостровѣ. И въ той и въ другой мѣстности онѣ встрѣчаются въ спиріалисовыхъ прослойкахъ. Трубки эти небольшого размѣра: изображенная на табл. I, рис. 4 трубка изъ спиріалисоваго слоя Чумной балки при длинѣ въ 8 мм., представляетъ средній поперечникъ около 1,2 мм., а Тарханскія трубки немного потолще (2,8 мм.). Склеены, какъ тѣ, такъ и другія изъ мелкихъ, не достигшихъ зрѣлости, раковинокъ *Spirialis* (вѣроятно *Sp. tarchanensis* Kittl), (см. фиг. 5).

Весьма обыкновенны трубки этого рода въ спаніодонтовомъ горизонтѣ. На фиг. 6—8, табл. I, изображены такія трубки изъ спаніодонтоваго волнистаго известняка Аргинъ-Тобечика (Керченскій полуостровъ). Порода

содержитъ *Spaniodontella pulchella* Baily и *Sandbergeria Socolovi* Andrus. Въ ней масса усѣченноконическихъ трубокъ, размѣры которыхъ: длина до 20 слишкомъ мм. (большею частью неполные экземпляры), діаметръ до 3 мм. и даже до 4 мм. Склеены трубочки чаще всего изъ скорлупокъ остракодъ (фиг. 8), рѣже изъ мелкихъ спаніодонтеллъ или изъ эмбріональныхъ оборотовъ зандбергерій (?). Трубочки изъ Ала-гёля (Керченскій полуостровъ, у Тобечикскаго озера) склеены изъ мелкихъ спаніодонтеллъ и иногда изъ оолитовыхъ зернышекъ, которыя въ обиліи попадаются въ желтоватосѣромъ известнякѣ, заключающемъ эти трубки, діаметръ которыхъ незначителенъ.

Въ фоладовомъ горизонтѣ подобныя же трубки найдены М. Баярунасомъ на Мангышлакѣ, у Джилка-бая. Трубочки съ явственными стѣнками, но разобрать, что за частички, изъ которыхъ онѣ склеены очень трудно, такъ какъ частицы, такъ сказать, вцементированы въ известковую пленку. Повидимому, это тонкіе обломки двустворчатыхъ (должно быть фоладъ).

Очень часты трубки этого рода въ нижнемъ сарматѣ. Въ моей коллекціи имѣется штуфъ изъ нижнесарматскихъ известковыхъ мергелей съ *Mactra fragilis* Lask. и другими раковинами, съ берега лимана Цокуръ (Таманскій полуостровъ). Въ ней масса довольно большихъ трубокъ (длина— до 30 мм., діаметръ отъ 4 внизу до 6 вверху). Оклейка большею частью по плохой сохранности неясна, но мѣстами замѣчаются мелкія эмбріональныя створочки двустворчатыхъ, должно быть, мактръ. Такія же мелкія раковинки наполняютъ и саму породу, причемъ тутъ онѣ встрѣчаются сомкнутыми створками, и тогда полость каждой ракушечки выполнена нефтью (очень густой). Особенно интересны трубки изъ с. Надежды въ Ставропольской губерніи, переданныя мнѣ для обработки С. А. Гатуевымъ, которому я приношу за это свою искреннюю благодарность. Порода эта представляетъ сѣрый песчаный мергель, который переходитъ въ слой тонкаго мягкаго желтоватаго известковаго мергеля, въ которомъ-то и расположены многочисленныя трубки, интересующія насъ. Сѣрая порода почти не содержитъ трубокъ. На разломахъ въ ней наблюдается много почти бѣлыхъ комочковъ или неправильныхъ шариковъ.

Какъ въ ней, такъ и въ желтомъ слоѣ много нижнесарматскихъ раковинъ: *Mactra fragilis*, *Trochus sarmates*, *Nassa akburunensis* и др. Трубки здѣсь иногда позволяютъ разсмотрѣть тонкую известковую оболочку, съ поверхности морщиноватую, сквозь которую просвѣчиваютъ мелкія тѣла, изъ которыхъ трубки собственно склеены. На большой трубкѣ (фиг. 10) эта оболочка какъ бы состоитъ изъ отдѣльныхъ неправильныхъ колецъ (точнѣе

ихъ отрѣзковъ), находящихъ чешуеобразно другъ на друга. Тамъ, гдѣ видны склеивающія тѣла (гдѣ нѣтъ оболочки), что особенно хорошо замѣтно на внутренней поверхности трубокъ, если вынуть выполняющую породу, имѣющую характеръ ядра, можно опредѣлить ихъ природу. Тутъ мы находимъ длинныя прямолинейныя корненожки типа *Dentalina*, лежащія параллельно другъ другу и по касательной къ поперечнымъ сѣченіямъ трубокъ (фиг. 12 и 14). Между ними разсѣяны миліоловидныя корненожки. Я первоначально считалъ ихъ за миліолъ и денталинъ. Сохранены они большею частью только въ видѣ ядеръ, и поэтому опредѣленіе ихъ затруднительно. Однако въ породѣ мнѣ удалось найти одно хорошо сохранившееся ядро, которое показало, что и тѣ и другія принадлежатъ одному и тому же организму. «Миліола» оказалась клубковиднымъ завиткомъ камеръ, который затѣмъ превращается въ прямую денталинообразную часть, состоящую изъ ряда слѣдующихъ одна за другой камеръ. Очевидно, мы имѣемъ здѣсь дѣло съ описанной Карреромъ *Vertebralina sarmatica*. Въ другихъ случаяхъ трубки состоятъ изъ множества мелкихъ эмбріональныхъ раковинокъ (должно быть *Mactra*), сильно инкрустированныхъ (фиг. 12). Иногда инкрустированныя тѣльца имѣютъ слишкомъ удлиненную для раковинокъ эмбріональныхъ двустворчатыхъ форму и заставляютъ подозрѣвать въ нихъ остракодъ. Наконецъ есть трубки, склеенныя изъ неправильныхъ тоненькихъ обломочковъ раковинъ.

Размѣры трубокъ изъ с. Надежды доходятъ до 40 мм., при діаметрѣ до 5 (вверху), суживающимся книзу до 4 мм.

Наконецъ изъ средняго сармата у меня имѣются большія трубки изъ нубекуляріеваго известняка с. Каменки на Днѣпрѣ, доставленныя мнѣ студентомъ Кіевскаго университета Левицкимъ. Это самыя крупныя изъ извѣстныхъ мнѣ трубокъ подобнаго рода. Изображенная (фиг. 14) трубка длиною въ 50 мм., при діаметрѣ въ 12 мм. вверху и въ 9 мм. внизу. Трубки эти склеены изъ плоскихъ обломковъ двустворчатыхъ, гладкихъ и ребристыхъ (*Cardium*).

Очень интересный обломокъ трубки, изображенный на фиг. 15, табл. I, происходитъ изъ нубекуляріеваго известняка средняго сармата Керченскаго полуострова (каменоломня у Керченской крѣпости). Стѣнки его представляютъ цѣлый музей. Здѣсь мы снова встрѣчаемъ *Vertebralina*, какъ начальныя, миліолидныя ея части, такъ и прямыя трубки, много остракодъ и мелкіе *Spirorbis*.

Выше средняго сармата такія трубки мнѣ не попадались.

Кромѣ уже перечисленныхъ мѣстонахожденій въ моей коллекціи такія

же трубки имѣются еще изъ нижняго сармата Такиль-буруна (Керченскій полуостровъ) и изъ средняго сармата Сартагана (Мангышлакъ).

Что касается природы этихъ трубокъ, то онѣ несомнѣнно принадлежатъ кольчатымъ червямъ. Послѣдніе, какъ извѣстно живутъ очень часто въ трубкахъ. Трубки эти склеиваются изъ весьма различнаго матеріала.

Нерѣдко черви сидятъ въ илистыхъ цилиндрическихъ трубкахъ, представляющихъ продуктъ склеиванія частичекъ ила выдѣляемой червемъ слизи. Впрочемъ иногда ужъ и тутъ замѣчается, что подбираются опредѣленныя частицы. Въ описаніи червей, собранныхъ экспедиціей Челленджера[1], во многихъ мѣстахъ указывается составъ такихъ илистыхъ трубокъ.

---

[1] Reports of Scientific Results of the voyage of H. M. Ship Challender. Zoology. Vol. XII.

У Катрфажа (Histoire naturelle des Annelés) мы читаемъ: «кожа у аннелидъ представляетъ очень энергичный органъ выдѣленій. Быть можетъ она обязана этой особенности спеціальнымъ органамъ, скрытымъ въ ней, но, повидимому, несомнѣнно, что часть этой дѣятельности обязана самой кожѣ... Вотъ при помощи этого кожнаго секрета серпулы и протулы строятъ свои столь прочныя и столь элегантныя трубки, хетоптеры и сабеллы ихъ пергаментныя трубки, погруженныя обычно въ илъ, а иногда даже въ замѣчательно твердыя породы. Кожный эксудатъ доставляетъ также цирратуламъ, теребелламъ и гермелламъ вещество, которое склеиваетъ мелкій гравій, обломки раковинъ и иногда зерна песка, которыя повидимому отбираются животнымъ» (томъ I, стр. 75).

Въ другомъ мѣстѣ мы читаемъ: «Трубки (аннелидъ) представляютъ результатъ ихъ дѣятельности, различный часто по виду, но всегда связанный съ присутствіемъ вещества, выдѣленнаго животнымъ въ видѣ простого эксудата. Ни у одной аннелиды не бываетъ подобныхъ отношеній къ своей трубкѣ, какъ напримѣръ между полипомъ и полипнякомъ, или между моллюскомъ и его раковиной. Жидкость, выдѣленная животнымъ, то выдѣляетъ известковую трубку весьма опредѣленной формы, какъ у серпулъ, то чехолъ, похожій на мокрый пергаментъ, какъ у сабеллъ; но часто онъ служитъ только для того, чтобы соединить и склеить плотно между собой различныя неорганическія тѣла. Это наблюдается у всѣхъ пектинарій, гермеллъ, теребеллъ, лейкодоръ и др.»... Постройка этихъ защитныхъ чехловъ, кажется, представляетъ въ большинствѣ случаевъ трудъ цѣлой жизни животнаго; возможно даже, что съ возрастомъ оно теряетъ способность или инстинктъ возстанавливать свой разрушенный домикъ» (стр. 133).

Замѣчу съ своей стороны, что мнѣ кажется, что въ оклейкѣ трубокъ пектинарій, отличающейся своей правильностью и извѣстной разборчивостью, играютъ извѣстную роль плоскія щетинки (палеи), расположенныя двумя гребенками на головномъ сегментѣ.

M. Blaxland Benham (The Cambridge Natural History, vol. 11, p. 287) говоритъ, что трубки волнхетъ склеены при помощи слизи, выдѣляемой (у *Terebellidae* и *Sabelliformia*) особыми брюшными желѣзами или всею кожею. Способъ строить трубку весьма различенъ, черви обладаютъ, такъ сказать избирательными способностями. Такъ нѣкоторые виды *Sabella* выбираютъ только самые тонкіе частицы ила, *Terebella conchilega* — кусочки раковинъ и зерна песку, *Onuphis conchilega* — маленькіе камешки, *Sabellaria* — только песчаные зерна. Тогда какъ нѣкоторые черви, вродѣ *Terebella* и *Nicomache* строятъ очень неправильныя трубки, *Pectinaria* образуетъ замѣчательно правильныя домики, открытые съ обоихъ концовъ; зерна песку у нихъ всѣ приблизительно одинаковой величины и только въ одинъ слой, вцементированы въ обильный «*mucus*» и съ наружной стороны трубки совершенно ровныя. Изображеніе *Pectinaria auricoma* (фиг. 152, стр. 288), которое даетъ авторъ, очень походитъ на наши формы.

Макъ Интошъ, авторъ этого описанія, отмѣчаетъ напримѣръ при описаніи *Maldanella valparaiscnsis* Mc. Int. присутствіе въ илистой трубкѣ этого червя радіоларій, иголъ губокъ и діатомовыхъ; у рода *Myriochele* (ibid. p. 212) въ илистой оболочкѣ, окружающей внутреннюю хитиновую трубку, находится много видимыхъ простымъ глазомъ песчаныхъ фораминиферъ; у *Sabellaria capensis* Schmarda трубка плотная, состоящая изъ мелкихъ раковинокъ, обломковъ болѣе крупныхъ, большихъ песчинокъ и другихъ тѣлъ, склеенныхъ густымъ экскретомъ тѣла; у рода *Eusamytha* Mc. Int. трубка образована изъ мелкихъ песчинокъ, песчаныхъ фораминиферъ, обломковъ радіоларій и иголъ губокъ, сидящихъ на опалесцирующей оболочкѣ; у *Mellinnopsis atlantica* трубка образована, какъ и у многихъ другихъ, хитиновымъ цилиндромъ, обклееннымъ снаружи иломъ, въ которомъ заключены различныя фораминиферы, причемъ попадающіяся здѣсь *Polystomella* выступаютъ лишь своими боками, что придаетъ трубкѣ особый зернистый характеръ. Экземпляръ *Terebella flabellum* на табл. L того же труда представляетъ извилистую трубку, обклеенную всевозможными обломками скелетныхъ частей организмовъ.

Этихъ примѣровъ достаточно, чтобы убѣдиться въ способности кольчатыхъ червей строить себѣ разнообразныя трубки. Вообще трубки у кольчатыхъ червей можно различать трехъ сортовъ: а) трубки известковыя, какъ у *Serpulidae*, которыя обыкновенно прирастаютъ къ посторовнимъ предметамъ и отличаются опредѣленнымъ анатомическимъ строеніемъ, б) трубки изъ ила, склееннаго слизью или окружающаго внутреннюю хитиновую трубку, и наконецъ в) трубки, склеенныя изъ постороннихъ предметовъ. Конечно, между вторыми и третьими существуютъ различные переходы (см. выше).

Наши трубки относятся къ третьему роду. Просматривая литературу, мы находимъ, что наиболѣе сходства трубки наши представляютъ съ трубками червей изъ семейства *Amphictenidae*, у которыхъ «прямыя или слегка изогнутыя трубки открыты съ обоихъ концовъ и склеены изъ мелкихъ песчинокъ»[1]. Въ Черномъ морѣ очень часто попадаются такія трубки, принадлежащія роду *Pectinaria*. Благодаря любезности академика Н. В. Насонова я получилъ для сравненія баночку съ такими трубками (съ сидящими въ нихъ отчасти червями). Къ сожалѣнію онѣ не опредѣлены ближе, происходятъ изъ коллекціи А. И. Александрова и собраны въ портѣ Скадовскъ на Каркинитскомъ заливѣ. Двѣ такія трубки я изобразилъ на

---

[1] Grobben-Claus. Lehrbuch d. Zoologie.

фиг. 1, 2 и 3, табл. I. Склеены онѣ изъ хорошо окатанныхъ кварцевыхъ зеренъ, лежащихъ одно около другого плотно и какъ бы на подборъ. Не трудно замѣтить поразительное сходство этихъ трубокъ съ нашими. Черноморскія трубки не всегда бываютъ склеены изъ кварцевыхъ зеренъ. Я помню отлично, что я собиралъ на берегу Керченскаго пролива такія же трубки, склеенныя изъ плоскихъ обломковъ раковинъ на манеръ трубки изъ Каменки (рис. 14).

Едва ли можно поэтому сомнѣваться въ томъ, что трубки, описанныя нами изъ русскаго міоцена, были жилищами какого-либо червя изъ семейства *Amphictenidae*, такъ какъ другія песчаныя трубки у иныхъ видовъ червей бываютъ построены иначе. То онѣ бываютъ менѣе правильны, и песчинки или постороннія тѣла расположены не въ одинъ слой, а наклеены одна на другую, отчего поверхность является неровной и бугристой (*Hermella*), то часто сростаются между собой, и бываютъ извилисты или прирастаютъ къ подводнымъ предметамъ и раковинамъ. Такія свободныя, болѣе или менѣе правильныя, усѣченноконическія трубки, въ которыхъ склеенныя тѣла располагаются приблизительно въ одинъ слой, попадаются только у *Amphictenidae*. Изъ осторожности однако я не рѣшаюсь ихъ причислить прямо къ роду *Pectinaria*, хотя мнѣ это кажется вѣроятнымъ, я предпочитаю называть ихъ именемъ *Pectinariopsis*. Названіе это было дано трубкамъ, описываемымъ здѣсь, уже давно[1], но до сихъ поръ мнѣ не удавалось ихъ ни описать, ни изобразить. Различать виды этого новаго рода кольчатыхъ червей я не рѣшаюсь, хотя можно было бы, можетъ быть, для удобства различать ихъ по матеріалу, изъ котораго онѣ склеены. Затѣмъ нѣкоторое значеніе играетъ и величина трубокъ. Едва ли, напримѣръ, въ маленькихъ трубкахъ изъ чокракскаго известняка (фиг. 4) жилъ тотъ же самый червь, что и въ крупныхъ среднесарматскихъ изъ Каменки (фиг. 14); тѣмъ не менѣе у насъ нѣтъ никакихъ основаній различать виды.

---

[1] Новыя геологическія изслѣдованія на Керченскомъ полуостровѣ. Зап. Нов. Общ. Ест., т. XIV, вып. 2, 1889, стр. 71.

Объясненіе таблицы.

Фиг. 1. Трубка *Pectinaria* sp. съ выставляющимися изъ передняго расширеннаго конца плоскими головными щетинками (*paleae*), Черное море, Скадовскъ, колл. Александрова въ Зоолог. Муз. ИАН., нат. вел.

Фиг. 2. Тоже, пустая трубка. нат. вел.

Фиг. 3. Часть послѣдней трубки, увел. въ 4 раза.

Фиг. 4. *Pectinariopsis* sp. Спиріалисовый прослоекъ въ верхахъ чокракскаго известняка. Чумная балка у Мисыра. Вост. бер. Чокракскаго соленаго озера. Керченскій полуостровъ. Слегка увеличено.

Фиг. 5. Часть трубки *Pectinariopsis* sp. Известковистый песчаникъ съ спиріалисами. Мысъ Тарханъ (чокракскій горизонтъ). Трубка склеена изъ молодыхъ спиріалисовъ, увеличено въ 8 разъ.

Фиг. 6 и 7. Трубки *Pectinariopsis* sp. изъ спаніодонтовыхъ известняковъ Аргинъ-Тобечика. Керченскій полуостровъ. Слегка увеличено.

Фиг. 8. Часть одной изъ такихъ трубокъ, оттуда же. Видъ извнутри, увеличено въ 4 раза. Обклейка изъ остракодъ.

Фиг. 9. Кусокъ породы съ трубками *Pectinariopsis* sp. Нижній сарматъ, с. Надежда, Ставропольской губерніи. Нат. вел. Трубки склеены изъ эмбріональныхъ двустворчатыхъ.

Фиг. 10. Трубка *Pectinariopsis* sp., оттуда же. Нат. вел. Видна морщинистая известковая оболочка.

Фиг. 11. Часть трубки, оттуда же, увел. въ 8 разъ. Обклейка—корненожки (*Vertebralina*).

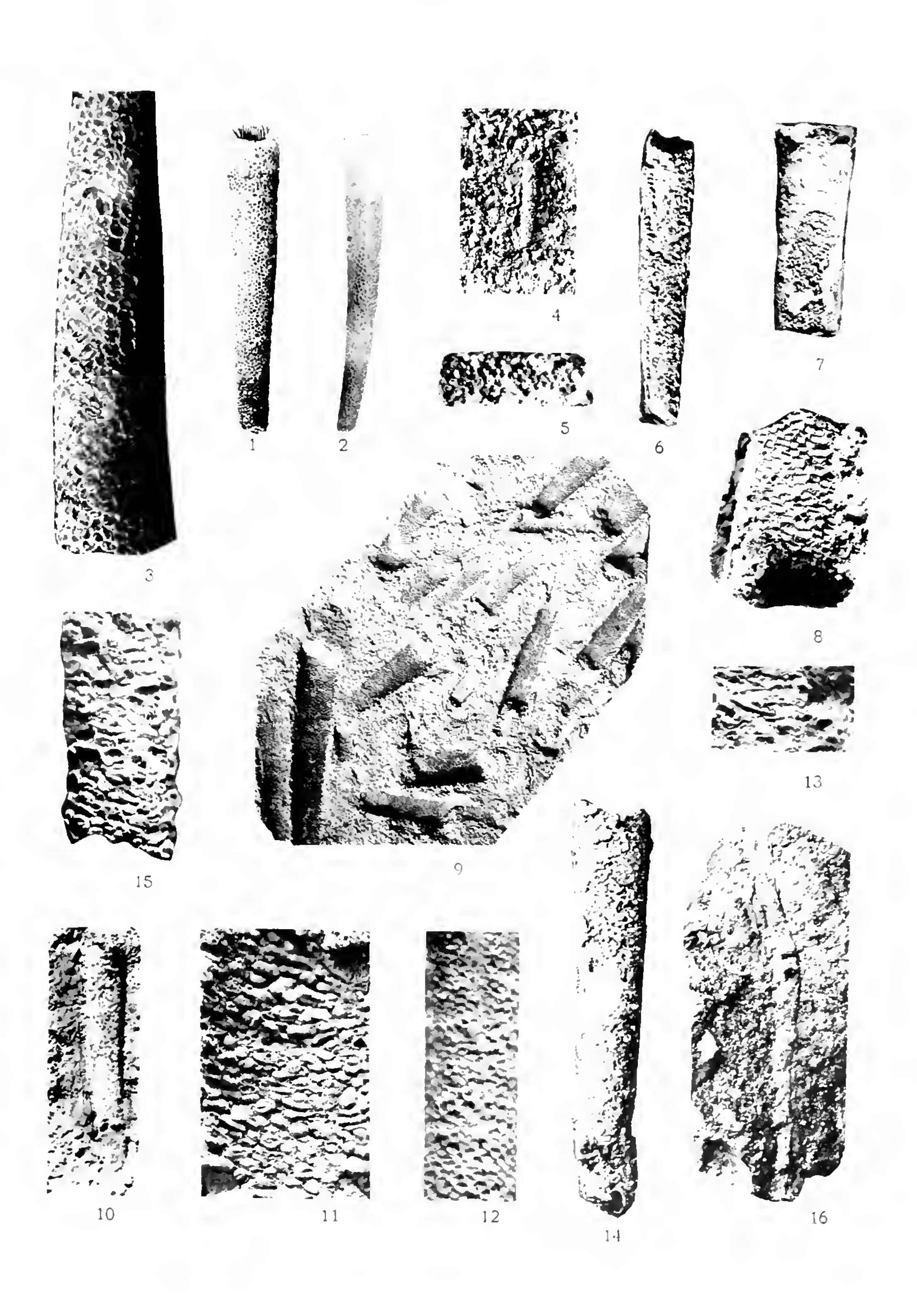
Фиг. 12. Тоже, увел. въ 4 раза. Обклейка — эмбріональныя раковинки.

Фиг. 13. Тоже, обклейка — денталивообразные обломки дистальной части *Vertebralina*.

Фиг. 14. Трубка *Pectinariopsis* изъ среднесарматскаго известняка с. Каменки на Днѣпрѣ. Натуральной величины.

Фиг. 15. Кусокъ трубки *Pectinariopsis* sp. изъ винкуляріеваго известняка у Керченской крѣпости. Обклейка — остракоды, спирорбисы, вертебралины. Увеличено въ 4 раза.

Фиг. 16. Глинистая трубка червя, напоминающая трубки *Mellinna*, изъ глинъ въ основаніи чокракскаго горизонта, у хут. Шепелева на берегу Азовскаго моря, къ В. отъ мыса Тарханъ. Керченскій полуостровъ.


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Яфетическіе элементы въ языкахъ Арменіи.

IX.

1. tal-el *складывать*, **tal** *складка*, **tal-q** *складки*; — **2. haw+at-q** *вѣра*, **haw+as-ti** *вѣрный*, **haw+an** [*вѣрованіе*,] *убѣжденіе*; **ham+oz-el** *убѣждать*.

Н. Я. Марра.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Историко-Филологическихъ наукъ 10 февраля 1916 г.).

Подумать только, что первоклассный арменистъ-лингвистъ въ справочный сводный трудъ могъ внести, хотя бы и въ скобкахъ, свидѣтельствовавшихъ объ его сомнѣніяхъ, такую этимологію какъ «հաւանիմ *haṙan-i-m* [*надо*: haw+an-im]... 'lasse mich bereden, überzeugen, stimme zu, willige ein, gehorche, folge', caus. *haran-eç-uç-ane-m* [haw+an-eč-uč-an-em] 'überrede': zu *har* [haw] «Vogel» wie gr. οἴομαι 'meine, glaube, vermuthe' zu οἰωνός 'Vogel, Vogelzeichen'»[1]. Такая совершенно фантастическая этимологія исходитъ отъ поборника и нынѣ исключительной аріо-европейской лингвистической точки зрѣнія на несуществующій въ реальности единый языкъ Арменіи, когда на самомъ дѣлѣ на лицо, какъ объектъ изслѣдованія, два языка[2]. Вѣдь прежде всего глаголъ haw+an-im — не одинокъ: отъ одной съ нимъ основы происходитъ рядъ словъ, наличныхъ или въ haйскомъ или въ армянскомъ или въ обоихъ языкахъ.

1. Но сначала разъяснимъ ծալել tal-el *складывать*, которое, какъ заимствованіе отъ сосѣдей-яфетидовъ, а не принадлежащее къ коренному

[1] H. Hübschmann, *AG*, II, стр. 465, 237.
[2] Meillet, MSL, 8, 165.

яфетическому слою того или иного языка Арменіи, можетъ относиться къ составу любого изъ нихъ, судя по случаямъ употребленія. Оно—слово скорѣе какъ будто армянское, а не hайское; во всякомъ случаѣ въ древне-литературномъ языкѣ, въ основѣ котораго лежитъ hайскій языкъ, ṫal-el появляется лишь съ момента наступленія вульгаризаціи древне-литературной рѣчи армянъ, съ момента проникновенія въ нее вульгарныхъ, именно армянскихъ элементовъ. Въ св. Писаніи ṫal-el *складывать* характеризуетъ наличную новозавѣтную рѣчь (Ін 20,7), а въ Ветхомъ Завѣтѣ изъ нѣсколькихъ случаевъ только разъ имѣемъ его — IV Ц 2,8.

Въ большинствѣ мѣстъ въ значеніи *складывать, сгибать* ветхозавѣтный текстъ даетъ կրկնել kərkn-el (Исх. 26,9, III Ц 19,18, Ис. 45,24), а изъ авторовъ лишь Л. Парпскій употребляетъ ṫal-el. Литературная исторія этихъ двухъ глаголовъ въ значеніи *складывать, сгибать*, въ частности — «*сгибать* колѣна» требуетъ дослѣдованія, и отъ этого въ значительной мѣрѣ зависитъ и окончательное рѣшеніе вопроса, какое изъ этихъ словъ hайское и какое армянское. То обстоятельство, что въ современной живой рѣчи сѣверныхъ армянъ ṫal-el *сгибать* обычное повседневное слово съ рядомъ новыхъ производныхъ[1], предрасполагаетъ въ пользу его принадлежности къ армянскому языку и противопоставленія ему, какъ армянскому, hайскаго синонима kərkn-el.

Использовавъ древнюю версію стиха Ис. 45,24, переводчикъ *Возраженій* Элура замѣнилъ կրկնեսցի въ выраженіи «да *согнется* всякое колѣно» глаголомъ կորասցի kor-asǯi (Հակաճառութիւն, стр. 214,12). Но здѣсь, вѣроятно, побужденіемъ служило не желаніе вульгаризовать текстъ, а стремленіе сдѣлать буквально соотвѣтствующимъ чтенію греческаго оригинала κάμψει (Ис. 45,23) отъ κάμπτω *гну, сгибаю*. Ибо kərkn-em лишь въ своемъ дальнѣйшемъ семасическомъ развитіи значитъ то же самое, въ основѣ же глаголъ этотъ, происходя отъ числительнаго կրկին kər-kin (вм. *rk-kin) *дважды, вдвое*, значитъ *удваивать, повторять*, отсюда «сложить *вдвое*» или «*на двое*», «согнуть» (колѣна)» и т. п. Это собственно и важно въ данный моментъ для насъ, такъ какъ синонимъ его ṫal-el *складывать, сгибать*, ծալք ṫal-q *складки*, такого же происхожденія отъ основы ṫal, представляющей собой яфетическое числительное «два», именно чисто к̇ар̇тскую разновидность

---

[1] Особенно характерно—ծալապատիկ ṫalapatik *со сложенными ногами* касательно сидѣнія, крб. ծալուպատակ ṫalupatak, тфл. ծալպատակ ṫalpatak. Всплываетъ отдѣльными формами та же основа кое гдѣ и въ южныхъ говорахъ, напр. въ мокскомъ (всегда по записи І. А. Орбели) — ծա̂լ̈կ ṫalűk *сложенный*.

сибилянтной вѣтви яфетическихъ языковъ. Какъ уже выяснено, грузинскій языкъ, въ основѣ котораго лежитъ именно ḱарт̍ская рѣчь, не сохранилъ коренного ḱарт̍скаго слова въ значеніи «два»; г. ორი or-ı (< wor-ı | yor-ı) *два* есть заимствованіе т.-каінской разновидности, прошедшей черезъ звуковой перебой спирантной вѣтви яфетическихъ языковъ. Въ работѣ *Заимствованіе числительныхъ въ яфетическихъ языкахъ* (Изв., 1913, стр. 789—790) уже выяснена первичная форма ḱарт̍ской разновидности — *sal, причемъ, считаясь съ обычнымъ подъемомъ s > ṫ ď | ϑ, я предположительно усматривалъ (ц. с., стр. 789, прим. 4) въ г. ცალი ϑal-ı *одинъ изъ пары, чета* и т. п. числительное *два > двойникъ, двоица*, но тогда я не зналъ еще, что эту ḱарт̍скую разновидность яфетическаго слова сохранилъ въ первомъ глухомъ подъемѣ ṫal армянскій глаголъ ծալել ṫal-el *складывать, сгибать*, букв. «складывать *вдвое*».

2. Гораздо больше интереса должно вызвать яфетическое происхожденіе второй группы словъ, такъ какъ между ними находится такой религіозный терминъ какъ հաւատք haw+at-q *вѣра, религія* или отыменный глаголъ հաւատամ haw+at-am *вѣрую* (значитъ также и *вѣрю*). Слово haw+at-q употребляется въ древнѣйшихъ текстахъ, особенно до-эллинофильскихъ, какъ pl. tantum, т. е. съ показателемъ мн. числа -q, но и Им. падежъ ед. числа haw-at представляетъ pl. tantum, съ яфетическимъ показателемъ мн. числа t, причемъ суффиксъ -at для образованія отвлеченнаго понятія находимъ использованнымъ въ hайскомъ языкѣ и въ другихъ случаяхъ, напр. — խորխորատ qorqor-at *глубины, ровъ* и т. п. отъ удвоенной основы խոր qor *глубокій*, հեղեղատ heğeğ-at *потоки > русло потоковъ* отъ հեղեղ heğeğ (< heğ+heğ) *потокъ, потопъ*[1].

Что слова haw+as-tı *вѣрный*, haw+an [*вѣрованіе* >] *убѣжденіе* (отсюда ի հաւան ածել i hawan aṫel *приводить къ убѣжденію*) и многочисленныя производныя отъ послѣдняго, въ числѣ ихъ и глаголъ հաւանիմ hawa+n-ım *убѣждаюсь, соглашаюсь, одобряю*[2], происходятъ отъ общей съ haw-at *вѣра* основы, не требуетъ особаго разъясненія. Прилагательное haw+as-ti образовано суффиксомъ -tı[3] отъ основы, самостоятельно не сохра-

[1] Въ современныхъ армянскихъ говорахъ отъ окончанія -at иногда остается лишь согласный элементъ t или вмѣсто -at на лицо -te: такъ въ ванскомъ говорѣ «հաւտեհան» havtehan «вкрадчиво *убѣждая* обманомъ вовлекающій въ какое-либо дѣло» (Р. Ачарянъ, Հայերէն գաւառական բառարան, s. v.).

[2] Въ лорійскомъ говорѣ (всегда по личной справкѣ у А. А. Лорисъ-Калантара) հըվընիլ həv-ǝn-ıl, про мокскій эквивалентъ см. ниже.

[3] Или съ усѣченіемъ исходнаго гласнаго (-e/-i) -t: հաւաստ haw+as-t id., см. Н. Марръ, *Два яфетическихъ суффикса* -te (-tı > -t) *въ грамматикѣ древне-армянскаго (hайскаго) языка* (2—2 a, Изв., 1910, стр. 1247).

пившейся—*haw-as, что представляетъ собой разновидность формы мн. числа (-as) съ показателемъ мн. числа s, какъ третью разновидность съ n (-an) имѣемъ въ haw-an. Такимъ образомъ haw-at ‖ *haw-as ‖ haw-an представляютъ отложенія въ haйскомъ языкѣ трехъ яфетическихъ разновидностей формы мн. числа, использованной какъ отвлеченное понятіе—*вѣра*, *вѣрованіе*, *убѣжденіе*, причемъ слово *haw-as проникло въ обсуждаемый языкъ Арменіи не самостоятельно, а въ составѣ прилагательнаго haw+as-tı>haw+as-t. Что касается двухъ другихъ эквивалентовъ, интересно отмѣтить ихъ семасическое использованіе по различнымъ залогамъ въ формѣ различныхъ спряженій: тогда какъ haw+at *вѣра* служитъ для образованія глагола дѣйствительнаго залога по II-му спряженію — haw+at-am *вѣрю*, *вѣрую* и побудительнаго — **հաւատա-ցուցանեմ** haw+at-aϑ-uϑ-an-em *увѣряю*, *убѣждаю*, отъ haw+an *увѣреніе*, *убѣжденіе* образуется глаголъ страдательнаго залога по I-му спряженію со среднимъ значеніемъ — haw+an-ım *увѣряюсь*, *убѣждаюсь*, *соглашаюсь*, *одобряю* и побудительнаго залога — **հաւանեցուցանեմ** haw+an-eϑ-uϑ-an-em *увѣряю*, *убѣждаю*, при этомъ haw+at-aϑ-uϑ-an-em есть новое образованіе, свидѣтельствующее о сравнительно позднемъ возникновеніи текстовъ съ этой формой. Въ св. Писаніи она встрѣчается всего одинъ разъ изъ десятка съ лишкомъ случаевъ, да и этотъ единственный случай находимъ въ книгѣ Маккавеевъ (II 4, 34). Однако, и haw+an-eϑ-uϑ-an-em не представляется архаической формой побудительнаго залога; такой формой мы сочли бы образованіе непосредственно отъ основы haw- съ помощью вспомогательнаго глагола -uϑ+an-em, да еще въ архаическомъ его видѣ: -us+an-em или -uz+an-em[1].

Любопытна и разновидность основы haw- съ потерею спиранта h — **աւատամ** aw+at-am *вѣрю*, *вѣрую*, **աւատացուցանեմ** aw+at-aϑ-uϑ an-em *увѣряю*, *убѣждаю*, но это все вульгарныя, позднѣйшія разновидности соотвѣтственныхъ болѣе древнихъ формъ[2]. Однако, въ живыхъ же говорахъ, но на югѣ, именно въ томъ же мокскомъ спирантъ h бываетъ представленъ его подъемомъ q̇: **խավատա̂մ** q̇av-at-âm *вѣрю*, **խա̂վնիմ** q̇av-n-ım *одобряю*. Болѣе любопытна исторія послѣдняго коренного w, собств. v, представляющаго перерожденіе губного m или скорѣе чередованіе съ нимъ[3], ибо ясно, что основа haw, resp. hav ‖ ham *вѣра*, отъ которой происходятъ всѣ

---

[1] Н. Марръ, *Грамматика древне-армянскаго языка*, § 286, стр. 245—246.

[2] Эту разновидность съ тѣмъ или инымъ ослабленіемъ имѣемъ какъ на югѣ — мок. **ա̈վտա̂մ** ä̂v-t-âm *вѣрю* и **ավատա̂մ** a-v-at-âm, такъ на сѣверѣ — лор. **ըվա̂տալ** əv-âl-al *вѣрить*.

[3] Не только между гласнымъ и качественно слабымъ **ւ** (ср. Н. Марръ, *Грам. др.-арм. языка*, § 36), но и въ другихъ условіяхъ.

перечисленныя haйскія слова и многія еще другія со сроднымъ значеніемъ, представляетъ разновидность, восходящую къ одному изъ языковъ спирантной вѣтви яфетическихъ языковъ, сибилянтный эквивалентъ которой *sam на лицо съ закономѣрнымъ подъемомъ s > ṫ въ грузинскомъ ṫam, откуда მწამს m-ṫam-s *я вѣрю, вѣрую*, მოწამე mo-ṫam-e (< вульг. მოწმე mo-ṫm-e) *свидѣтель, мученикъ*, букв. *удостовѣряющій* (съ косв. надежомъ и мн. числомъ отъ вульгарнаго вида: Р. mo-ṫm-is, Д. mo-ṫm-e-s, Напр. mo-ṫm-e-d, Т. mo-ṫm-iϑ, мн. Им. mo-ṫm-e-n-i и mo-ṫm-e-eb-i, но древнелитературныя формы — съ сохраненіемъ огласовки а) и т. д. Въ грузинскомъ этотъ корень проявляетъ и трехсогласность, да еще съ префиксомъ r-, но это сейчасъ для насъ не представляетъ интереса, это важно для исторіи яфетическихъ языковъ и ихъ отношенія къ семитическимъ[1]. Ни сванскій, ни тубал-каинскіе языки не сохранили своихъ природныхъ эквивалентовъ; впрочемъ мингрельскій въ заимствованномъ изъ грузинскаго ṫam- m перерождаетъ въ n при стеченіи съ s по извѣстному діалектическому закону (I. Кипшидзе, *Грам. мингр.*, § 18, d, стр. 024): თის წანს ϑis ṫan-s *онъ вѣритъ*[2], а въ побудительномъ залогѣ ту же грузинскую основу подвергаетъ тубал-каинской перегласовкѣ (к̆. а ‖ т.-к. о) съ ассимиляціею о съ губнымъ m въ u — к̆. ṫam ‖ т.-к. ṫum: м. რწუმება r+ṫum-eb-a *увѣрять, аор.* დვარწუმი dǝ-v-a-r+ṫum-i *я его увѣрилъ* (ср. г. წამი ṫam-i *мигъ* и м. წუმი ṫum-i id., Д. წუნს ṫun-s). Сейчасъ изъ мингрельскаго матеріала слѣдуетъ особо отмѣтить аор. მო˹ვ˺უმოწვი mo-˹v˺-u-mo-ṫv-i рядомъ съ დო˹ვ˺უმოწმი do-˹v˺-u-mo-ṫm-i *я свидѣтельствовалъ въ его пользу, согласился съ нимъ* (со словъ студента Читая — დოუმოწ do-u-mo-ṫ): отмѣчаю именно перерожденіе m въ v, пожалуй, по закону простого чередованія. Въ этомъ же отношеніи для нашей настоящей темы непосредственный интересъ представляетъ одно армянское слово, происходящее, очевидно, все отъ той же спирантной разновидности основы въ ея діалектическомъ видѣ ham- (‖ haw-), но представляющее опять таки не коренное армянское слово, а заимствованіе изъ haйскаго языка, притомъ въ архаической формѣ побудительнаго его залога: отъ ham- основа побудительнаго залога въ архаической формѣ должна бы звучать ham-oyz, въ степени же ослабленія oy > архаич. o (вульг. u) въ неударномъ слогѣ ham-oz-, что и

[1] Пока о семитическомъ эквивалентѣ г. ṫmn см. Н. Марръ, *Основныя таблицы къ грамматикѣ древне-грузинскаго языка съ предварительнымъ сообщеніемъ о родствѣ грузинскаго языка съ семитическими*, С.-Пбургъ 1908, стр. 14, прим. 2.

[2] Отсюда въ качествѣ отглагольнаго имени новообразованіе წანუა ṫan-u-a *вѣрить*. Ясно, всѣ эти слова слѣдовало въ словарѣ помѣстить подъ წამ ṫam > წან ṫan, а не подъ წ ṫ (ср. I. Кипшидзе, ц. с., стр. 376).

находимъ въ современномъ армянскомъ языкѣ *համոզել* ham-oz-el *убѣждать*[1]. Слово это наиболѣе архаичнаго склада по основѣ, въ этой вульгарной формѣ проникло и въ древне-литературный языкъ, но въ памятникахъ сравнительно позднихъ или съ подновленнымъ текстомъ, какъ то у М. Хоренскаго, Зеноба Глака, католикоса Іоанна, Аристакеса Ластивертскаго и т. п., а изъ книгъ св. Писанія опять таки въ книгѣ Царствъ (II 13,16, ср. выше, стр. 234). Архаичнымъ и древне-литературнымъ могло быть слово *համոզակեր* ham-+oza-ker (< ham-+oza-kear) *убѣдитель, убѣждающій*, хотя употребленіе его если не начинается, ибо оно встрѣчается у Ефр., I. Златоуста, то учащается съ эллинофильской эпохи (Филонъ, М. Хоренскій). Архаическій видъ основы ham, но съ потерею спиранта (am-), можно бы признать въ прилагательномъ h. *ամուր* am-ur (< ham-ur, ср. мок. *համուր* ham-ur *сильно, громко*) *твердый, крѣпкій, прочный*, но пока послѣднее отожествленіе выставляется лишь какъ возможное. По принятіи этой этимологіи, въ семасіческомъ отношеніи мы получили бы полноту разновидностей, присущихъ эквивалентному корню въ семитическихъ языкахъ.

Въ заключеніе ставится вопросъ, имѣемъ ли въ haw-at *вѣра* и haw-+at-am *вѣрую* религіозные термины, возникшіе въ Арменіи съ утвержденіемъ въ ней христіанства, или проповѣдники Христова ученія использовали эти слова какъ ходячія уже въ мѣстномъ языческомъ быту выраженія. Положительный отвѣтъ установилъ бы, что терминъ восходитъ къ яфетическому источнику не только формально, какъ словарный матеріалъ, но и реально, какъ созданіе опредѣленнаго еще языческаго религіознаго представленія.

---

[1] Лор. *հըմօզել* hәm-öz-el: *ինձ նա ուզըմ ա հըմօզի* ind na üzum a hәm-öz-ı *онъ хочетъ меня убѣдить*.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Объ одномъ примѣненіи статистическаго метода.

А. А. Маркова.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 17 февраля 1916 г.).

Въ XX-мъ томѣ «Извѣстій Отдѣленія Русскаго Языка и Словесности» помѣщена интересная статья Н. А. Морозова «Лингвистическіе спектры», посвященная вопросу о примѣненіи статистическаго метода къ изслѣдованію рѣчи различныхъ писателей.

Подобное изслѣдованіе, образецъ котораго приведенъ въ моей замѣткѣ «Примѣненіе статистическаго изслѣдованія» (ИАН. 1913 г.), можетъ имѣть большое значеніе, но только при условіи, что постоянство итоговъ, другими словами — устойчивость ихъ, не принимается на вѣру, а устанавливается въ самомъ изслѣдованіи, при чемъ долженъ быть выясненъ и размѣръ колебаній. Ссылки же на постоянство другихъ итоговъ, если бы даже онѣ были совершенно вѣрными, и на общій законъ большихъ чиселъ нисколько не доказываютъ устойчивости разсматриваемыхъ итоговъ.

На указанное условіе въ статьѣ «Лингвистическіе спектры» не обращено надлежащаго вниманія; въ ней нѣтъ и попытки доказать, что приведенные итоги характерны для русскихъ писателей, а не относятся только къ тѣмъ немногимъ отрывкамъ (по тысячѣ словъ въ каждомъ), которые были подвергнуты подсчету. Вмѣсто всякаго доказательства мы находимъ, на стр. 101, слѣдующее утвержденіе: «Возьмемъ хотя бы отрицаніе *не*. Подсчитайте — и вы увидите, что на каждую тысячу отдѣльныхъ словъ у Толстого оно встрѣчается обыкновенно немного менѣе 20 разъ, у Пушкина и Гоголя около 20, а у Тургенева значительно болѣе, чѣмъ у нихъ, иногда свыше 30 разъ. Въ общемъ же колебанія ея заключаются въ про-

межуткѣ отъ 12 до 35 разъ на тысячу словъ въ зависимости отъ склонности того или иного автора къ отрицаніямъ. Все это показываетъ, что служебная частица «не» въ большой мѣрѣ подвержена индивидуальнымъ колебаніямъ, т. е. опредѣляетъ складъ рѣчи автора. Тоже самое и въ случаѣ подсчета остальныхъ служебныхъ частицъ».

Много ли произвелъ авторъ такихъ подсчетовъ, какіе онъ предлагаетъ произвести читателю, неизвѣстно; но приведено имъ, въ таблицѣ XVI, для Гоголя только 5, для Пушкина и Толстого по 4 числа, а для Тургенева всего 3, притомъ довольно различныя: 32, 16, 24.

Произведенный же мною подсчетъ[1] показалъ, что «не» встрѣчается у Пушкина въ одной тысячѣ словъ 32 раза («Барышня крестьянка», со словъ «Лиза призналась, что поступокъ ея казался ей легкомысленнымъ. . .»), въ другой — 9 («Дубровскій», съ начала второй главы), а въ третьей — только 3 («Исторія Пугачевскаго бунта», первая тысяча словъ).

Примѣры большого разногласія итоговъ, относящихся къ одному и тому же писателю, встрѣтились и автору «Лингвистическихъ спектровъ», но онъ приписалъ такое разногласіе воображаемой особенности писателя (графа Толстого): какой-то спеціальной корректурной обработкѣ.

Стоитъ однако подсчитать еще нѣсколько тысячъ словъ, чтобы противорѣчивые выводы получились и для другихъ писателей. Напримѣръ, по даннымъ «Лингвистическихъ спектровъ» устанавливается значительное преобладаніе у Пушкина предлога «въ» надъ предлогомъ «на».

40, 32, 46, 43 «въ» и 12, 12, 11, 12 «на»;

а подсчетъ тысячи словъ съ начала второй главы повѣсти «Капитанская дочка» даетъ совсѣмъ иной результатъ:

15 «въ» и 21 «на».

Число 15 можно увеличить до 20, если присчитать тѣ «въ», которыми начинаются слова «вправо», «въѣзжать» и т. п., но существо дѣла отъ этого не измѣнится. Вмѣсто чиселъ

1,2 для «въ» и 0,6 для «на»,

---

[1] Во всѣхъ случаяхъ я считалъ «не» въ видѣ отдѣльнаго слова (по изданію 1882 года); если же присоединить и слова, начинающіяся съ отрицанія «не», то придется увеличить всѣ числа; однако въ послѣдней тысячѣ никакъ нельзя насчитать болѣе 8 «не», а въ первой ихъ не менѣе 32.

приведенныхъ для этой повѣсти въ таблицѣ VI (стр. 112), новый подсчетъ дастъ числа

0,58 (или 0,8) для «въ» и 1,05 для «на»,

которыя по той же таблицѣ VI приходится признать характерными для Гоголя.

Согласно таблицамъ XVI и VI рѣчь Гоголя отличается сравнительно рѣдкимъ употребленіемъ «въ» и частымъ употребленіемъ «на»: въ XVI таблицѣ указаны для произведеній Гоголя такія числа

15, 16, 23, 23, 22 «въ» и 24, 26, 26, 15, 20 «на»

и по нимъ выведены числа таблицы VI:

0,58, 0,61, 0,9 для «въ» и 1,2, 1.3, 1,3 для «на».

Въ послѣдней таблицѣ пропущена пара чиселъ

$$\frac{23}{26} = 0,88\ldots \quad \text{и} \quad \frac{15}{20} = 0,75,$$

которая также вытекаетъ изъ таблицы XVI («Носъ», 1-ый спектръ), но уже не указываетъ на преобладаніе предлога «на». Съ своей стороны могу прибавить результаты подсчета первой тысячи словъ девятой главы первой части поэмы «Мертвыя души»:

37 «въ» и 12 «на»;

откуда по раздѣленіи на 26 и 20 получаемъ числа

1.4... и 0,6,

которыя согласно таблицѣ VI соотвѣтствуютъ рѣчи Пушкина, а не Гоголя.

Итакъ, подсчеты немногихъ тысячъ послѣдовательныхъ словъ въ произведеніяхъ различныхъ писателей, подобные приведеннымъ въ таблицѣ XVI статьи «Лингвистическіе спектры», представляютъ шаткое основаніе для заключеній объ особенностяхъ рѣчи каждаго изъ этихъ писателей; замѣна однѣхъ тысячъ словъ другими можетъ превращать такія заключенія въ противоположныя, что и указываетъ на сомнительность ихъ.

Только значительное расширеніе поля изслѣдованія (подсчетъ не 5 тысячъ, а сотенъ тысячъ словъ) можетъ придать заключеніямъ нѣкоторую степень основательности, если только границы итоговъ различныхъ писателей

окажутся рѣзко отдѣленными, а не обнаружится другое весьма вѣроятное обстоятельство, что итоги всѣхъ писателей будутъ колебаться около одного средняго числа, подчиняясь общимъ законамъ языка.

Наконецъ, что касается такихъ вспомогательныхъ средствъ, какъ преобразованіе одной таблицы въ другую (XVI въ VI) посредствомъ особыхъ дѣлителей $\left(\frac{1}{26}, \frac{1}{20}\right.$ и т. п.$\left.\right)$ и чертежи, то они существа дѣла не измѣняютъ и потому особаго значенія не имѣютъ.

17 февраля 1916 года.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Графическій способъ вычисленія постоянныхъ на астрофотографическихъ снимкахъ.

С. К. Костинскаго.

(Съ 2-мя таблицами).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 20 января 1916 г.).

Опредѣленіе постоянныхъ на астрофотографическихъ пластинкахъ, если пренебрегать малыми членами 2-го и высшихъ порядковъ, или — учитывать ихъ отдѣльно, сводится, какъ извѣстно, къ рѣшенію двухъ системъ линейныхъ условныхъ уравненій слѣдующаго вида:

$$(m)\quad \left\{\begin{array}{ll} x_1 \cdot x + y_1 \cdot y + z + n_1 = 0\,; & x_1 \cdot x' + y_1 \cdot y' + z' + n'_1 = 0 \\ x_2 \cdot x + y_2 \cdot y + z + n_2 = 0\,; & x_2 \cdot x' + y_2 \cdot y' + z' + n'_2 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \end{array}\right. \qquad (I)$$

гдѣ $x_1 y_1$, $x_2 y_2 \cdots\cdots x_m y_m$ суть прямоугольныя координаты опорныхъ звѣздъ, измѣренныя на пластинкѣ относительно осей, проходящихъ черезъ ея оптическій центръ и близко параллельныхъ проэкціи, на пластинку, небеснаго меридіана (ось Y) и касательной къ небесной параллели (ось X); x, y, z и x', y', z' суть искомыя постоянныя — соотвѣтственно по прямому восхожденію и по склоненію —, а величины n и n' суть извѣстныя функціи, представляющія результатъ сравненія измѣренныхъ координатъ съ такъ называемыми идеальными (въ случаѣ опредѣленія относительныхъ или абсолютныхъ положеній различныхъ небесныхъ объектовъ), или-же — получаемыя также непосредственно изъ измѣреній (при опредѣленіи параллаксовъ или собственныхъ движеній звѣздъ по способу Kapteyn'a)[1].

---

[1] См. напр. С. Костинскій: «Астрофотографическія наблюденія спутника Нептуна въ 1899 г.». (Извѣстія ИАН., т. XII, № 2. 1900 г.); также: «Untersuchungen auf dem Gebiete der Sternparallaxen mit Hilfe der Photographie». (Publications de l'Observatoire Central Nicolas, Sér. II, Vol. XVII, 2, 1905 г.).

Указанныя выше системы условныхъ уравненій обыкновенно рѣшаются по способу наименьшихъ квадратовъ, или по какому-нибудь другому болѣе искусственному методу (напр. по способу Коши), что представляетъ, при большомъ числѣ m опорныхъ звѣздъ, довольно значительную вычислительную работу; это въ особенности часто встрѣчается при массовомъ опредѣленіи параллаксовъ по фотографическому способу Kapteyn'a. Однако, уже нѣсколько лѣтъ тому назадъ, опытъ показалъ мнѣ, что во многихъ случаяхъ можно довольствоваться весьма простымъ *графическимъ* способомъ рѣшенія данныхъ уравненій (I), который хотя и не даетъ вѣроятнѣйшихъ значеній неизвѣстныхъ — въ строго математическомъ смыслѣ этого слова, однако приводитъ къ такимъ величинамъ x, y и z, которыя, практически, почти совпадаютъ съ этими послѣдними, близко въ предѣлахъ вѣроятныхъ ошибокъ самихъ опредѣленій.

Въ русской литературѣ мнѣ извѣстны только двѣ статьи, посвященныя вопросу о графическомъ рѣшеніи линейныхъ уравненій по способу наименьшихъ квадратовъ, въ общемъ видѣ, съ двумя и тремя неизвѣстными[1]; но такъ какъ изложенные тамъ способы имѣютъ нѣсколько другія основанія (въ послѣднемъ случаѣ — съ приложеніемъ Начертательной Геометріи), и въ примѣненіи ихъ на практикѣ, при большомъ числѣ условныхъ уравненій, могутъ встрѣтиться довольно значительныя затрудненія, то я рѣшаюсь изложить здѣсь примѣняемый мною весьма простой и элементарный методъ, тѣмъ болѣе, что онъ можетъ пригодиться не только въ приложеніяхъ къ Астрофотографіи, но и во многихъ другихъ случаяхъ.

1. Изобразимъ абсолютный членъ n (или n'), геометрически, векторомъ, проведеннымъ чрезъ изображеніе соотвѣтствующей опорной звѣзды — перпендикулярно къ плоскости пластинки — и направленнымъ въ ту или другую сторону, сообразно съ его знакомъ (т. е. параллельно третьей оси координатъ Z). Обозначивъ, затѣмъ, искомыя постоянныя x, y, z (или x', y', z') соотвѣтственно чрезъ a, b, c и принявъ величины $x_1, y_1, n_1 \cdots x_m, y_m, n_m$ за *текущія* координаты ξ, η, ζ, мы перепишемъ основное уравненіе (I) въ слѣдующей формѣ:

$$a\xi + b\eta + \zeta + c = 0 \qquad \text{(II)}$$

---

[1] И. И. Померанцевъ: «Графическій пріемъ опредѣленія двухъ неизвѣстныхъ по способу наименьшихъ квадратовъ» (Записки военно-топогр. отд. Главн. Штаба, часть LII, 1895 г.). А. К. Кононовичъ: «Sur la résolution du système des équations linéaires à trois inconnues par la méthode des moindres carrés». (Записки Имп. Новороссійскаго Университета, Т. LXIX, 1896 г.).

это выраженіе представляетъ собою уравненіе плоскости, пересѣкающей плоскость пластинки, т. е. координатную плоскость XY (или $\xi\eta$), по линіи, вида:

$$a\xi + b\eta + c = 0. \tag{III}$$

Изъ условія $\zeta = n = 0$, опредѣляющаго эту прямую линію, видно, что она представляетъ собою, на пластинкѣ, границу между областями, гдѣ значенія n положительны, и гдѣ они — отрицательны; слѣдовательно, ее можно назвать *нулевой* линіей и высказать слѣдующую теорему:

Постоянныя астрофотографической пластинки являются коэффиціентами въ уравненіи нулевой линіи, отнесенной къ тѣмъ же прямоугольнымъ осямъ координатъ, относительно которыхъ производилось на ней измѣреніе опорныхъ и другихъ звѣздъ.

Такимъ образомъ все дѣло сводится къ построенію нулевой линіи по извѣстнымъ положеніямъ опорныхъ звѣздъ и по соотвѣтствующимъ значеніямъ функціи n. Пусть мы имѣемъ, на пластинкѣ, изображенія трехъ звѣздъ s_1, s_2 и s_3, достаточно удаленныя другъ отъ друга и возможно симметрично расположенныя относительно ея оптическаго центра; если n_1, n_2 и n_3 суть соотвѣтствующія значенія функціи n, то совершенно очевидно, геометрически, что раздѣляя стороны треугольника $s_1s_2s_3$, *внутреннимъ* или *внѣшнимъ* образомъ, въ отношеніяхъ: $\frac{n_1}{n_2}$, $\frac{n_2}{n_3}$, $\frac{n_1}{n_3}$, мы получимъ три точки, которыя должны лежать на одной прямой (при *абсолютной* точности чертежа) и какъ разъ опредѣляютъ намъ *нулевую* линію; указанныя выше отношенія имѣютъ знакъ, и легко видѣть, что именно знакомъ — опредѣляется внутреннее дѣленіе, а знакомъ + — внѣшнее.

При большомъ числѣ опорныхъ звѣздъ (resp. — условныхъ уравненій), расположенныхъ на пластинкѣ достаточно равномѣрно, мы получимъ цѣлый рядъ точекъ нулевой линіи, соединяя изображенія звѣздъ *попарно* и поступая по предыдущему; эти точки, вообще говоря, не будутъ лежать строго на одной прямой, вслѣдствіе случайныхъ ошибокъ въ значеніяхъ функціи n, съ прибавкою ошибокъ самаго черченія. Поэтому, построивъ по нимъ *вѣроятнѣйшую* прямую, т. е. такую, для которой сумма квадратовъ уклоненій отдѣльныхъ точекъ есть minimum, мы получимъ искомую нулевую линію.

Если на негативѣ имѣются m опорныхъ звѣздъ, то для теоретически полнаго рѣшенія задачи слѣдовало-бы сдѣлать всѣ сочетанія изъ нихъ *по два*, что дало-бы $\frac{m(m-1)}{2}$ точекъ нулевой линіи; однако, на практикѣ, достаточно опредѣлить $\frac{m}{2} \pm 1$ такихъ точекъ, сочетая изображенія звѣздъ

такимъ образомъ, чтобы точки нулевой линіи распредѣлялись возможно равномѣрнѣе — по всей ея длинѣ. Если условныя уравненія (I), или, что то же — значенія функціи n имѣютъ *различные* вѣса, то соотвѣтственно разные вѣса будутъ имѣть и полученныя точки нулевой линіи, что слѣдуетъ принять въ расчетъ при проведеніи вѣроятнѣйшей прямой.

Самое построеніе этой прямой дѣлается обычнымъ образомъ, путемъ послѣдовательнаго соединенія точекъ попарно, или вообще — въ группы, и — опредѣленія центровъ тяжести каждой группы, до тѣхъ поръ, пока не получатся только двѣ точки, опредѣляющія искомую прямую; нѣкоторый произволъ при такомъ построеніи, въ нашемъ случаѣ, не оказываетъ почти никакого замѣтнаго вліянія на конечные результаты [1].

Зная положеніе нулевой линіи, относительно осей $\xi\eta$, нетрудно получить значенія нашихъ постоянныхъ a, b, c въ тѣхъ-же единицахъ, въ которыхъ выражено n. Дѣйствительно, представивъ уравненіе нулевой линіи (III) въ нормальной формѣ:

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\xi+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\eta+\frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}=\xi\cdot\cos\alpha+\eta\cdot\sin\alpha-p=0,$$

гдѣ α и p суть извѣстные параметры, мы замѣчаемъ, что имѣютъ мѣсто слѣдующія соотношенія:

$$a=x=f\cdot\cos\alpha;\quad b=y=f\cdot\sin\alpha;\quad c=z=-f\cdot p\cdot \qquad \text{(IV)}$$

гдѣ f есть нѣкоторый факторъ пропорціональности.

Подставляя эти значенія неизвѣстныхъ въ систему уравненій (I), мы получаемъ оттуда:

$$f=-\frac{n_1}{x_1\cdot\cos\alpha+y_1\cdot\sin\alpha-p}=-\frac{n_2}{x_2\cdot\cos\alpha+y_2\cdot\sin\alpha-p}=\ldots=-\frac{n}{d};\ \text{(V)}$$

здѣсь d есть, очевидно, *разстояніе* изображенія той или другой изъ опорныхъ звѣздъ отъ нулевой линіи, измѣренное на чертежѣ и выраженное въ

---

[1] Теоретически, вопросъ о построеніи *вѣроятнѣйшей* прямой, по m точкамъ, (въ случаѣ равныхъ вѣсовъ) разрѣшается такой системой формулъ:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\,\Sigma x\cdot\Sigma y-2\,m\cdot\Sigma xy}{(\Sigma x)^2-(\Sigma y)^2+m\cdot\Sigma(y^2-x^2)};\qquad p=\frac{\Sigma x}{m}\cdot\cos\alpha+\frac{\Sigma y^2}{m}\cdot\sin\alpha$$

гдѣ x и y суть прямоугольныя координаты любой изъ данныхъ точекъ, и суммированіе распространяется на всѣ m точекъ; α и p суть параметры въ нормальномъ уравненіи искомой вѣроятнѣйшей прямой; при разныхъ вѣсахъ подъ знакъ Σ войдетъ соотвѣтствующій множитель.

тѣхъ-же единицахъ, что и координаты xy (или $\xi\eta$). На практикѣ достаточно опредѣлить факторъ f по двумъ опорнымъ звѣздамъ, наиболѣе удаленнымъ отъ нулевой линіи и расположеннымъ, возможно симметрично, по обѣимъ сторонамъ ея; если-же измѣрены разстоянія d для всѣхъ опорныхъ звѣздъ, то вѣроятнѣйшее значеніе фактора f получится по формулѣ:

$$f_0 = -\frac{[dn]}{[dd]}$$

и тогда, какъ легко видѣть, можно найти остающіяся ошибки v, въ условныхъ уравненіяхъ (I), изъ соотношенія:

$$v_m = f_0 \cdot d_m + n_m \quad (m = 1, 2, 3 \ldots m) \qquad \text{(VI)}$$

2. Изъ разсужденій предыдущаго параграфа вытекаетъ, какъ частный случай, графическій способъ рѣшенія системы условныхъ уравненій съ *двумя* неизвѣстными — въ общемъ видѣ. Дѣйствительно, полагая $z = c = 0$ въ уравненіяхъ (I) и (II), мы приходимъ именно къ такой системѣ, при чемъ уравненіе нулевой линіи приметъ видъ:

$$a\xi + b\eta = 0$$

т. е. нулевая линія *должна* проходить черезъ начало координатъ ($p = 0$).

Построеніе отдѣльныхъ точекъ нулевой линіи производится здѣсь такъ же, какъ было указано выше, но затѣмъ мы должны соединить каждую изъ этихъ точекъ съ началомъ координатъ; полученный, такимъ образомъ, узкій пучекъ прямыхъ линій отмѣтить — на окружности, описанной изъ начала координатъ произвольнымъ радіусомъ — рядъ точекъ съ *различнымъ* вѣсомъ, въ зависимости отъ разстоянія построенныхъ точекъ нулевой линіи отъ начала координатъ; опредѣливъ *центръ тяжести* этихъ точекъ, считая по окружности, и соединивъ его съ началомъ координатъ, получимъ вѣроятнѣйшую нулевую линію, рѣшающую вопросъ, по предыдущему.

3. Переходя къ практическимъ примѣрамъ приложенія описаннаго способа, резюмируемъ, предварительно, совокупность операцій, вытекающихъ изъ предыдущихъ параграфовъ:

1) Нанесеніе, на чертежъ, положеній всѣхъ опорныхъ звѣздъ — въ произвольномъ масштабѣ; иначе сказать: снятіе возможно точной копіи съ пластинки, въ ея оригинальномъ масштабѣ, или въ увеличенномъ; эта, наиболѣе мѣшкотная часть работы можетъ быть значительно облегчена разными путями; напримѣръ: съ помощью особаго приспособленія на стереокомпара-

торѣ Zeiss'a, дающаго возможность снимать копію съ пластинки (въ ея масштабѣ) почти автоматически. Затѣмъ, около изображенія каждой звѣзды на чертежѣ должны быть приписаны значенія функціи n (или n' — для склоненія).

2) Построеніе точекъ нулевой линіи, что дѣлается съ помощью такъ называемаго пропорціональнаго циркуля, или съ помощью миллиметренной линейки и большой таблицы умноженія; для рѣшенія обѣихъ системъ уравненій (I) можно пользоваться однимъ и тѣмъ же чертежомъ, замѣняя n чрезъ n'.

3) Измѣреніе разстоянія p нулевой линіи — отъ начала координатъ (въ тѣхъ единицахъ, въ которыхъ выражены ξ и η) и угла α, образуемаго этимъ перпендикуляромъ съ осью ξ (= углу между нулевой линіей и осью η); это послѣднее дѣлается обыкновеннымъ транспортиромъ, и уголъ α считается отъ 0° до 360°, начиная отъ положительной оси ξ — въ направленіи стрѣлки часовъ.

4) Вычисленіе по формуламъ (IV) и (V), что достаточно дѣлать съ 3-хъ значными логариомами (для указанныхъ выше астрофотографическихъ задачъ).

4. Приведемъ ниже два примѣра приложенія описаннаго способа къ отдѣльнымъ случаямъ, при чемъ сравнимъ результаты графическаго рѣшенія съ таковыми, полученными путемъ обычнаго вычисленія — по способу наименьшихъ квадратовъ.

а) Для опредѣленія годичнаго параллакса звѣзды σ Draconis, по фотографическому способу Kapteyn'a, была снята мною (Пулковскимъ нормальнымъ астрографомъ) пластинка A.915, въ центрѣ которой, принятомъ за начало координатъ, помѣщается изображеніе сказанной звѣзды. Измѣреніе этой пластинки, сдѣланное А. Н. Высотскимъ, дало слѣдующую систему условныхъ уравненій — для 32-хъ звѣздъ сравненія:

1)	$-9.7 \cdot x$	$-57.9 \cdot y$	$+z$	$-0.705 = 0$
2)	-20.2 »	-53.8 »	»	$-0.662 = 0$
3)	-35.2 »	-45.4 »	»	$-0.569 = 0$
4)	$+29.4$ »	-43.1 »	»	$-0.488 = 0$
5)	-47.6 »	-39.9 »	»	$-0.514 = 0$
6)	-24.0 »	-38.7 »	»	$-0.468 = 0$
7)	$+35.7$ »	-37.0 »	»	$-0.409 = 0$
8)	$+25.3$ »	-30.4 »	»	$-0.332 = 0$
9)	-18.3 »	-26.8 »	»	$-0.319 = 0$
10)	-31.8 »	-24.4 »	»	$-0.304 = 0$
11)	$+30.3$ »	-15.0 »	»	$-0.140 = 0$
12)	-6.0 »	-10.7 »	»	$-0.113 = 0$
13)	-43.7 »	$+1.5$ »	»	$+0.007 = 0$
14)	-20.3 »	$+1.2$ »	»	$+0.022 = 0$
15)	$+9.5$ »	$+2.3$ »	»	$+0.062 = 0$
16)	$+25.4$ »	$+1.5$ »	»	$+0.064 = 0$
17)	$+45.7 \cdot x$	$+0.4 \cdot y$	$+z$	$+0.058 = 0$
18)	$+16.9$ »	$+5.8$ »	»	$+0.106 = 0$
19)	$+10.6$ »	$+5.2$ »	»	$+0.096 = 0$
20)	-40.5 »	$+7.1$ »	»	$+0.079 = 0$
21)	$+3.7$ »	$+9.3$ »	»	$+0.146 = 0$
22)	$+45.8$ »	$+13.6$ »	»	$+0.221 = 0$
23)	$+16.4$ »	$+13.6$ »	»	$+0.210 = 0$
24)	-47.9 »	$+16.7$ »	»	$+0.192 = 0$
25)	-31.4 »	$+15.8$ »	»	$+0.193 = 0$
26)	$+42.0$ »	$+21.7$ »	»	$+0.319 = 0$
27)	-34.2 »	$+22.3$ »	»	$+0.269 = 0$
28)	$+5.5$ »	$+24.4$ »	»	$+0.325 = 0$
29)	$+11.6$ »	$+33.3$ »	»	$+0.444 = 0$
30)	$+21.4$ »	$+34.7$ »	»	$+0.467 = 0$
31)	$+1.7$ »	$+44.5$ »	»	$+0.573 = 0$
32)	-13.8 »	$+47.6$ »	»	$+0.600 = 0$

Здѣсь коэффиціенты при x и y, представляющіе собой прямоугольные координаты опорныхъ звѣздъ, выражены *въ миллиметрахъ*, а абсолютный членъ n — *въ оборотахъ* микрометреннаго винта измѣрительнаго прибора (1 обор. $= 29\rlap{.}''8$ на небѣ); для удобства графическаго построенія всѣ эти числа даны съ сокращеніемъ одного десятичнаго знака — противъ обыкновеннаго.

Приложенный ниже чертежъ (табл. I) представляетъ собою полное графическое рѣшеніе задачи, для данной пластинки; масштабъ чертежа въ точности равенъ оригинальному масштабу астрофотографическаго негатива; болѣе крупныя точки суть построенныя точки нулевой линіи, за исключеніемъ одной, помѣщенной въ началѣ координатъ и представляющей собою звѣзду σ Draconis. Надписанныя на чертежѣ значенія функціи n выражены въ тысячныхъ доляхъ оборота винта.

Произведя измѣренія по чертежу, получаемъ:

$$\begin{matrix} \alpha = 266\overset{\circ}{.}6;\ d_1 = +\overset{mm}{57.0};\ n_1 = -705 \\ p = \overset{mm}{1.9};\ d_{32} = -48.4;\ n_{32} = +600 \end{matrix} \quad \text{откуда: } f = \begin{Bmatrix} +12.37 \\ +12.40 \end{Bmatrix} = +12.38$$

и наконецъ:

Вѣр. ошибка одного ур-ія.

Въ тысячныхъ доляхъ оборота винта:
$$\begin{cases} x = -\ \ 0.74 \pm 0.01 \\ y = -12.33 \pm 0.01 \\ z = -23.46 \pm 0.52 \end{cases} \qquad \rho_1 = \pm 3.03$$

Строгое рѣшеніе, по способу наим. квадратовъ дало:

» »
$$\begin{cases} x = -\ \ 0.77 \pm 0.01 \\ y = -12.37 \pm 0.01 \\ z = -22.30 \pm 0.42 \end{cases} \qquad \rho_1 = \pm 2.38$$

Отсюда видно, что графическое рѣшеніе согласуется со строгимъ числовымъ вычисленіемъ почти въ предѣлахъ вѣроятныхъ ошибокъ опредѣленій. Для полноты были измѣрены также, по чертежу, разстоянія d всѣхъ звѣздъ отъ нулевой линіи и вычислены остающіяся ошибки v; ниже приведены эти числа, рядомъ съ таковыми, найденными по способу наименьшихъ квадратовъ:

	d	Остающіяся ошибки v: (графически).	(по спос. наим. квадр.).		d	Остающіяся ошибки v: (графически).	(по спос. наим. квадр.).
	mm				mm		
1)	+57.0	+ 1	—4	17)	— 5.0	— 4	—5
2)	+53.3	— 2	—2	18)	— 8.4	+ 2	—1
3)	+46.0	0	—2	19)	— 7.6	+ 3	+1
4)	+39.8	+ 4	0	20)	— 6.7	— 4	0
5)	+40.6	—12	—6	21)	—11.2	+ 8	+6
6)	+38.2	+ 4	+7	22)	—18.0	— 2	—6
7)	+33.3	+ 3	0	23)	—16.2	+10	+8
8)	+27.2	+ 5	+3	24)	—15.9	— 5	0
9)	+26.0	+ 3	+4	25)	—15.6	0	0
10)	+24.6	+ 1	0	26)	—26.0	— 3	—4
11)	+11.5	+ 2	0	27)	—22.0	— 4	—3
12)	+ 9.0	— 2	+2	28)	—26.6	— 4	—3
13)	— 1.2	— 7	0	29)	—36.0	— 1	+1
14)	— 1.9	— 1	0	30)	—37.7	0	—1
15)	— 5.0	0	+4	31)	—46.2	+ 2	—1
16)	— 4.8	+ 4	+4	32)	—48.4	+ 1	—1

Для болѣе крупныхъ остающихся ошибокъ два разныхъ метода даютъ достаточно согласныя значенія, но понятно, что вѣроятная ошибка одного уравненія выходитъ нѣсколько *больше* для графическаго способа — вслѣдствіе неточности черченія и отбрасыванія десятичныхъ знаковъ; здѣсь именно — приблизительно на 27%.

Точное значеніе фактора f, по формулѣ: $f_0 = -\frac{[dn]}{[dd]}$, получается равнымъ + 12.369, что почти совпадаетъ съ принятымъ выше приближеннымъ значеніемъ. Напомнимъ, что въ способѣ Kapteyn'а именно остающіяся ошибки служатъ аргументомъ для опредѣленія параллакса той или другой звѣзды; для данной пластинки мы имѣемъ:

$$\text{относительный параллаксъ: } \pi = -\frac{v}{111.4},$$

гдѣ v выражено въ тысячныхъ доляхъ оборота винта, а π получается въ секундахъ дуги. Такъ какъ центральная звѣзда σ Draconis служила также началомъ счета для n, т. е. для нея $n = 0$, то, въ случаѣ отсутствія у нея замѣтнаго параллакса, изображеніе этой звѣзды должно было бы попасть на нулевую линію[1]; если же звѣзда лежитъ *внѣ ея* (см. табл. I), то *какъ разъ ея разстояніе отъ нулевой линіи и представляетъ собой, графически, ея*

[1] Или, вѣрнѣе: нулевая линія должна была бы *пройти черезъ звѣзду*.

параллаксъ; иначе сказать: для σ Draconis $v = -f \cdot p = z$, и по данной выше формулѣ мы имѣемъ:

$$\text{параллаксъ } \sigma \text{ Draconis: } \pi = \begin{cases} +0''.211 & \ldots\text{графически} \\ +0.200 & \ldots\text{по спос. наим. квадратовъ} \end{cases}$$

Замѣтимъ вообще, что крупное уклоненіе, въ опредѣленную сторону, какой-либо изъ построенныхъ точекъ нулевой линіи, отъ ея средняго положенія, можетъ служить нѣкоторымъ намекомъ на возможность существованія замѣтнаго параллакса у той или другой изъ соотвѣтствующихъ звѣздъ сравненія.

б) Для опредѣленія постоянныхъ, по прямому восхожденію, на пластинкѣ *A*.392, снятой для опредѣленія положенія малой планеты Eros, были получены слѣдующія условныя уравненія:

1)	$-48.17 \cdot x$	$-20.16 \cdot y$	$+z$	$-0.4337 = 0$
2)	-44.19 »	-48.92 »	»	$-0.5465 = 0$
3)	-30.86 »	-12.37 »	»	$-0.2768 = 0$
4)	-24.99 »	$+41.75$ »	»	$+0.0243 = 0$
5)	-24.77 »	-31.94 »	»	$-0.3259 = 0$
6)	-21.77 »	-48.18 »	»	$-0.3860 = 0$
7)	-18.24 »	$+25.58$ »	»	$-0.0073 = 0$
8)	-16.30 »	-55.31 »	»	$-0.3875 = 0$
9)	-4.66 »	-4.17 »	»	$-0.0584 = 0$
10)	$+12.65$ »	-33.76 »	»	$-0.0773 = 0$
11)	$+13.91$ »	$+30.48$ »	»	$+0.2414 = 0$
12)	$+18.96$ »	-15.39 »	»	$+0.0529 = 0$
13)	$+34.74$ »	$+10.11$ »	»	$+0.2790 = 0$
14)	$+48.23$ »	$+34.35$ »	»	$+0.4915 = 0$
15)	$+51.39$ »	$+27.47$ »	»	$+0.4765 = 0$
16)	$+54.68$ »	-11.19 »	»	$+0.3105 = 0$

Здѣсь всѣ числа выражены въ миллиметрахъ ($1^{mm} = 59''.6$ на небѣ); для графическаго рѣшенія сокращаемъ по одному десятичному знаку. Чтобы выяснить, какъ отражается, на конечномъ результатѣ, извѣстная степень произвола при построеніи нулевой линіи, это построеніе было продѣлано *два раза*, совершенно независимо, и притомъ — соединяя опорныя звѣзды, попарно, *инымъ* образомъ (табл. II). Вотъ результаты обоихъ графическихъ рѣшеній, а также строгаго рѣшенія по способу наименьшихъ квадратовъ:

1-е графическое рѣшеніе (табл. II).	2-е графическое рѣшеніе.	Способъ наим. квадратовъ.
$\alpha = 36\overset{\circ}{.}4;\ p = \overset{mm}{0.6};\ f = -8.37;$	$\alpha = 35\overset{\circ}{.}6;\ p = \overset{mm}{0.5};\ f = -8.40$	

(Въ тысячныхъ доляхъ миллиметра).

$x = -6.81 \pm 0.02$	$x = -6.82$	$x = -6.84 \pm 0.02$
$y = -4.84 \pm 0.02$	$y = -4.89$	$y = -4.84 \pm 0.02$
$z = +5.01 \pm 0.57$	$z = +4.20$	$z = +5.48 \pm 0.50$

Вѣроятная ошибка одного уравненія:

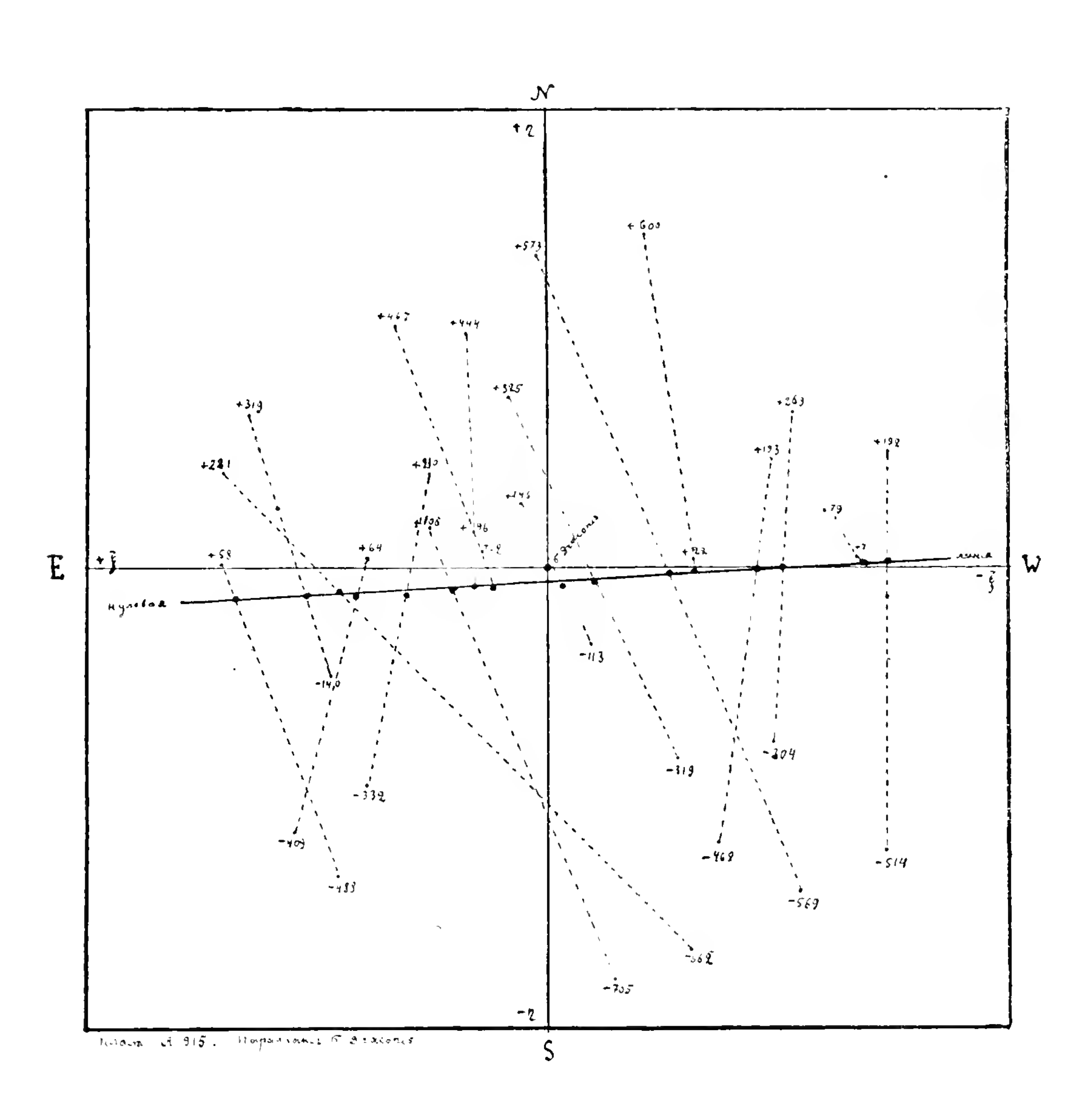
$\rho_1 = \pm 2.23$	—	$\rho_1 = \pm 1.98$

Всѣ три рѣшенія согласуются между собой въ предѣлахъ ихъ точности. Вѣроятная ошибка одного уравненія увеличилась здѣсь — для графическаго рѣшенія — только на 13%.

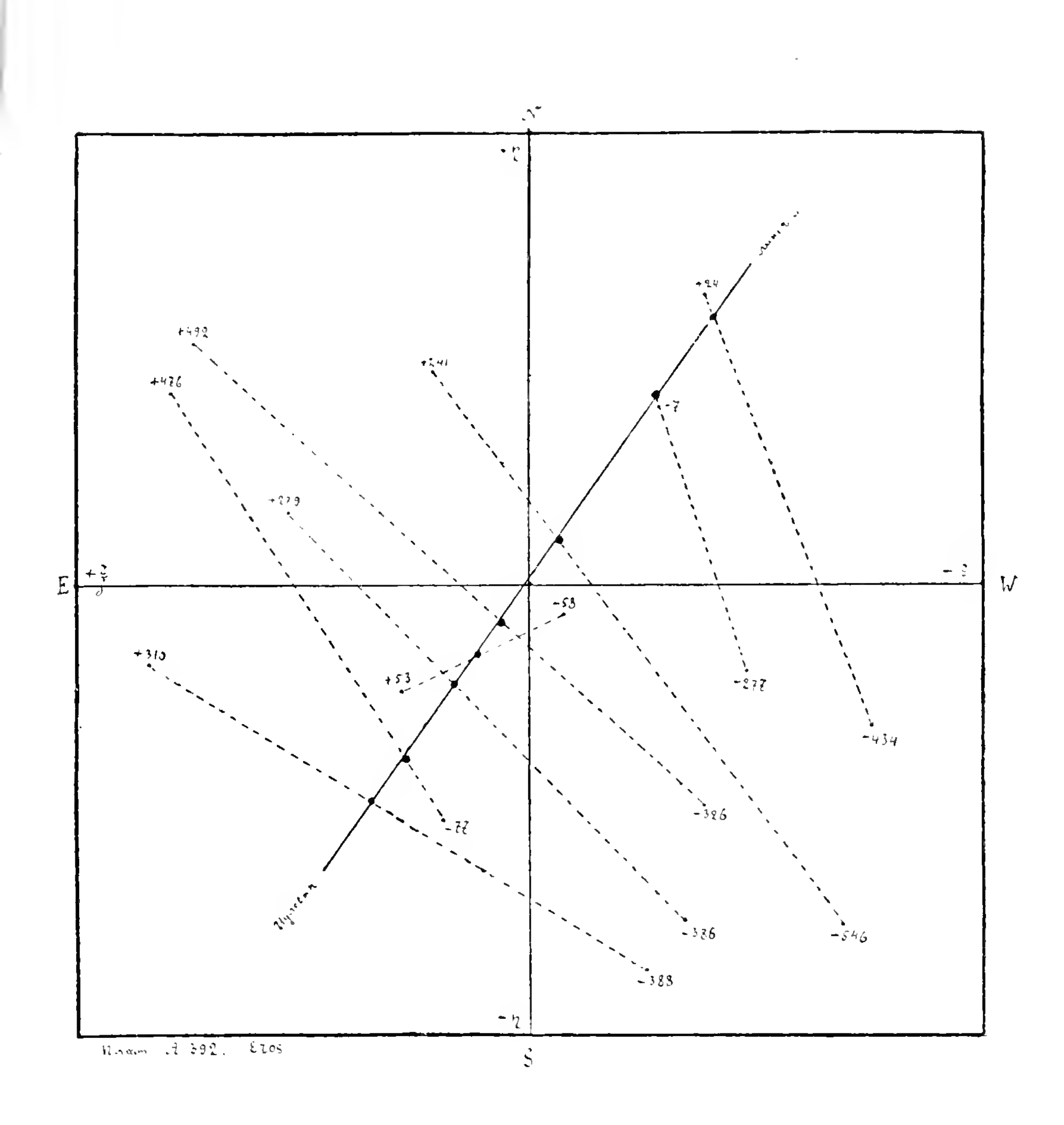
Приведенные примѣры показываютъ, что даже при сравнительно мелкомъ масштабѣ чертежа описанный графическій способъ даетъ результаты практически совпадающіе съ таковыми, полученными путемъ строгаго вычисленія; понятно, что прибавочная ошибка черченія можетъ быть сведена къ minimum'у съ помощью соотвѣтствующаго увеличенія масштаба. Между тѣмъ — что̀ здѣсь самое существенное — экономія въ работѣ получается очень значительная (раза въ три — во времени); поэтому есть основаніе думать, что этотъ способъ можетъ оказаться полезнымъ и достаточнымъ во многихъ случаяхъ.

Пулково, январь 1916 г.

С. К. Костинскій. Графическій способъ вычисленія постоянныхъ на астрофотографическихъ снимкахъ.



С. К. Костинскій. Графическій способъ вычисленія постоянныхъ на астрофотографическихъ снимкахъ.



Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Вліяніе спирта и метиленовой синьки на выдѣленіе углекислоты убитыми дрожжами.

В. И. Палладина и Е. И. Ловчиновской.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 20 января 1916 г.).

Вопросъ объ окисленіи спирта растеніями изслѣдовался Костычевымъ[1] и Залѣскимъ[2]. Исходя изъ предположенія, что наблюдавшіяся окисленія спирта производились при участіи водородныхъ акцепторовъ, мы во время нашихъ изслѣдованій надъ вліяніемъ метиленовой синьки на разложеніе различныхъ органическихъ кислотъ растеніями попутно произвели нѣсколько опытовъ для рѣшенія вопроса, не могутъ ли растенія, неспособныя окислять спиртъ при нормальныхъ условіяхъ (убитыя дрожжи въ нашихъ опытахъ), окислять его съ образованіемъ углекислоты въ присутствіи водороднаго акцептора (метиленовой синьки). Опыты дали отрицательный результатъ. Иногда порція со спиртомъ и метиленовой синькой даетъ нѣсколько болѣе углекислоты, чѣмъ порція съ однимъ спиртомъ, но это небольшое увеличеніе углекислоты зависитъ отъ стимулированія метиленовой синькой процесса самоброженія. Можетъ быть въ нашихъ опытахъ шло окисленіе спирта только до алдегида, но этотъ вопросъ мы не изслѣдовали.

---

[1] Костычевъ. Biochemische Zeitschrift. 15, 161, 1908. Физіологохимическія изслѣдованія надъ дыханіемъ растеній. Юрьевъ. 1910.

[2] Залѣскій и Рейнгардъ. Biochemische Zeitschrift. 42, 39, 1912. Залѣскій. Тамъ же 69, 289, 1915. Цитировано по Journal of the chem. Society. July. 1915.

Опытъ 1.

Три порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. воды. II порція: 50 к. см. 5% спирта. III порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 20°—21°.

Продолжительность опыта.	1. Вода.		2. Спиртъ.		3. Спиртъ + метиленовая синька.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
1 ч. 50 м.	11,6	7,7	11,2	7,5	12,8	8,5
22 ч. 15 м.	33,6	1,5	33,2	1,4	50,8	2,0
24 ч. 5 м.	45,2	—	44,4	—	63,6	—

Опытъ 2.

Двѣ порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. 5% спирта. II порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 20,5°—21°.

Продолжительность опыта.	1. Спиртъ.		2. Спиртъ + метиленовая синька.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
4 часа	20,8	5,2	20,8	5,2
22 ч. 40 м.	30,8	1,3	33,6	1,4
26 ч. 40 м.	51,6	—	54,4	—

Опытъ 3.

Три порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. воды. II порція: 50 к. см. воды и 0,5% метиленовой синьки. III порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 20°—21,5°.

Продолжительность опыта.	1. Вода.		2. Вода и метиленовая синька.		3. Спиртъ и метиленовая синька.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
4 ч. 45 м.	28,4	5,9	30,4	6,4	28,4	5,9
20 ч. 10 м.	30,4	1,5	30,8	1,5	38,8	1,9
24 ч. 55 м.	58,8	—	61,2	—	67,2	—

Опытъ 4.

Три порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. воды. II порція. 50 к. см. воды и 0,5% метиленовой синьки. III порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 20°—20,5°.

Продолжительность опыта.	1. Вода.		2. Вода и метиленовая синька.		3. Спиртъ и метиленовая синька.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
3 ч. 25 м.	11,6	3,3	26,4	7,7	18,8	5,1
21 ч. 10 м.	44,0	1,8	36,6	1,7	37,5	1,8
24 ч. 35 м.	55,6	—	63,0	—	56,3	—

Опытъ 5.

Двѣ порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. 5% спирта. II порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 20°—20,5°.

Продолжительность опыта.	1. Спиртъ.		2. Спиртъ и метиленовая синька.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
1 ч. 30 м.	11,2	7,5	4,8	3,2
21 ч. 5 м.	35,2	1,6	37,6	1,7
22 ч. 35 м.	46,4	—	42,4	—

Опытъ 6.

Три порціи по 5 гр. гефанола. I порція: 50 к. см. 1% спирта и 0,5% метиленовой синьки. II порція: 50 к. см. 3% спирта и 0,5% метиленовой синьки. III порція: 50 к. см. 5% спирта и 0,5% метиленовой синьки. Температура 22°.

Продолжительность опыта.	1. 1% спиртъ.		2. 3% спиртъ.		3. 5% спиртъ.	
	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.	CO_2 въ мгр.	CO_2 въ 1 часъ.
4 ч. 20 м.	30,4	7,0	23,6	5,4	32,4	7,4
17 ч. 45 м.	32,8	1,8	33,6	1,8	36,0	2,0
22 ч. 5 м.	63,2	—	57,2	—	68,4	—

Ботаническій кабинетъ
Женскаго Педагогическаго Института.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture.

Par W. Stekloff (V. Steklov).

(Présenté à l'Académie le 3/16 février 1916).

1. Pour démontrer le théorème fondamental dans la théorie de fermeture, j'ai établi d'abord, dans ma Note précédente[1], l'inégalité

$$(1) \qquad |\varphi(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \overline{\gtrless} n_0,$$

ayant lieu pour toute fonction continue dans l'intervalle donné, $P_n(x)$ désignant un polynome en x de degré n.

Je dois remarquer maintenant que c'est seulement pour annoter, chemin faisant, la simplicité extrême de la démonstration de cette inégalité, exprimant un théorème, connu aujourd'hui sous le nom du théorème de Weierstrass, que j'en ai déduit préalablement, en peu de mots, d'une autre inégalité simple[2]

$$(2) \qquad |f(x) - P_n(x)| < 2\,\frac{M_2}{n},$$

ayant lieu pour toute fonction $f(x)$ admettant les dérivées de deux premiers ordres.

Mais la démonstration préalable de ce théorème n'est point indispensable pour notre méthode.

---

[1] «Sur la théorie de fermeture». Ci dessus p. 222.

[2] Voir ma Note qui vient d'être citée.

Bien au contraire, il est aisé d'atteindre notre but d'une manière directe et même encore plus simple qui ne dépend nulle part de cette démonstration préalable de l'inégalité (1).

Quant à cette dernière inégalité, on peut la déduire ensuite, si l'on veut, comme une conséquence immédiate et très particulière du théorème fondamental de la théorie de fermeture.

2. Soit

$$\varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\ldots,\quad \varphi_k(x),\ldots$$

une suite de fonctions orthogonales et normales correspondant à la fonction caractéristique $p(x)$, positive dans l'intervalle $(-1, +1)$.

Posons, en général,

$$S_m(F(x)) = \sum_{k=m+1}^{\infty} A_k^2, \qquad A_k = \int_{-1}^{+1} p(x)\, F(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

On a toujours

$$\text{(3)} \qquad \sqrt{S_m(F(x))} \leqq \sqrt{S_m(\Phi(x))} + \sqrt{\int_{-1}^{+1} p(x)\,(F(x)-\Phi(x))^2\, dx},$$

quelles que soient les fonctions

$$F(x) \quad \text{et} \quad \Phi(x)\text{[1]}.$$

Soit $\varphi(x)$ une fonction continue dans $(-1, +1)$.

Introduisons, comme dans la Note précédente, la fonction auxiliaire

$$(A) \qquad f(x) = \frac{1}{h^2}\int_x^{x+h} d\xi \int_\xi^{\xi+h} \varphi(z)\, dz, \quad h > 0.$$

Appliquant l'inégalité (2) à cette fonction $f(x)$, on trouve

$$(4) \qquad |f(x) - P_n(x)| < 4\,\frac{\varepsilon}{h^2 n},$$

ε étant un nombre positif qui figure dans l'inégalité

$$(5) \qquad |\varphi(x+\delta) - \varphi(x)| < \varepsilon, \quad \delta \leqq 2h.$$

[1] Voir mon Mémoire «Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales et normales etc.». Mém. d. Acad. d. Sciences, Cl. Ph. M., VIII s., T. XXX, nº 4, 1911, p. 8.

Faisons, dans (3),

$$F(x) = f(x), \qquad \Phi(x) = P_n(x).$$

On a, en vertu de (4),

(6) $$\sqrt{S_m(f(x))} \leqq \sqrt{S_m(P_n(x))} + 4Q\frac{\varepsilon}{h^2 n}\cdot \quad Q^2 = \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx.$$

Si l'on fait ensuite, dans (3),

$$F(x) = \varphi(x), \quad \Phi(x) = f(x),$$

on aura, en vertu de (5) et de (A),

(7) $$\sqrt{S_m(\varphi(x))} \leqq \sqrt{S_m(f(x))} + Q\varepsilon.$$

Les inégalités (6) et (7) conduisent à la suivante

(8) $$\sqrt{S_m(\varphi(x))} \leqq \sqrt{S_m(P_n(x))} + 4Q\frac{\varepsilon}{h^2 n} + Q\varepsilon.$$

3. Dans cette inégalité

$$m, \quad n \quad \text{et} \quad h$$

sont trois nombres arbitraires ne dépendant pas les uns des autres; quant à ε, il ne dépend que de h (ou inversement).

Quels que soient les entiers m et n, on peut toujours choisir le nombre

$$h = h_0$$

de manière que ε soit si petit qu'on le veut, car $\varphi(x)$ est une fonction continue.

On peut poser, par exemple,

$$Q\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{3},$$

ε' étant un nombre donné à l'avance.

Le nombre h étant ainsi fixé, faisons $n = n_0$ si grand qu'on ait, par exemple,

$$h^2 n_0 > 4.$$

Faisons, enfin, l'hypothèse que

$$\lim_{m=\infty} S_m(P(x)) = 0$$

pour tout polynome $P(x)$.

Dans ce cas on peut choisir $m = m_0$ si grand qu'on ait

$$S_m(P_n(x)) < \frac{\varepsilon'^2}{3^2} \quad \text{pour} \quad m \geqq m_0.$$

Les nombres h, n et m étant choisis de la manière indiquée, l'inégalité (8) devient

$$\text{(B)} \qquad \sqrt{S_m(\varphi(x))} < \varepsilon' \quad \text{pour} \quad m \geqq m_0$$

et conduit ensuite au théorème énoncé à la fin de ma Note précédente, à laquelle nous renvoyons le lecteur.

On voit, de la sorte, que *le théorème de Weierstrass ne joue aucun rôle dans la démonstration du théorème dont il s'agit.*

4. Le théorème fondamental de la théorie de fermeture étant établi d'une manière si simple et tout à fait élémentaire, ses diverses applications en acquièrent un nouvel intèret et un plus grand degré de généralité.

Il est impossible d'entrer en tous les détails dans cette petite Note et je me bornerai seulement à certaines remarques sommaires relatives aux problèmes de représentation approchée des fonctions arbitraires ainsi que de leur développement en séries procédant suivant les fonctions données.

L'équation (6) du Mémoire «Sur la théorie de fermeture etc.», cité plus haut (p. 29),

$$\text{(9)} \qquad \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n} A_k \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi_k(x)\,dx + \rho_n, \quad h > 0,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction *intégrable* dans l'intervalle donné (a, b) et

$$\text{(10)} \qquad |\rho_n| < \frac{\sqrt{S_n(\varphi(x))}}{2\sqrt{h}} < \varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand,}$$

a, évidemment, lieu non seulement pour les polynomes de Tchébychef, mais pour toute suite fermée de fonctions $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots.)$.

Il en résulte que *quelle que soit la suite fermée de fonctions* $\varphi_k(x)$, *orthogonales et normales, on peut toujours choisir un nombre* h, *assez petit, et un entier* $n = n_0$, *assez grand, tels qu'on ait, pour toute fonction* $\varphi(x)$ *continue dans* (a, b),

$$(11)\qquad \left|\varphi(x) - \sum_{k=0}^{n} A_k\, \Phi_k(x, h)\right| < \varepsilon \quad \textit{pour} \quad n \geqq n_0,$$

où

$$\Phi_k(x, h_0) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} \varphi_k(x)\, dx,$$

$$A_k = \int_a^b p(x)\, \varphi(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

Ce théorème général renferme une infinité de propositions relatives à la représentation approchée des fonctions continues à l'aide de suites finies de fonctions données $\varphi_k(x)$ formant un système fermé.

Considérons, par exemple, la suite de fonctions

$$(\alpha)\qquad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx,$$

ou celle de fonctions

$$(\beta)\qquad \varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx.$$

L'analyse précédente fournit l'un des moyens les plus simples pour s'assurer que *chacune de ces suites est fermée.*

Appliquant le théorème général aux fonctions (α) et (β), on arrive tout de suite aux inégalités, ayant lieu pour toute fonction $\varphi(x)$ continue dans l'intervalle $(0, \pi)$,

$$(12)\qquad \left|\varphi(x) - a_0 - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kh}{kh}\, a_k \cos kx\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

et

$$(13)\qquad \left|\varphi(x) - \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kh}{kh}\, b_k \sin kx\right| < \varepsilon \quad \text{pour} \quad n \geqq n_0,$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x)\, dx, \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \cos kx\, dx,$$

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \varphi(x) \sin kx\, dx.$$

On arrive ainsi d'une manière fort simple aux inégalités (12) et (13), dont la première a été établie par un autre procédé, beaucoup plus compliqué, dans mon Mémoire «Sur la théorie des séries trigonométriques» (Bulletin de l'Académie des Sciences de Cracovie, 1903).

Si nous supposons, pour le second exemple, que $\varphi_k(x)$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ soient les polynomes de Tchébychef correspondant à une fonction quelconque $p(x)$, positive dans (a, b), *nous obtiendrons une infinité des polynomes* $P_n(x)$ *satisfaisant à l'inégalité* (*1*) (Voir mon Mémoire cité «Sur la théorie de fermeture etc.», n⁰ 17, p. 28 etc.).

5. Dans mon Mémoire «Sur la théorie des séries trigonométriques» (Cracovie, 1903) j'ai trouvé la condition nécessaire de convergence de la série de Fourier ainsi que sa somme en tout point où elle converge.

Les recherches précédentes permettent d'établir d'une manière beaucoup plus simple les résultats que je viens de rappeler.

En effet, l'équation (9) conduit tout de suite à la suivante

$$(14) \qquad \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \varphi(z)\, dz = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \varphi_k(z)\, dz,$$

ayant lieu pour toute fonction $\varphi(x)$, intégrable dans (a, b), et pour toute valeur positive de h ne surpassant pas un certain nombre h_0, assez petit.

Il suffit d'appliquer cette équation générale aux fonctions (α) et (β) pour arriver aux résultats dont il s'agit.

Remarquons, en profitant de l'occasion, que les propositions analogues restent aussi vraies pour une classe de fonctions, beaucoup plus étendue.

Supposons que pour tout point x, pris *à l'intérieur* de l'intervalle (a, b), *les extrémités étant exclues*, les fonctions $\varphi_k(x)$, formant un système fermé, soient susceptibles (au moins pour les valeurs assez grandes de k) de la forme

$$(\delta) \qquad \varphi_k(x) = \alpha_k \cos \lambda_k x + \frac{\theta_k(x)}{k},$$

où

$$\lambda_k = ak^\beta, \qquad |\theta_k(x)| < M, \qquad |\alpha_k| < N,$$

a, β, M, N étant des nombres indépendants de k.

Dans ce cas l'équation (14) peut s'écrire

$$(15)\qquad \frac{1}{4h^2}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \varphi(z)\,dz = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\sin^2 \lambda_k h}{\lambda_k^2 h^2}\cos\lambda_k x + \frac{1}{4h^2}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \Psi(z)\,dz,$$

où l'on a posé

$$\Psi(x) = \sum_{0}^{\infty} \frac{A_k\,\theta_k(x)}{k}, \qquad B_k = A_k\,\alpha_k,$$

$\Psi(x)$ étant une fonction continue dans tout intervalle (α, β), situé à l'intérieur de (a, b).

Il est aisé de comprendre que la convergence de la série

$$(16)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos\lambda_k x,$$

en un point quelconque x, représente la condition nécessaire et suffisante de la convergence de la série

$$(17)\qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k\,\varphi_k(x).$$

Or, si la série (16) converge, on a nécessairement [1]

$$\lim_{h=0} \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{\sin^2 \lambda_k h}{\lambda_k^2 h^2}\cos\lambda_k x = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \cos\lambda_k x.$$

Ces remarques suffisent pour établir le théorème suivant:

La convergence de l'intégrale

$$\frac{1}{4h^2}\int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \varphi(z)\,dz$$

---

[1] Voir mon Mémoire «Sur les expressions asymptotiques etc.». Communications de la Soc. math. de Kharkow. 1907, p. 69 etc.

vers une limite déterminée représente la condition nécessaire de convergence de la série

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k \varphi_k(x)$$

en un point quelconque x, situé à l'intérieur de l'intervalle donné (a, b), pour toute suite fermée de fonctions $\varphi_k(x)$ satisfaisant à la condition (δ).

La même équation (15) conduit ensuite à cette proposition générale:

Si la série (17) converge en un point quelconque x, situé à l'intérieur de (a, b), sa somme est nécessairement égale à

$$\lim_{h=0} \frac{1}{4h^2} \int_{x-h}^{x+h} d\xi \int_{\xi-h}^{\xi+h} \varphi(z)\, dz.$$

quelle que soit d'ailleurs la fonction $\varphi(x)$, intégrable dans (a, b).

Ces théorèmes généraux s'appliquent, en particulier, à toute suite de fonctions de Sturm-Liouville, aux polynomes de Jacobi ainsi que à plusieurs autres systèmes de fonctions $\varphi_k(x)$ et conduisent à un grand nombre des propositions importantes concernant le problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les fonctions dites fondamentales.

L'avantage essentiel de la méthode indiquée, fondée sur la théorie de fermeture, consiste en ce qu'elle non seulement rend les raisonnements fort simples, mais permet encore d'éviter, dans certains cas, l'usage des expressions asymptotiques pour les extrémités de l'intervalle (a, b), où elles perdent parfois leur sens.

6. Faisons encore, en terminant, la remarque suivante.

Il a été connu depuis longtemps que l'équation de fermeture fournit un moyen fort simple du calcul de la limite inférieure (ou supérieure) précise du rapport de certaines intégrales définies.

C'est précisément ce moyen que j'ai employé, pour le but considéré, en 1897 dans mon travail «Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les fonctions harmoniques» (Communic. de la soc. mathém. de Kharkow. 1897, pp. 45—57, en russe)[1].

---

[1] La même méthode a été employée, pour le but analogue, de même en 1897, mais un peu plus auparavant, par M. Liapounoff. (Voir à cet égard son Mémoire «Problème de minimum etc.», Mém. de l'Acad. des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M., VIII s., T. XXII, nº 5, 1908, p. 41).

Mais dans mon Mémoire «Problème de refroidissement d'une barre hétérogène», publié quatre ans après (en 1901) dans les Annales de Toulouse, j'ai fait usage d'une autre méthode pour trouver la limite inférieure précise du rapport

$$\frac{\int_a^b u'^2\,dx}{\int_a^b u^2\,dx}, \qquad u = 0 \quad \text{pour} \quad x = a, \quad x = b.$$

C'est seulement parce que la démonstration élémentaire de la fermeture des fonctions (α) [ou (β)] m'a été inconnue que j'ai renoncé alors à la méthode fondée sur la théorie de fermeture.

A présent, la fermeture des fonctions (α) étant déduite immédiatement de l'inégalité (B), la démonstration des théorèmes, énoncés au n⁰ 10 et 11 du Mémoire cité ainsi que de plusieurs autres de la même espèce, peut être rendue moins artificielle et même encore plus simple.

Le lecteur trouvera cette démonstration dans les raisonnements du n⁰ 12 de mon travail cité plus haut (Communic. de la soc. mathém. de Kharkow. 1897), en les appliquant au cas particulier d'une seule variable.

—

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ въ февралѣ 1916 года).

13) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 3, 15 февраля. Стр. 99—200. Съ 1 табл. 1916. lex. 8°.— 1615 экз.

14) **Труды Радіевой Экспедиціи Императорской Академіи Наукъ.** № 5. В. Критскій. О монацитовыхъ розсыпяхъ р. Санарки. (I+5 стр.). 1916. lex. 8°.—415 экз. Цѣна 15 коп.; 15 cop.

15) **Труды Радіевой Экспедиціи Императорской Академіи Наукъ.** № 7. Е. Буркееръ. Объ опредѣленіи радіоактивности грязей и горныхъ породъ. (I+9 стр.). 1915. lex. 8°.—415 экз. Цѣна 20 коп.; 20 cop.

16) **Бюро Международной Библіографіи** при Императорской Академіи Наукъ. Дополнительный списокъ періодическихъ изданій, изъ которыхъ извлекается научная литература по естествознанію и математикѣ. Приложеніе I къ основному списку, изданному въ 1914 г. (II+28 стр.). 1916. 4°.—415 экз. Въ продажу не поступаетъ.

17) **Описанія Русскихъ рукописныхъ собраній.** Выпускъ 2-й. О. А. Мартинсонъ. Указатель къ каталогу хранящагося въ Императорской Публичной Библіотекѣ собранія славяно-русскихъ рукописей П. Д. Богданова. Изданіе Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ. (III+189+1 стр.). 1916. lex. 8°.—515 экз. Цѣна 1 руб.; 1 rbl.

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Февраль 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ. (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 5.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

15 МАРТА.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

15 MARS.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ“.

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ“ (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences“ (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ“ помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ“ помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій“.

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; но всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій“. При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій“, не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія“ разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія“ разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія“ принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того,— 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ИЗВЛЕЧЕНІЯ
ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ АКАДЕМІИ.

ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ.

I засѣданіе, 9 января 1916 года.

Министръ Народнаго Просвѣщенія циркуляромъ отъ 5 декабря 1915 года за № 3429 сообщилъ гг. Попечителямъ учебныхъ округовъ и Начальникамъ учрежденій, непосредственно подчиненныхъ Министерству Народнаго Просвѣщенія слѣдующее:

«Императорское Общество ревнителей исторіи, въ виду успѣха выставки текущей войны, устроенной съ Высочайшаго соизволенія въ Петроградѣ съ 24 іюня по 8 сентября 1915 г., постановило незамедлительно приступить къ учрежденію при Обществѣ музея нынѣшней великой войны.

«Вслѣдствіе сего и ходатайства названнаго Общества покорнѣйше прошу Ваше Превосходительство сдѣлать распоряженіе по подвѣдомственнымъ Вамъ учрежденіямъ о крайней желательности доставленія въ упомянутый Музей предметовъ, характеризующихъ отраженіе войны на учебномъ дѣлѣ; таковые свѣдѣнія и предметы будутъ сосредоточены въ особомъ отдѣлѣ «Школа и народное просвѣщеніе».

«За всѣми ближайшими справками и указаніями надлежитъ обращаться къ заместителю Предсѣдателя Императорскаго Общества ревнителей исторіи Михаилу Константиновичу Соколовскому (Петроградъ, Вас. Остр., 10 лин., д. № 23).

Положено послать Обществу Отчеты Академіи за 1914 и 1915 гг.

Попечительство о трудовой помощи, состоящее подъ Августѣйшимъ покровительствомъ Ея Императорскаго Величества Государыни Императрицы Александры

Өеодоровны отношеніемъ отъ 2 декабря 1915 года за № 6150 просило редакцію «Извѣстій» Академіи напечатать въ ближайшей книжкѣ «Извѣстій» сообщеніе Комитета Попечительства о трудовой помощи о присужденіи премій Августѣйшаго Имени Ея Императорскаго Величества Государыни Императрицы Александры Өеодоровны за сочиненія по вопросамъ призрѣнія бѣдныхъ и благотворительности, представленныя на конкурсъ 1914 года, съ слѣдующимъ спискомъ темъ, предложенныхъ Комитетомъ къ предстоящему въ 1918 году конкурсу на означенныя преміи:

1) «Что такое трудовое воспитаніе и какъ оно должно быть организовано въ учрежденіяхъ дѣтскаго призрѣнія».

2) «Война и общественная помощь».

3) «Материнство и трудовая помощь».

4) «Посредничество въ дѣлѣ предложенія труда и спроса на трудъ».

При этомъ Комитетъ указалъ на основаніи § 25 Высочайше утвержденныхъ 6 іюня 1901 года правилъ о преміяхъ, что срокъ для представленія сочиненій на соисканіе премій назначенъ на 1 мая 1918 года.

Преміи присуждаются: одна большая въ размѣрѣ 2000 руб. и три малыя — первая въ 1000 руб., а остальныя двѣ — по 750 руб.

Къ соисканію премій допускаются какъ рукописныя, такъ и напечатанныя въ теченіе послѣднихъ трехъ лѣтъ до закрытія конкурса сочиненія, которыя имѣютъ своимъ предметомъ разработку вопросовъ о призрѣніи бѣдныхъ, о благотворительности и мѣропріятіяхъ, направленныхъ къ улучшенію условій труда и быта нуждающихся, съ теоретической или практической точекъ зрѣнія, въ особенности въ примѣненіи къ Россіи, изученіе исторіи, статистики и законодательства по указаннымъ отраслямъ и т. п.

Комитетъ Попечительства предлагаетъ на соисканіе премій темы. Сочиненія, написанныя на свободно избранныя темы, принимаются къ соисканію вмѣстѣ съ сочиненіями на предложенныя темы; симъ послѣднимъ, при равныхъ достоинствахъ, отдается, однако, преимущество.

Сочиненія, которыя уже получили какую-либо награду отъ другого учрежденія, не лишаются права быть удостоенными премій отъ Комитета Попечительства о трудовой помощи.

Сочиненія къ соисканію премій доставляются въ Канцелярію Комитета Попечительства о трудовой помощи (Надеждинская, 41, кв. 2), отъ 2 до 5 час. дня.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Общество защиты и сохраненія въ Россіи памятниковъ искусства и старины (Спасская, 9) отношеніемъ отъ 24 ноября 1915 года за № 49 сообщило въ Академію:

«15 декабря 1915 года въ 9 час. вечера въ Маломъ Конференцъ-залѣ Императорской Академіи Наукъ Обществомъ защиты и сохраненія въ Россіи памятниковъ

искусства и старины устраивается засѣданіе въ память почившаго секретаря Общества барона Н. Н. Врангеля, на которомъ будетъ прочитанъ рядъ докладовъ, разносторонне характеризующихъ научную и художественную дѣятельность покойнаго.

«Увѣдомляя объ изложенномъ, Совѣтъ Общества, по порученію Августѣйшаго Предсѣдателя Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Николая Михаиловича, проситъ почтить это засѣданіе своимъ присутствіемъ членовъ Императорской Академіи Наукъ и ея служащихъ».

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что съ согласія Вице-Президента Обществу было предоставлено помѣщеніе и что означенное чествованіе памяти Н. Н. Врангеля состоялось въ Маломъ Конференцъ-залѣ 15 декабря, а также, что 19 декабря 1915 г.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Библіотека Университета въ Иллинойсѣ (The University of Illinois Library. Urbana, Illinois) письмомъ отъ 23 ноября н. ст. 1915 г. запросила Академію, не пожелаетъ ли Академія взамѣнъ получаемыхъ ею изданій (до 1913 г. «University Studies», съ 1913 г. — «Studies in the Social Sciences») получать новую болѣе научную серію «Illinois Biological Monographs».

Положено передать для отвѣта Директору II Отдѣленія Библіотеки.

Избранный 29 декабря 1915 года въ члены-корреспонденты Академіи С. К. Костинскій прислалъ на имя Непремѣннаго Секретаря письмо съ изъявленіемъ глубокой благодарности за оказанное Академіей вниманіе къ его ученымъ заслугамъ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Владимиръ Павловичъ Науменко при письмѣ отъ 13 декабря 1915 г. прислалъ въ Академію рукопись Н. П. Огарева.

Директоръ I Отдѣленія Библіотеки доложилъ, что рукопись получена.

Положено благодарить жертвователя.

Непремѣнный Секретарь доложилъ дополнительный списокъ предметовъ, переданныхъ въ Императорскую Академію Наукъ изъ наслѣдства въ Бозѣ почивающаго Августѣйшаго Президента, при чемъ просилъ томъ переписки съ Вице-Президентомъ Л. Н. Майковымъ передать въ Архивъ Конференціи, а остальное въ Рукописное Отдѣленіе.

Положено передать томъ переписки съ Л. Н. Майковымъ въ Архивъ, остальныя предметы — въ Рукописное Отдѣленіе, а списокъ напечатать во II приложеніи къ настоящему протоколу.

Рыбинское Отдѣленіе Ярославскаго Естественно-Историческаго Общества прислало въ даръ Академіи выпускъ 1 своихъ «Извѣстій» (Ярославль. 1915 г.) и просило о высылкѣ въ обмѣнъ изданій Академіи.

Положено благодарить Рыбинское Отдѣленіе, книгу передать въ I Отдѣленіе Библіотеки и просить Рыбинское Отдѣленіе сообщить, какія изъ изданій Академіи Отдѣленіе желало бы получить.

II-е приложеніе къ протоколу I засѣданія Общаго Собранія Императорской Академіи Наукъ 9 января 1916 года.

Дополнительный списокъ предметовъ, переданныхъ въ Императорскую Академію Наукъ на основаніи завѣщанія въ Бозѣ почившаго Великаго Князя Константина Константиновича.

1) Переписка Великаго Князя съ писателями:

2 тома переписки съ А. А. Шеншинымъ-Фетомъ.
2 » » » Я. П. Полонскимъ.
1 томъ » » Н. Н. Страховымъ.
1 » » » П. И. Чайковскимъ.
1 » » » А. Н. Майковымъ.
1 » » » И. А. Гончаровымъ.
1 » » » Л. Н. Майковымъ.

2) 7 черновыхъ тетрадей литературныхъ трудовъ Великаго Князя.

3) Связка ключей отъ 66 дневниковъ Великаго Князя.

Означенные предметы доставлены мною господину Непремѣнному Секретарю 9 декабря 1915 года, при чемъ, по его распоряженію, ключи отъ дневниковъ опечатаны печатью Императорской Академіи Наукъ и приняты мною на храненіе въ кассѣ Правленія, а одинъ ключъ отъ одной изъ черновыхъ тетрадей литературныхъ трудовъ принятъ на храненіе въ особомъ, незапечатанномъ пакетѣ.

Чиновникъ особыхъ порученій и казначей
Императорской Академіи Наукъ Вл. Рышковъ.

Удостовѣряю:
Непремѣнный Секретарь Сергѣй Ольденбургъ.

ОТДѢЛЕНІЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

I засѣданіе, 20 января 1916 года.

Метеорологическая Обсерваторія Императорскаго Юрьевскаго Университета «закончивъ 50-лѣтіе своей дѣятельности и вступая 1 января новаго стиля 1916 г. въ 11-ый люстръ», прислала на имя Академіи привѣтствіе.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ В. И. Вернадскій доложилъ, что за подписью Вице-Президента и Непремѣннаго Секретаря была 18 декабря за № 2459 послана привѣтственная телеграмма.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Тургайскій Губернаторъ отношеніемъ отъ 26 ноября 1915 г. за № 19820 увѣдомилъ Академію на № 2123, что соотвѣтствующія распоряженія чинамъ полиціи Высочайше ввѣренной ему области о принятіи мѣръ къ предупрежденію самовольныхъ раскопокъ остатковъ третичныхъ млекопитающихъ имъ одновременно съ симъ сдѣланы.

Положено принять къ свѣдѣнію и сообщить академику Н. И. Андрусову.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью О. Банахевича (Th. Banachiewicz) «Sur la résolution de l'équation de Gauss dans la détermination d'une orbite planétaire» (Къ рѣшенію уравненія Гаусса при опредѣленіи планетныхъ орбитъ).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью М. Вильева «Изслѣдованіе траекторіи свободно-падающаго въ пустотѣ тѣла» (M. Viljev. Recherches sur la trajectoire du corps libre tombant dans le vide).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Г. А. Тихова «Продольный спектрографъ (Предварительное сообщеніе)» [G. A. Tikhoff (Tichov). Spectrographe longitudinal (Note préliminaire)].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью С. К. Костинскаго (S. K. Kostinskij) «Графическій способъ вычисленія постоянныхъ на астрофотографическихъ снимкахъ» (Une méthode graphique du calcul des constantes sur les clichés astrophotographiques).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. П. Карпинскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ», въ серіи «Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи 1900—1903 гг.» работу О. О. Баклунда «Кристаллическія породы сѣвернаго побережья Таймырскаго полуострова» (H. Backlund. Les roches cristallines du littoral septentrional de la Sibérie. II. Les roches du littoral occidental de la presqu'île Tajmyr).

Къ статьѣ приложены карта, 6 таблицъ и 15 рисунковъ въ текстѣ.

Положено напечатать въ «Запискахъ», въ серіи «Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи 1900—1903 гг.».

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. Н. Крылова «О расчетѣ объективовъ, составленныхъ изъ двухъ линзъ» (A. N. Krylov. Sur le calcul des objectifs composés de deux lentilles).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Созрѣваніе и оплодотвореніе яйца *Salpa maxima-africana*» (La maturation et fécondation de l'oeuf de *Salpa maxima-africana*).

Къ статьѣ приложены 16 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. М. Ляпуновъ [A. Liapounoff (Lïapunov)] доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes d'un liquide homogène en rotation» (Объ уравненіяхъ, принадлежащихъ поверхностямъ производныхъ отъ эллипсоидовъ формъ равновѣсія вращающейся жидкости).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи «Краткій отчетъ Б. Н. Городкова о совершенной въ 1915 г. поѣздкѣ въ Ляпинскій край Тобольской губерніи» (Rapport préliminaire sur une excursion dans la contrée de Liapine du gouvernement Tobolsk en 1915).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея», вып. XVI, статью В. Бротеруса, О. Кузеневой и Н. Прохорова «Списокъ мховъ изъ Амурской и Якутской областей» (V. Brotherus, O. Kuzeneva et N. Prochorov. Liste des mousses des provinces d'Amour et de Jakutsk).

Къ статьѣ приложены 7 таблицъ.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ И. П. Бородинъ просилъ разрѣшенія приложить къ ближайшему выпуску «Schedae ad Herbarium Florae Rossicae» таблицу, изображающую видъ ревеня.

Разрѣшено, о чемъ положено сообщить академику И. П. Бородину.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Н. Шадлуна «О маржелановскомъ «пахучемъ» доломитѣ» (N. Šadlun. Sur le dolomite fétide de Marjelan).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Л. Л. Иванова «Кальцитъ, кварцъ и прохлоритъ съ Кавказа» (L. L. Ivanov. Sur le calcite, quartz et prochlorite du Caucase).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. Шубникова «Къ вопросу о строеніи кристалловъ. I» (A. Šubnikov. Sur la structure des cristaux. I).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью профессора П. А. Землятченскаго «Фельдшпатизація известняковъ. I» (P. A. Zemĭatčenskij. Sur la feldspatisation des calcaires. I).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Е. С. Федорова «Химическая сторона кристаллическаго строенія» (Le côté chimique de la structure cristalline).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія отдѣльной брошюрой работу О. Іона «Наставленіе къ собиранію термитовъ» (O. John. Instruction pour la collection des termites).

Положено напечатать отдѣльной брошюрой.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью прапорщика А. В. Мартынова «Замѣтка о фаунѣ *Trichoptera* Крыма» (A. V. Martynov. Notice sur la faune des *Trichoptères* de la Crimée).

Къ статьѣ приложены 22 рисунка.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью А. А. Бирули «Матеріалы по систематикѣ и географическому распространенію млекопитающихъ. VI. О расахъ *Otocolobus manul* (Pallas) и о положеніи его въ системѣ сем. *Felidae*» (A. Birula. Contribution à la classification et à la distribution géographique des mammifères. VI. Sur la position d'*Otocolobus manul* (Pallas) dans le système de la famille *Felidae* et sur ses races).

Къ статьѣ приложены 8 рисунковъ и 3 таблицы.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. Беклемишева «Рѣсничные черви, собранные лѣтомъ 1915 г. въ Калужской губ.» (V. Beklemišev. Turbellaries, collectionnés dans le gouvernement de Kalouga, en été 1915).

Къ статьѣ приложены 12 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью М. Н. Павленко «*Gersemia askoldi* sp. n. изъ Сѣверо-Японскаго моря» [M. N. Pavlenko. *Gersemia askoldi* sp. n. de la mer Japonaise septentrionale (Alcyonacea, Nephthyidae)].

Къ статьѣ приложены 3 таблицы.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. Редикорцева на англійскомъ языкѣ [Dr. V. Redikorzev (Redikorcev)] «*Diandrocarpa okai* nov. sp.» (*Diandrocarpa okai* nov. sp.).

Къ статьѣ приложенъ 1 рисунокъ.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ В. А. Стекловъ [W. Stekloff (V. Steklov)] доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Sur la théorie de fermeture» (Къ теоріи замкнутости).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ (Сообщеніе первое)» [W. Stekloff (V. Steklov)] «Sur le calcul approché des intégrales définis à l'aide des quadratures dites mécaniques».

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. П. Иванова «Фауна позвоночныхъ въ верхнесарматскихъ отложеніяхъ Ставропольской губерніи» (A. P. Ivanov. Sur la faune des vertebrés dans le sarmatique supérieur du gouvernement de Stavropol).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью П. А. Православлева «Къ вопросу о плечевомъ поясѣ у *Elasmosaurus* Cop. (P. A. Pravoslavlev. Sur la question de cingulum extremitatis thoracicae d'Elasmosaurus).

Къ статьѣ приложена одна двойная (фототипическая) таблица.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Трубки червей изъ сем. *Amphictenidae* въ русскомъ міоценѣ» (N. I. Andrusov. Sur les tubes des annélides de la famille des *Amphicténides* du miocène russe).

Къ статьѣ приложена 1 фототипическая таблица.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. Благовѣщенскаго «Изслѣдованія надъ созрѣваніемъ сѣмянъ. I». (A. Blagověščenskij. Recherches sur la maturation des graines. I.).

Къ статьѣ приложенъ 1 рисунокъ въ текстѣ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью В. И. Палладина и Е. И. Ловчиновской. «Вліяніе спирта и метиленовой синьки на выдѣленіе углекислоты убитыми дрожжами». (W. Palladin et E. Lovčinovskaja. Influence de l'alcool et du bleu de methylène sur le dégagement de l'acide carbonique par la levûre tuée).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью В. И. Палладина и Д. А. Сабинина. «Разложеніе молочной кислоты дрожжами. (W. Palladin et D. Sabinin. Sur la décomposition de l'acide lactique par la levûre tuée).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. П. Карпинскій заявилъ о просьбѣ членовъ Комиссіи по преподаванію математики въ средней школѣ выразить благодарность членамъ-корреспондентамъ Д. К. Бобылеву, А. Н. Крылову и Н. Я. Цингеру, принимавшимъ участіе въ работахъ этой Комиссіи.

Положено выразить благодарность Д. К. Бобылеву, А. Н. Крылову и Н. Я. Цингеру.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ свой трудъ «О радіоактивныхъ химическихъ элементахъ въ земной корѣ», напечатанный въ журналѣ «Практическая Медицина». Петроградъ 1915 г. т. III.

Положено передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ Н. И. Андрусовъ довелъ до свѣдѣнія Отдѣленія, что онъ жертвуетъ Геологическому Отдѣленію Музея слѣдующіе предметы:

1) пантографъ Перрона, инструментъ для автоматическаго высверливанія рельефныхъ картъ по топографическимъ планшетамъ, стоимостью въ 1094 франка;

2) точный пантографъ для перечерчиванія картъ работы Отта, стоимостью около 300 марокъ и

3) гибкій валъ, стоимостью около 30 марокъ. Приспособленный для препаровки окаменѣлости.

Отдѣленіе выразило академику Н. И. Андрусову глубокую благодарность.

Академикъ Н. И. Андрусовъ читалъ:

«Геологическій и Минералогическій Музей Императорской Академіи Наукъ черезъ посредство Главнаго Гидрографическаго Управленія Морского Вѣдомства получилъ новые матеріалы по геологіи сѣвернаго побережья Сибири, собранные въ 1914—15 гг. докторомъ Л. М. Старокадомскимъ и другими членами Гидрографической Экспедиціи Сѣвернаго Ледовитаго Океана, состоявшей подъ начальствомъ флигель-адъютанта, капитана 2-го ранга Б. А. Вилькицкаго.

«Среди матеріаловъ (по изслѣдованію ученаго хранителя О. О. Баклунда) выдѣляются:

«1) Анкилониты и смежныя съ ними базальтовыя породы со вновь открытаго острова ($\varphi = 76°7'N$, $\lambda = 153°1'E$) къ сѣверу отъ острова генерала Вилькицкаго.

«2) Рядъ метаморфическихъ породъ изъ западной береговой полосы полуострова Челюскина, отъ 76°30′ до 77°33′ сѣверной широты, слѣдовательно съ залива Толль на югѣ до острововъ Ферилея на сѣверѣ; отсюда же можно отмѣтить образцы роговообманковаго гранита съ контактовыми съ ними породами.

«3) Образцы сѣраго двуслюдяного гранита изъ области зимовки Русской Полярной Экспедиціи. Образцы этой породы отчасти собраны на морскомъ льду, въ значительномъ разстояніи отъ коренныхъ выходовъ (напр. подъ 76°54′ сѣверной широты и 100°13′ восточной долготы, между тѣмъ какъ наиболѣе выдвинутое на востокъ коренное мѣсторожденіе этого гранита, по матеріаламъ Русской Полярной Экспедиціи, находится подъ 77°30′ восточной долготы).

«4) Раковины (изъ гр. *Myatruncata* и другіе пластинчатожаберные и брюхоногіе молюски) четвертичной морской трансгрессіи, найденные въ значительномъ разстояніи отъ современнаго морского берега, а именно съ «большого хребта», мѣстоположеніе котораго ближе не указано, и съ праваго берега р. Пясины, въ разстояніи 250 миль отъ берега. На первомъ изъ указанныхъ двухъ мѣстонахожденій найдены, кромѣ того, обломки бураго угля (лигнита) и черный и полосатый доломитовый известняки. Четвертичные остатки съ р. Пясины имѣютъ отчасти характеръ «иматровскихъ камней».

«Въ виду того, что въ настоящее время закончена обработка геологическаго матеріала Русской Полярной Экспедиціи, касающагося именно этихъ частей сѣвернаго сибирскаго побережья и поступившій нынѣ матеріалъ изъ полосы береговой вполнѣ потверждаетъ выводы, къ которымъ пришелъ О. О. Баклундъ при обработкѣ матеріала, то покорнѣйше прошу Академію, не найдетъ ли она возможнымъ войти въ сношеніе съ Главнымъ Гидрографическимъ Управленіемъ Морского Вѣдомства о предоставленіи О. О. Баклунду временно, если возможно даже до окончательной выработки картографическихъ матеріаловъ Гидрографической Экспедиціи, съемки западнаго побережья полуострова Челюскина, въ масштабѣ карты Таймыра, уже публикованной по съемкамъ 1913 года, отъ мыса Челюскина до залива Толля, дабы онъ могъ включить эту исправленную береговую линію съ геологическими датами Гидрографической Экспедиціи въ печатающую карту распредѣленія горныхъ породъ этой части сибирскаго побережья.

«Вмѣстѣ съ тѣмъ прошу Академію выразить Главному Гидрографическому Управленію и доктору Л. М. Старокадомскому благодарность за тщательно собранный и этикетированный матеріалъ».

Положено возбудить соотвѣтствующее ходатайство предъ Главнымъ Гидрографическимъ Управленіемъ и благодарить названное Управленіе и доктора Л. М. Старокадомскаго.

II засѣданіе, 3 февраля 1916 года.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что 28 января въ Петроградѣ скончался на 74 году жизни членъ-корреспондентъ Академіи по разряду физическому (съ 29 декабря 1910 года) Александръ Ивановичъ Воейковъ.

Некрологъ покойнаго читалъ академикъ М. А. Рыкачевъ.

Память покойнаго почтена вставаніемъ.

Положено напечатать некрологъ, съ портретомъ А. И. Воейкова, въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ О. А. Баклундъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью на англійскомъ языкѣ: O. Backlund. «Formula for determining periods from observations of periodical phenomena». (Простыя формулы для гармоническихъ изслѣдованій).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Сегментація яйца *Salpa fusiformis*» (V. Zalenskij. Segmentation des oeufs de *Salpa fusiformis)*.

Къ статьѣ приложено 12 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью С. Ѳ. Дмитріева «Къ циклу развитія *Phyllachora Podagrariae* (Roth) Fuckel и *Septoria Chelidonii* Desm.» [S. F. Dmitriev. Sur le cycle évolutif de *Phyllachora Podagrariae* (Roth) Fuckel et *Septoria Chelidonii* Desm.].

Къ статьѣ приложено 6 рисунковъ на 1 таблицѣ.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Е. С. Федорова «Основной законъ кристаллохиміи» (E. S. Fedorov. La loi fondamentale de la crystallochimie).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Е. С. Федорова «Результаты первой стадіи экспериментальнаго изслѣдованія структуры кристалловъ» (E. S. Fedorov. Premiers résultats de l'étude expérimentale de la structure des cristaux).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. И. Мейснера «Рыбный промыселъ въ Семирѣченской области и его возможное будущее».

Положено согласно постановленію ОС. напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью И. И. Сущинскаго «Руды вольфрама и олова въ Россіи».

Къ статьѣ приложены 3 рисунка и 3 таблицы.

Положено напечатать статью въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» согласно постановленію ОС. въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью Е. В. Еремина «Соединенія барія въ Россіи».

Къ статьѣ приложенъ 1 рисунокъ.

Положено согласно постановленію ОС. напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. Л. Комарова «Что сдѣлано въ Россія въ 1915 году по культурѣ лекарственныхъ растеній».

Положено согласно постановленію ОС. напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. Г. Хлопина «Литій и его соединенія, ихъ техническое примѣненіе и нахожденіе въ русскихъ минералахъ».

Положено согласно постановленію ОС. напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. Ч. Дорогостайскаго «Къ распространенію и образу жизни дикихъ барановъ и козловъ въ Сѣверозападной Монголіи» (V. Č. Dorogostajskij. Contributions à la connaissance de la distribution et du

genre de vie des moutons et des chèvres sauvages de la Mongolie septentrionale-occidentale).

Къ статьѣ приложено 6 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія статью В. Ч. Дорогостайскаго: «Матеріалы для карцинологической фауны озера Байкала» (V. Č. Dorogostajskij. Contributions à la faune carcinologique du lac Baïcal).

Къ статьѣ приложены 2 таблицы.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью W. Stekloff (V. Steklov) «Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture» (Нѣсколько дополнительныхъ замѣчаній, относящихся къ теоріи замкнутости).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. А. Борисяка «О зубномъ аппаратѣ индрикотерія» (A. A. Borisĭak. Sur l'appareil dentaire du genre Indricotherium).

Къ статьѣ приложено 4 рисунка.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью В. Арциховскаго и Ѳ. Шелякина: «Дѣйствіе крѣпкихъ растворовъ ядовитыхъ веществъ на растительныя клѣточки» (V. Arcichovskij et F. Šelĭakin. Action des solutions concentrées des substances toxiques sur les cellules végétales).

Къ статьѣ приложены 1 рисунокъ и 1 цвѣтная таблица.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Вліяніе среды на протеолитическіе ферменты растеній» (W. I. Palladin. Influence du milieu sur les ferments protéolitiques des plantes).

Къ статьѣ приложенъ 1 рисунокъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ читалъ докладъ «Освобожденіе отъ льдовъ экспедиціи Вилькицкаго, въ связи съ синоптическимъ характеромъ зимы и лѣта 1915 г.»

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ представилъ Отдѣленію слѣдующіе выпуски Лѣтописей Николаевской Главной Физической Обсерваторіи и филіальныхъ Обсерваторій за 1914 годъ:

Изданія Николаевской Главной Физической Обсерваторіи.

I. 2-ой выпускъ Лѣтописей, содержащій наблюденія метеорологическихъ станцій сѣти Николаевской Главной Физической Обсерваторіи надъ атмосферными осадками, грозами, снѣговымъ покровомъ и вскрытіемъ и замерзаніемъ водъ.

II. Вполнѣ оконченъ печатаніемъ и выйдетъ завтра 4-ый выпускъ Лѣтописей, въ который вошли подробныя таблицы наблюденій 62 станцій II разряда сѣти Николаевской Главной Физической Обсерваторіи.

Изданія Иркутской Магнитно-Метеорологической Обсерваторіи.

III. 2-ой выпускъ Лѣтописей, содержащій наблюденія метеорологическихъ станцій сѣти Иркутской Обсерваторіи надъ атмосферными осадками, грозами, снѣговымъ покровомъ и вскрытіемъ и замерзаніемъ водъ.

IV. 4-ый выпускъ Лѣтописей, содержащій подробныя таблицы метеорологическихъ наблюденій метеорологическихъ станцій сѣти Иркутской Обсерваторіи по международной системѣ станцій II разряда.

Изданія Екатеринбургской Магнитно-Метеорологической Обсерваторіи.

V. 1-ый выпускъ Лѣтописей, содержащій наблюденія Екатеринбургской Обсерваторіи.

VI. 5-ый выпускъ Лѣтописей, содержащій дополнительныя наблюденія станцій II разряда сѣти Екатеринбургской Обсерваторіи.

Изданіе Владивостокской Метеорологической Обсерваторіи.

VII. Всѣ выпуски (въ одномъ томѣ) Лѣтописей, содержащіе наблюденія метеорологическихъ станцій района Владивостокской Обсерваторіи.

Изданіе Тифлисской Физической Обсерваторіи.

VIII. 4-ый выпускъ Лѣтописей, содержащій подробныя таблицы наблюденій метеорологическихъ станцій сѣти Тифлисской Обсерваторіи по международной системѣ станцій II разряда.

«Печатаніе остальныхъ выпусковъ Лѣтописей задержано по обстоятельствамъ военнаго времени, но въ настоящее время приняты всѣ мѣры къ ускоренію выхода въ свѣтъ этихъ выпусковъ.

«Какъ я уже имѣлъ честь доложить Отдѣленію, надѣюсь достигнуть такого порядка, что Лѣтописи за отчетный годъ выпускаются въ свѣтъ не позже конца слѣдующаго года. Предполагаю, что въ серединѣ будущаго года выйдутъ Лѣтописи

за 1912 и 1913 гг. и этимъ окончательно заполнится образовавшійся пробѣлъ въ печатаніи «Лѣтописей».

Положено принять къ свѣдѣнію, отмѣтивъ скорость выхода выпусковъ «Лѣтописей» Обсерваторіи.

III засѣданіе, 17 февраля 1916 года.

Академикъ А. А. Марковъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью: «Объ одномъ примѣненіи статистическаго метода» (A. A. Markov. Sur une application de la méthode statistique).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О зародышевыхъ листахъ сальпъ» (V. V. Zalenskij Sur les feuilles embryonaires des Salpes).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ О. А. Баклундъ заявилъ объ открытіи адъюнктъ-астрономомъ Г. Н. Неуйминымъ въ Обсерваторіи въ Симеизѣ въ Крыму новой 4-ой кометы (14-ой величины).

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ читалъ:

«Въ отчетѣ о дѣятельности Академіи за 1915 г. на страницѣ 260 въ перечнѣ ученыхъ трудовъ персонала Обсерваторіи подъ № 9 ошибочно приведена статья А. В. Вознесенскаго: «Вліяніе метеорологическихъ факторовъ на безпроволочное телеграфированіе». Такъ какъ статья эта не принадлежитъ директору Иркутской Обсерваторіи А. В. Вознесенскому, а постороннему Обсерваторіи лицу, то она должна быть выключена изъ списка трудовъ персонала Обсерваторіи, о чемъ покорнѣйше прошу указать въ протоколахъ Конференціи и въ извлеченіяхъ изъ протоколовъ, печатающихся въ «Извѣстіяхъ» Академіи».

Положено напечатать въ извлеченіяхъ изъ протоколовъ въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. И. Андрусовъ представилъ Отдѣленію Томъ I (6 №№) «Геологическаго Вѣстника», издаваемый группой геологовъ подъ общей его редакціей. Въ этомъ журналѣ помѣщены слѣдующія статьи его: «Вулканическія явленія апшеронскаго вѣка» (№ 2), «Онкоиды и стратоиды» (№ 3), «Стратиграфическая схема Апшеронскаго полуострова», и рядъ рефератовъ.

Положено принять къ свѣдѣнію, а книги передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

ОТДѢЛЕНІЕ РУССКАГО ЯЗЫКА И СЛОВЕСНОСТИ.

XIII засѣданіе, 3 октября 1915 года.

Представительство Отдѣленія въ Комиссіи по охраненію памятниковъ положено усилить избраніемъ въ нее акад. В. Н. Перетца, о чемъ и сообщить г. Непремѣнному Секретарю.

Акад. В. Н. Перетцъ сдѣлалъ нижеслѣдующее заявленіе:

«Во время лѣтней поѣздки въ Кіевъ, мною при участіи и сотрудничествѣ нѣкоторыхъ студентовъ Университета была описана библіотека Выдубицкаго монастыря, собственно — рукописи и старопечатныя славянскія книги, вышедшія въ свѣтъ до 1800 года. Одновременно изъ рукописей, принадлежащихъ другимъ библіотекамъ г. Кіева были сдѣланы извлеченія; полагая, что какъ та, такъ и другая часть работы могли бы быть полезны историкамъ древней русской литературы, я намѣренъ выпустить въ свѣтъ отчетъ о поѣздкѣ».

XIV засѣданіе, 19 октября 1915 года.

Акад. В. Н. Перетцъ сообщилъ слѣдующее:

«Магистрантъ Кіевскаго Университета В. П. Адріанова проситъ меня передать въ даръ Отдѣленію русск. яз. и слов. Имп. Академіи Наукъ прилагаемые при семъ документы, пріобрѣтенные ею въ Кіевѣ у букинистовъ. Документы эти относятся къ XVIII в., а нѣкоторые—печатные—листки XIX в. Повидимому, эти документы ведутъ происхожденіе изъ какого то разореннаго архива, возможно — губернскаго Кіевскаго. 18 октября 1915».

Положено благодарить В. П. Адріанову, а документы передать въ Рукописный Отдѣлъ Библіотеки.

XV засѣданіе, 7 ноября 1915 года.

Д. К. Зеленинъ обратился къ Отдѣленію съ слѣдующей просьбой:

«Въ предстоящемъ 1916-мъ году я хотѣлъ бы напечатать начатую мною четыре года тому назадъ и теперь законченную работу подъ заглавіемъ: «Плетеная обувь (лапти) у русскаго народа и его сосѣдей».

«Многочисленные виды русской плетеной обуви (напр.: коверзни, чухорни, лапти пятерные, писаные, пестренькие, лапти съ ушниками, съ опушникомъ, частоковырчатые, «татарскіе»; лапти на колодкахъ, подшитые; ступни, чуни; лапти изъ весьма разнообразнаго матеріала) до сихъ поръ не изучены. Даже самые типы русскаго лапотнаго плетенія не описаны, и это древнѣйшее искусство грозитъ вымереть, не замѣченное русской этнографіей.

«Русская терминологія лапотнаго дѣла весьма богата и любопытна для языковѣдовъ. Упомяну хотя бы названія: вéрзни, кóверзни; виря́ть, врать, ковыря́ть; кочетóкъ, кочеды́къ, коточи́къ, котáчъ, калачи́къ: чу́хорни, чу́хни, чу́ни: обóры, заборса́ть; похлопни́; лапотныя стрóки. Безъ изслѣдованія соотвѣтствующихъ предметовъ, эта терминологія (которой въ моемъ трудѣ посвящена особая глава) не можетъ быть вполнѣ выяснена и въ языковомъ отношеніи.

«Наконецъ, современная картина географическаго распространенія разныхъ видовъ плетеной обуви отражаетъ, до извѣстной степени, картину географическаго распредѣленія разныхъ племенъ въ глубокой древности, когда народное искусство плетенія только еще развивалось.

«Я не могу теперь же представить въ Отдѣленіе рукопись своей работы: она еще на-бѣло не переписана, и прежде переписки потребуется изготовить до сорока рисунковъ (виды лаптей, типы плетенія, орудія работы) съ предметовъ изъ собранной мною и мнѣ принадлежащей лапотной коллекціи. Если Отдѣленіе найдетъ возможнымъ принять мою работу для напечатанья въ «Сборникѣ», то я обязуюсь представить совершенно готовую къ печати рукопись не позднѣе какъ черезъ мѣсяцъ.

«Размѣръ работы: около 20-ти печатныхъ листовъ и до 40 мелкихъ рисунковъ, которые могутъ быть собраны въ десять особыхъ таблицъ. Ноябрь 1915 года».

Положено имѣть сужденіе при составленіи Типографской смѣты на 1916 годъ.

Студентъ С. А. Еремин представилъ въ собственность Академіи вывезенные имъ изъ Череповецкаго уѣзда: 1) Канонникъ, печатн. 2) Евангеліе отъ Матѳея на корельскомъ языкѣ и 3) Два столбца 1700 года.

Положено передать ихъ въ Библіотеку, а г. Еремина благодарить.

А. П. Мацкевичъ прислалъ въ даръ Академіи два своихъ рукописныхъ стихотворенія: «Памяти убитаго корнета Князя Олега Константиновича» и «Къ открытію памятника Императору Александру III въ Москвѣ».

Положено благодарить.

А. М. Шейнъ-Фогель прислалъ три своихъ печатныхъ труда: «Къ реформѣ ороографіи. Открытое письмо всѣмъ педагогамъ по поводу изъятія нѣкоторыхъ буквъ изъ русскаго алфавита» (Тифлисъ, 1904), «Русская грамматика обработанная на новыхъ началахъ старо-давняго происхожденія. Фонетика или Тонетика» (Тифлисъ, 1907) и «Міровая и международная азбука въ трехъ шрифтахъ и между-

народные склады» (Тифлисъ, 1913), а также свою обстоятельную записку (въ рукописномъ видѣ) съ изложеніемъ результатовъ своихъ наблюденій надъ русскимъ письмомъ.

Положено благодарить автора за присылку книгъ и передать ихъ въ акад. Библіотеку.

XVI засѣданіе, 23 ноября 1915 года.

Представлены для напечатанія въ Сборникѣ Отдѣленія русскаго языка и словесности письма Н. И. Пирогова къ В. Н. Пирогову, приготовленныя къ изданію С. Я. Штрайхомъ.

Положено передать оригиналъ въ Типографію и внести въ Типографскую смѣту на 1916 годъ.

XVII засѣданіе, 5 декабря 1915 года.

Доложено нижеслѣдующее отношеніе Ректора Императорскаго Московскаго Университета:

«Въ дополненіе къ отношенію моему отъ 10 марта 1915 года, за № 1280, имѣю честь сообщить, что публичное собраніе Императорскаго Московскаго Университета, посвященное чествованію памяти покойнаго Почетнаго члена и заслуженнаго профессора сего Университета, академика Өедора Евгеніевича Корша, предположено въ день годовщины смерти его, 16 февраля 1916 года.

«Сообщая о семъ, имѣю честь покорнѣйше просить Отдѣленіе русскаго языка и словесности командировать своихъ представителей на означенное собраніе къ вышеуказанному дню, а о лицахъ, кои будутъ командированы и о предполагаемыхъ докладахъ, благоволить увѣдомить меня заблаговременно».

Положено сообщить, что представителями Отдѣленія въ публичномъ собраніи Императорскаго Московскаго Университета 16 февраля 1916 г. будутъ академики А. И. Соболевскій и А. А. Шахматовъ.

Положено сообщить Общему Собранію слѣдующее предположеніе объ объявленіи конкурса на соисканіе премій имени А. П. Неустроева:

«Въ виду непредставленія къ 1915 г. сочиненій на премію А. Н. Неустроева Отдѣленіе русскаго языка и словесности предлагаетъ объявить 1 марта 1916 г. конкурсъ на срокъ 1 марта 1920 г. за составленіе «Историческаго разысканія о русскихъ повременныхъ изданіяхъ и сборникахъ за 1813—1850 гг.» по той же формѣ, какая была принята г. Неустроевымъ при составленіи подобнаго сборника за время 1703—1802 гг., другую же часть пожертвованной А. Н. Неустроевымъ суммы, т. е. 500 рублей, Отдѣленіе предполагало бы опредѣлить за составленіе такого же разысканія за время съ 1803—1812 годъ. Сумма, образовавшаяся изъ процентовъ,

наросшихъ на капиталъ въ 1250 руб., согласно съ постановленіемъ Общаго Собранія 2 ноября 1896 года, образуетъ особый капиталъ, изъ котораго съ наростающими на него процентами составляется особая премія въ 300 рублей за составленіе указателя къ С.-Петербургскимъ и Московскимъ Вѣдомостямъ съ 1703 по 1850 годъ, по формѣ сдѣланнаго г. Неустроевымъ Указателя».

Акад. В. Н. Перетцъ внесъ слѣдующее предложеніе:

«Честь имѣю представить Отдѣленію нижеслѣдующія соображенія по вопросу, который, какъ мнѣ кажется, не безразличенъ для лицъ, занимающихся исторіей древней русской литературы, которымъ Отдѣленіе своимъ авторитетнымъ руководствомъ могло бы принести пользу и подвинуть и облегчить разработку отдѣльныхъ вопросовъ исторіи древне-русской литературы съ начала ея — до эпохи непосредственнаго соприкосновенія съ Западомъ (приблизит. полов. XVIII в.). Я разумѣю составленіе историко-литературной библіографіи, при томъ не по типу, господствующему у насъ (вродѣ труда Мезьеръ, Межова и т. п.), а библіографіи толковой (raisonnée), которая, помимо свѣдѣній о томъ, гдѣ напечатаны тѣ или иныя статьи, изслѣдованія, замѣчанія о томъ или иномъ писателѣ или произведеніи (если оно анонимно) — должна заключать въ себѣ краткое *резюме* того, что сдѣлано для освѣщенія того или иного литературнаго явленія. Для созданія такой библіографіи необходимо тщательное разсмотрѣніе періодическихъ изданій (начиная хотя бы съ Др. Росс. Вивл.), отдѣльныхъ изданій трудовъ древне-русскихъ писателей и изслѣдованій о нихъ и цѣлыхъ эпохахъ.

«Достаточно полно составленная библіографія по такому плану — значительно облегчитъ первые шаги многихъ начинающихъ ученыхъ, а для старшаго поколѣнія можетъ послужить небезполезной справочной книгой. Конечно, подобная работа не выполнима въ короткій срокъ и требуетъ довольно длительной подготовки и привлеченія лицъ, которыя обладаютъ достаточнымъ опытомъ и запасомъ знаній.

«Надѣясь въ будущемъ привлечь къ такой работѣ болѣе значительное число лицъ, я въ настоящее время могъ бы расчитывать на сотрудничество четверыхъ моихъ магистрантовъ и извѣстнаго Отдѣленію своими работами С. Н. Розанова. Что касается деталей плана подобной толковой библіографіи, то они могутъ быть представлены въ болѣе разработанномъ видѣ въ случаѣ, если Отдѣленіе найдетъ своевременнымъ и умѣстнымъ такое новое предпріятіе. 4 декабря 1915 г.».

Положено принять во вниманіе при составленіи смѣты и просить акад. В. Н. Перетца представить подробный планъ предпринятой работы.

I засѣданіе, 23 января 1916 года.

Профессора В. А. Богородицкій и В. А. Францевъ прислали благодарственныя письма по поводу избранія ихъ членами-корреспондентами Академіи.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Проф. Н. Е. Евсѣевъ представилъ нижеслѣдующія свои соображенія по поводу собиранія географическихъ названій:

«Для различныхъ научныхъ соображеній нужны собранія названій русскихъ географическихъ мѣстъ. И такія собранія для населенныхъ мѣстъ, горъ, рѣкъ и озеръ имѣются, хотя и невсегда совершенныя. Но есть цѣлая категорія географическихъ названій, совершенно не затронутая каталогизаціей — это названія ненаселенныхъ мѣстъ: урочищъ, овраговъ, пустошей, лѣсовъ, равнинъ, холмовъ, косогоровъ, спусковъ, рѣчныхъ бродовъ, скалъ, отдѣльныхъ камней и т. д. Эта категорія названій рѣшительно ускользаетъ отъ вниманія науки, не смотря на то, что по своей природѣ она болѣе устойчива и долговѣчна, чѣмъ группа названій населенныхъ мѣстъ, болѣе склонная приспособляться къ смѣнѣ населенія и другимъ внѣшнимъ историческимъ условіямъ. Въ настоящее время, съ усиленной мобилизаціей земли, при передвиженіи населенія на новыя мѣста по условіямъ хуторскаго и отрубнаго землепользованія, возникаетъ большая опасность, что прежнія географическія названія, особенно ненаселенныхъ мѣстъ, будутъ забыты и безвозвратно затеряны для послѣдующаго времени и для науки.

«Было бы желательно оградить отъ исчезновенія названія незаселенныхъ мѣстъ, и къ этому въ настоящее время представляется удобный случай.

«Центральный Статистическій Комитетъ предполагаетъ произвести статистическое обслѣдованіе земельной собственности въ Россіи. Для этого предпріятія въ настоящее время вырабатывается соотвѣтствующая программа. Если бы Отдѣленіе русскаго языка и словесности Имп. Академіи Наукъ признало возможнымъ просить Центральный Статистическій Комитетъ включить въ свою программу запись всѣхъ незаселенныхъ географическихъ названій, связанныхъ по существу съ современнымъ землевладѣніемъ и землепользованіемъ, то, можетъ быть, русская наука пріобрѣла бы для себя значительный словарный матеріалъ собственныхъ именъ весьма немаловажнаго значенія». 30 сентября.

Положено возбудить соотвѣтствующее ходатайство передъ Центральнымъ Статистическимъ Комитетомъ, препроводивъ ему въ копіи записку проф. Евсѣева.

Проф. П. А. Лавровъ представилъ сборникъ текстовъ, относящихся къ жизни и дѣятельности славянскихъ первоучителей св. Кирилла и Меѳодія.

Положено препроводить рукопись въ Типографію и включить этотъ трудъ въ Типографскую смѣту 1916 года.

Акад. В. М. Истринъ сообщилъ о близкомъ выходѣ II вып. Памятниковъ древнерусской литературы, содержащаго матеріалы, посвященные житіямъ и сказаніямъ о Борисѣ и Глѣбѣ, и о возможности приступить къ изданію III выпуска, который будетъ содержать текстъ житія Ѳеодосія Печерскаго.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Проф. К. Я. Гротъ письмомъ на имя Предсѣдательствующаго просилъ выяснить, согласно ли будетъ Отдѣленіе издать 4-й томъ Сочиненій П. А. Плетнева, приготовляемый имъ къ печати. Въ 4-й томъ по плану К. Я. Грота должны войти: 1) Біографич. (возможно полный) очеркъ о Пл., 2) Рядъ статей его не вошедшихъ въ первые два тома; біограф. очерки (или некрологи), извлеч. изъ его Отчетовъ (по Академіи и Университету), 3) Дополненія къ перепискѣ его съ (Пушк.), Вяземскимъ и Жуковскимъ; письма къ Гоголю, 4) Письма Плетнева къ Баратынскому, Гнѣдичу, Кюхельбекеру, Ө. Н. Глинкѣ, Смирновой, Конгезу, Никитину, Данилевскому, Погодину, Коссовичу, Максимовичу, Іордану и проч., 5) Дополненія: а) Письма къ Плетневу извѣстныхъ литераторовъ и дѣятелей, б) Нѣкотор. біограф. матеріалы.

Положено сообщить К. Я. Гроту о согласіи Отдѣленія на предложенное имъ изданіе.

Доложено ходатайство Д. К. Зеленина о напечатаніи его работы, относящейся къ этнографіи лаптя и лапотнаго дѣла.

Положено разрѣшить изданіе этой работы.

Разсмотрѣно предложеніе проф. С. М. Кульбакина объ изданіи Македонскаго Апостола.

Положено извѣстить проф. Кульбакина, что Отдѣленіе согласно приступить къ печатанію текста Македонскаго Апостола въ серіи Памятниковъ старо-славянскаго языка.

В. И. Семенниковъ представилъ отчетъ о своихъ работахъ по библіографіи XVIII в. за прошлый годъ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

ОТДѢЛЕНІЕ ИСТОРИЧЕСКИХЪ НАУКЪ И ФИЛОЛОГІИ.

I засѣданіе, 13 января 1916 года.

Петроградская Губернская Земская Управа отношеніемъ отъ 8 декабря 1915 года за № 81/9 сообщила Академіи:

«Харьковскій Съѣздъ по статистикѣ народнаго образованія въ 1913 году, остановившись на вопросѣ о пріемахъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста, вынесъ, между прочимъ, такое постановленіе:

««Въ виду того, что пріемы опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста тѣснѣйшимъ образомъ связаны съ рядомъ вопросовъ по движенію населенія и опредѣленіемъ — какъ общаго числа населенія, такъ и его возрастнаго состава, Съѣздъ признаетъ настоятельную необходимость появленія соотвѣтствующихъ научныхъ работъ и на основаніи изложеннаго Съѣздъ:

««а) присоединяется къ пожеланію общеземскаго Московскаго Съѣзда по народному образованію, чтобы подъ руководствомъ Академіи Наукъ были выполнены спеціальныя работы по вопросу о методахъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста, и

««б) высказываетъ пожеланіе, чтобы земскія статистическія бюро, располагающія особенно значительными силами, какъ напримѣръ статистическія организаціи Московской Губернской Земской Управы, включили бы въ программу своихъ работъ детальную разработку того же вопроса — о методахъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста (Пост. 16 іюня)».

«Харьковская Губернская Земская Управа, выполняя порученіе Съѣзда, обратилась 13 января 1914 года въ Императорскую Академію Наукъ съ просьбой выполнить спеціальную научную работу о методахъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста, но, очевидно, въ силу обстоятельствъ времени, Харьковская Губернская Земская Управа отвѣта на эту просьбу не получила.

«Петроградское Губернское Земство приняло на себя обязательство созвать второй Съѣздъ по статистикѣ народнаго образованія и въ то же время и обязательство подготовить къ Съѣзду всѣ работы, намѣченныя Харьковскимъ Съѣздомъ.

«Считая, что вопросъ о методахъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста требуетъ неотложнаго научнаго разрѣшенія съ тѣмъ, чтобы 2-й Общеземскій Съѣздъ по статистикѣ народнаго образованія, на основаніи этого, сдѣлалъ тѣ или иныя постановленія практическаго характера, Петроградская Губернская Земская Управа

внесла его 20 декабря на обсужденіе подготовительной Комиссіи къ Съѣзду, при чемъ Комиссія сдѣлала постановленіе вновь обратиться съ указанной просьбой къ Императорской Академіи Наукъ.

«Вслѣдствіе этого Губернская Управа обращается къ Императорской Академіи Наукъ съ просьбой не отказать въ принятіи на себя труда по выясненію методовъ опредѣленія числа дѣтей школьнаго возраста.

«О рѣшеніи по сему вопросу Губернская Управа проситъ Императорскую Академію Наукъ — увѣдомить».

Положено препроводить на заключеніе академику М. М. Ковалевскому.

Состоящая подъ Высочайшимъ покровительствомъ Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Георгія Михаиловича Оренбургская ученая Архивная Комиссія отношеніемъ отъ 28 ноября 1915 г. за № 846 сообщила:

«Въ виду того, что въ трудѣ академика Пекарскаго «Жизнь и литературная переписка П. И. Рычкова», на стр. 84 упоминается, что П. И. Рычковъ отправилъ академику Миллеру рядъ чертежей Оренбургскихъ публичныхъ строеній, и эти чертежи, вѣроятно, хранятся въ Архивѣ Академіи, Оренбургская Архивная Комиссія, очень интересуясь этими древними чертежами, проситъ сообщить ей, имѣются ли эти чертежи въ Архивѣ Академіи, и, если имѣются, то не отказать указать способъ ихъ использовать».

При этомъ Непремѣнный Секретарь доложилъ рапортъ завѣдующаго Архивомъ:

«Вслѣдствіе запроса Оренбургской Ученой Архивной Комиссіи отъ 28 ноября 1915 г. за № 846 имѣю честь сообщить, что въ Архивѣ Конференціи не имѣется чертежей Оренбургскихъ публичныхъ строеній, присланныхъ проф. Г. Ф. Миллеру П. И. Рычковымъ при письмѣ отъ 3 іюня 1760 г. и упоминаемыхъ въ трудѣ академика Пекарскаго о Рычковѣ (стр. 84), хотя подлинники писемъ Рычкова къ Миллеру, а среди нихъ и письма отъ 3 іюня 1760 г. хранятся въ Архивѣ. Представляется возможнымъ предположить, что интересующіе Архивную Комиссію чертежи находятся нынѣ въ Архивѣ Министерства Иностранныхъ Дѣлъ въ Москвѣ, среди прочихъ документовъ архива Миллера, принадлежащаго, какъ извѣстно, названному хранилищу.

«Въ Архивѣ Конференціи, въ которомъ, вообще, много цѣнныхъ матеріаловъ объ Оренбургѣ и Оренбургскомъ краѣ, въ картонѣ 123, среди отвѣтовъ различныхъ Губернскихъ Воеводскихъ Канцелярій 1761 года на запросъ Сухопутнаго Шляхетнаго Корпуса о свѣдѣніяхъ, необходимыхъ «для сочиненія вновь Россійскаго Атласа», имѣется отвѣтъ Оренбургской Губернской Канцеляріи отъ 7 іюня 1761 г.; здѣсь находится и отвѣтъ на 25-й пунктъ вопроснаго листа, могущій быть полезнымъ Оренбургской Комиссіи:

«Чертежи какъ города Оренбурга, такъ и протчихъ крепостей находятся въ ведомстве инженерной команды и, по предложенію в Канцелярію Главной Артилеріи и Фортификаціи отъ Его Сіятельства Г.Д.на Генерала-Фелтцейхмейстера надъ форти-

фикаціями въ Россійской Имперіи Оберъ-Директора и Сенатора и кавалера Графа Петра Ивановича Шувалова за показанными въ томъ резонами со оныхъ чертежей копіи отъ той инженерной команды не сообщены».

Положено отвѣтить согласно этому рапорту.

Директоръ Института Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи (Харьковъ) препроводилъ въ Академію при отношеніи отъ 10 декабря 1915 г. за № 8107 три экземпляра объявленій о конкурсѣ на вакантную въ Институтѣ Сельскаго Хозяйства и Лѣсоводства въ Новой Александріи каѳедру политической экономіи и общей статистики, прося о распространеніи ихъ среди лицъ, заинтересованныхъ въ таковыхъ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Настоятель храма села Рышкова (ст. Тарутино, Калужской губ.) священникъ Петръ Н. Богословскій отношеніемъ отъ 24 ноября 1915 г. сообщилъ:

«Въ Боровскомъ уѣздѣ, Калужской епархіи, на границѣ съ Московской, въ селѣ Рышковѣ стоитъ каменный храмъ Царицы Наталіи Кирилловны, доселѣ забытый и исторіей, и археологіей; означенному храму предшествовалъ храмъ деревянный, созданный Великимъ Княземъ Московскимъ Василіемъ III Іоанновичемъ. Царственные Правители изъ рода Рюриковичей и Романовыхъ давали Рышкову свои жалованныя грамоты; одна изъ нихъ мною уже была найдена въ Москвѣ, въ Архивѣ Министерства Иностранныхъ Дѣлъ въ 1901 г. и тогда же напечатана въ Калужской Старинѣ (т. 1, кн. 3, стр. 25).

«Очень бы хотѣлось найти и остальныя грамоты, отобранныя у причта церкви с. Рышкова въ 60-хъ годахъ прошлаго вѣка; 13 ноября 1915 г. въ № 14253 газеты «Новое Время» я прочиталъ, что въ Академіи Наукъ получены цѣнныя грамоты изъ г. Риги; поэтому, я считаю своимъ долгомъ обратиться къ Академіи, какъ самому высшему научному учрежденію, со всепокорнѣйшею просьбою удостоить меня отвѣтомъ, не имѣются ли при Академіи жалованныя храму села Рышкова грамоты и вообще какія-либо цѣнныя свѣдѣнія о селѣ Рышковѣ?».

Положено отвѣтить, что въ присланныхъ изъ Риги грамотахъ нѣтъ ничего относящагося до села Рышкова, относительно же грамотъ, хранящихся въ Рукописномъ Отдѣленіи, отвѣтить послѣ соотвѣтствующей справки.

Отъ имени академика Н. Я. Марра доложено:

«Нарастающее количество лексическихъ матеріаловъ сванскаго языка по вновь обнародываемымъ текстамъ вынуждаетъ меня пріостановить печатаніе «Сванско-русскаго словаря», такъ какъ приходится не только значительно восполнять, но мѣстами и перерабатывать готовую рукопись. Въ то же время прошу Конференцію постановить издать набранную часть словаря словъ, начинающихся гласными, какъ specimen, чтобы использовать ее какъ руководство для собирателей».

Разрѣшено, о чемъ положено увѣдомить академика Н. Я. Марра и Типографію.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи читалъ:

«Отъ командированнаго Музеемъ въ Индію Г. Х. Мерварта получаются подробныя сообщенія, изъ которыхъ видно, что сборы коллекцій производятся очень успѣшно и что наряду съ собираніемъ коллекцій онъ усердно занимается изученіемъ дравидійскихъ языковъ и древнѣйшихъ памятниковъ буддизма на этихъ языкахъ. Столь же усердно и успѣшно работаетъ и командированная вмѣстѣ съ Г. Х. Мервартомъ г-жа Л. А. Мервартъ.

«Въ виду успѣшности работъ индійской экспедиціи и, въ частности, въ виду того, что вслѣдствіе военныхъ обстоятельствъ въ настоящее время въ Индіи пріобрѣтеніе коллекцій возможно съ наименьшими затратами, считаю необходимымъ продолжить пребываніе упомянутыхъ лицъ въ Индіи и потому прошу Отдѣленіе ассигновать изъ суммъ Музея 3000 руб. на сопряженные съ экспедиціей расходы по содержанію упомянутыхъ лицъ и пріобрѣтенію коллекцій, каковую сумму прошу перевести черезъ Кредитную Канцелярію Министерства Финансовъ въ Русское Консульство въ Коломбо сверхштатному этнографу Музея Герману Мерварту».

Положено сообщить для исполненія въ Правленіе до подписанія протокола.

II засѣданіе, 27 января 1916 года.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что Peabody-Museum американской археологіи и этнологіи (Кэмбриджъ, Масс.) увѣдомилъ о кончинѣ Ф. У. Путнама (Frederic Ward Putnam).

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ В. В. Радловъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Б. Я. Владимірцова «О частицахъ отрицанія при повелительномъ наклоненіи въ монгольскомъ языкѣ». (B. J. Vladimircov. Sur les particules prohibitives mongoles).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ С. Ѳ. Ольденбургъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Образцахъ народной словесности монгольскихъ племенъ» текстъ, записанный Б. Я. Владимірцовымъ «Ойратская былина «Дайни-кюрель»». (B. J. Vladimircov. «Daini-Kurel», chant épique oïrate).

Положено напечатать во II томѣ «Образцовъ народной словесности монгольскихъ племенъ».

Академикъ М. А. Дьяконовъ просилъ о напечатаніи въ «Запискахъ» Отдѣленія труда привать-доцента Императорскаго Юрьевскаго Университета Г. А. Замятина «Паденіе кандидатуры Карла-Филиппа и избраніе Михаила Ѳедоровича», объемомъ не свыше 10 листовъ съ шестью приложеніями на шведскомъ языкѣ.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Предлагаю для напечатанія въ «Bibliotheca Armeno-Georgica» работу I. А. Орбели «Армянскія надписи Хачена. Гандзасаръ и Аваныгунъ». Надписи эти давно готовились для изданія именно въ указанной серіи».

Положено печатать и внести въ списокъ изданій Отдѣленія.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Въ одномъ изъ ближайшихъ номеровъ «Христіанскаго Востока» будетъ напечатана новая работа Н. С. Джанашіи о религіозныхъ вѣрованіяхъ абхазовъ, доставленная мнѣ еще въ сентябрѣ, но до сихъ поръ задержанная, такъ какъ записи терминовъ нуждались въ провѣркѣ. Почти вся работа была теперь прочитана совмѣстно съ авторомъ въ Сухумѣ, и всѣ сомнѣнія устранены».

Положено принять къ свѣдѣнію.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи читалъ:

«Отъ Ѳедора Александровича Витберга, чрезъ Б. Л. Модзалевскаго, поступилъ въ даръ для Библіотеки Петровской Галлереи неимѣвшійся въ ней переводъ перваго трактата изъ книги Самуила Пуфендорфа: «De officiis hominis et civis», подъ заглавіемъ: «О должности человѣка и гражданина по закону естественному». Какъ извѣстно, переводъ былъ сдѣланъ и отданъ къ напечатанію по повелѣнію Петра Великаго, но вышелъ въ свѣтъ 17 ноября 1726 г., уже по смерти Императора.

«Докладывая о полученіи означеннаго изданія, прошу Отдѣленіе выразить Ѳ. А. Витбергу благодарность за сдѣланное имъ цѣнное пожертвованіе».

Положено благодарить Ѳ. А. Витберга.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи читалъ:

«Въ Архивѣ Конференціи Императорской Академіи Наукъ имѣется нѣсколько веленевыхъ переплетенныхъ экземпляровъ томовъ I—III большого формата и II—III малаго формата «Писемъ и бумагъ Петра Великаго», переданныхъ въ Архивъ изъ Книжнаго Склада Академіи на храненіе.

«Такъ какъ для состоящей при ввѣренномъ мнѣ Музеѣ Галлереи Императора Петра I желательно было бы получить по экземпляру означеннаго изданія, то я обращаюсь къ Отдѣленію съ просьбой о выдачѣ указанныхъ книгъ, въ количествѣ 5 томовъ, изъ Архива въ Галлерею».

Положено, согласно заключенію Непремѣннаго Секретаря, выдать просимыя изданія, о чемъ сообщить въ Архивъ для исполненія.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Въ числѣ памятниковъ стариннаго нашего законодательства, заслуживающихъ скорѣйшей научной обработки и изданія, нельзя, конечно, не упомянуть объ Уставѣ Благочинія 1782 г. Въ настоящее время профессоръ Юрьевскаго Университета Ѳ. В. Тарановскій могъ бы заняться подготовительными работами, нужными для изданія

Устава Благочинія въ предпринятой Академіей серіи «Памятниковъ русскаго законодательства 1649—1832 гг.». Въ случаѣ если предложеніе мое будетъ принято, я просилъ бы поручить профессору О. В. Тарановскому произвести надлежащія разысканія въ Петроградскихъ и Московскихъ архивахъ».

Положено поручить означенныя изысканія профессору О. В. Тарановскому, о чемъ сообщить академику А. С. Лаппо-Данилевскому.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Поѣздка въ Абхазію, совершенная мной съ 18 декабря по 19 января, помимо выполненія спеціальной задачи по маленькому абхазско-русскому словарю, дала возможность: а) выяснить отношеніе моихъ сотрудниковъ по собиранію текстовъ къ производству записи на совмѣстномъ съ ними чтеніи собранныхъ ими сказокъ и практически ознакомить ихъ съ необходимостью не отступать отъ діалектическихъ особенностей живой рѣчи въ сторону однообразія нараждающихся уже литературныхъ нормъ, б) привлечь къ сотрудничеству на тѣхъ же основаніяхъ извѣстныхъ многолѣтними занятіями абхазскимъ языкомъ А. М. Чочуа, инспектора городского училища въ Сухумѣ, и Д. І. Гуліа, члена нынѣ упраздненнаго переводческаго комитета. Посѣщеніе уроковъ абхазскаго языка этихъ мѣстныхъ преподавателей подало мысль использовать наиболѣе успѣвающихъ въ родной рѣчи учениковъ для собиранія памятниковъ абхазской народной литературы на различныхъ нарѣчіяхъ и говорахъ. На первое время прошу Конференцію разрѣшить выслать по 100 руб. каждому изъ названныхъ лицъ на расходы, сопряженные съ этимъ предпріятіемъ. Наиболѣе существеннымъ въ теоретическомъ отношеніи результатомъ поѣздки считаю то, что удалось напасть на новые лингвистическіе факты, поразительно сближающіе основной яфетическій слой абхазскаго языка съ основнымъ яфетическимъ слоемъ древне-литературнаго армянскаго, такъ называемаго «hайскаго» языка».

Положено разрѣшить высылку 200 руб. изъ суммы въ 400 руб., ассигнованной на записи горскихъ текстовъ, о чемъ и сообщить въ Правленіе для исполненія.

III засѣданіе, 10 февраля 1916 года.

Управляющій Псковскою губерніею В. С. Арсеньевъ прислалъ приглашеніе на открытіе Псковской Губернской Ученой Архивной Коммиссіи, учреждаемой по иниціативѣ Псковскаго Археологическаго Общества.

Открытіе назначено на 11 февраля, въ помѣщеніи Псковскаго Губернскаго Правленія.

Положено послать телеграмму.

Академикъ Н. Я. Марръ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Яфетическіе элементы въ языкахъ Арменіи. IX» (N. J. Marr. Les éléments japhétiques dans les langues de l'Arménie. IX).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій представилъ Отдѣленію присланныя въ Постоянную Историческую Комиссію «Atti e Memorie della R. deputazione di Storia patria per le provincie di Romagna», Serie IV, vol. V, fasc. I—VI (въ 2-хъ выпускахъ).

Положено передать во II Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Въ виду отпечатанія подъ моимъ наблюденіемъ III части сочиненія А. I. Гиппинга «Нева и Ніеншанцъ», Приложенія, я просилъ бы разослать означенный томъ слѣдующимъ учрежденіямъ и лицамъ: въ Шведскій Государственный Архивъ въ Стокгольмѣ, въ Финляндскій Государственный Архивъ въ Гельсингфорсѣ, а также: г. библіотекарю А. Андерссону, Упсала, Университетъ, г. антикварію Т. И. Арне въ Стокгольмѣ, профессору Шюбергсону въ Гельсингфорсѣ и профессору К. фонъ Бонсдорфу въ Гельсингфорсѣ».

Положено передать въ Книжный Складъ для исполненія.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ДОКЛАДЫ О НАУЧНЫХЪ ТРУДАХЪ.

С. С. Ганешинъ. Тератологическое измѣненіе *Gentiana triflora* Pall. (S. S. Ganešin. Une modification tératologique de *Gentiana triflora* Pall.).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Среди растеній, собранныхъ П. Александровымъ въ Верхоленскомъ уѣздѣ, Иркутской губерніи, оказалось три экземпляра *Gentiana*, по строенію цвѣтковъ весьма сходныхъ съ *G. triflora* Pall., но отличающихся отъ нея вѣтвистымъ стеблемъ, болѣе мелкими цвѣтками и яйцевидными и эллиптическими листьями вѣточекъ и прицвѣтниками.

Въ виду того, что 1) появленіе вѣточекъ съ широкими листьями, какъ у этихъ экземпляровъ, такъ и у одного изъ собранныхъ вмѣстѣ съ ними *G. triflora* Pall., обнаружилось только на мѣстѣ пораженія главныхъ стеблей, а 2) анатомическое строеніе корня *G. triflora* Pall. и этихъ экземпляровъ оказалось вполнѣ сходнымъ между собою, — ихъ слѣдуетъ считать тератологически-измѣненной *Gentiana triflora* Pall.

Къ статьѣ приложены 2 таблицы.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

А. Державинъ. *Cumacea (Sympoda)* сибирскаго Сѣвернаго Ледовитаго океана, собранныя Русской Полярной Экспедиціей 1900—1903 г.г. (A. Deržavin. *Cumacées (Sympoda)* de l'Océan Arctique de Sibérie, recueillies par l'Expédition Polaire Russe en 1900—1903).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г. академикомъ **В. В. Заленскимъ**).

Названная статья представляетъ результатъ обработки матеріала по одному изъ отрядовъ класса ракообразныхъ, *Cumacea*, собраннаго во время

плаванія «Зари» у сибирскаго побережья Сѣвернаго Ледовитаго океана; въ коллекціи оказалось всего семь видовъ изъ двухъ семействъ *Leuconidae* (*Leucon nasicoides* Lilj. и *L. nasica* Kröyer) и семейства *Diastylidae* (*Diastylis spinulosus* Heller, *D. rathkei* Kröyer, *D. goodsiri* Bell., *D. scorpioides* Lepechin и *Diastylis nucella* Calman); большинство видовъ являются кругополярными и частью широко распространенными, одинъ же видъ, *D. nucella*, до сихъ поръ былъ находимъ только въ Бофортовомъ морѣ у сѣвернаго побережья Аляски; экспедиціей же онъ найденъ у острововъ Беннета и въ Карскомъ морѣ, благодаря чему значительно расширяется извѣстная намъ область его обитанія; такимъ образомъ статья даетъ небезъинтересныя добавленія къ нашимъ познаніямъ фауны Сибирскаго Ледовитаго океана.

Къ статьѣ приложенъ рисунокъ.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Академіи въ серіи «Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи».

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Продольный спектрографъ.

(Предварительное сообщеніе).

Г. А. Тихова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Предварительныя замѣчанія. — Камера Бредихинскаго астрографа, какъ и всякая фотографическая камера, ахроматизована для лучей 400—470 $\mu\mu$. Фокусъ этихъ лучей назовемъ основнымъ. При переходѣ къ лучамъ большей или меньшей длины волны фокусъ быстро увеличивается, и для крайнихъ красныхъ и ультрафіолетовыхъ лучей онъ на 3 мм. больше основного. Въ виду этого въ 1910 году было предположено пріобрѣсти коррекціонные объективы, которые ахроматизовали бы поочередно визуальные и ультрафіолетовые лучи.

Объективъ Бредихинской камеры, системы Petzval'я, составленъ изъ двухъ двухлинзовыхъ объективовъ, раздѣленныхъ значительнымъ промежуткомъ. Обозначимъ внутренній объективъ черезъ № 1 и наружный — № 2. На посланный запросъ оптическій заводъ Цейсса отвѣтилъ, что поставленную задачу можно рѣшить замѣной объектива № 2 новыми, спеціально вычисленными.

На первое время было рѣшено ограничиться заказомъ только одного коррекціоннаго объектива, собирающаго въ одинъ фокусъ совмѣстно съ объективомъ № 1 всѣ визуальные лучи — отъ 500 $\mu\mu$ до крайнихъ красныхъ, оставляя безъ всякаго вниманія лучи фотографическіе. Комбинація новаго объектива (№ 3) съ объективомъ № 1 дала превосходную ахроматизацію визуальныхъ лучей, такъ что явилась возможность, пользуясь желтымъ свѣтофильтромъ, получать весьма рѣзкія фотографіи звѣздъ въ оптическихъ лучахъ.

Для полноты комбинація объективовъ № 1 и № 3 была мною изслѣдована не только въ визуальныхъ лучахъ, но и въ фотографическихъ. Для

опредѣленія фокуса въ разныхъ лучахъ примѣнялась объективная призма. Въ таблицѣ 1 даны отсчеты фокуса черезъ каждые 20 $\mu\mu$ по шкалѣ при камерѣ.

Таблица 1.

Длина волны.	Фокусъ.	Длина волны.	Фокусъ.
650 $\mu\mu$	27.7 мм.	490 $\mu\mu$	28.1 мм.
630	27.6	470	28.5
610	27.6	450	29.1
590	27.5	430	29.8
570	27.6	410	31.0
550	27.6	390	32.6
530	27.7	370	35.1
510	27.8		

Изъ этой таблицы мы видимъ, что разность фокусовъ визуальныхъ лучей не превосходитъ 0,3 мм.; наоборотъ, фокусъ фотографическихъ лучей очень быстро возрастаетъ съ уменьшеніемъ длины волны.

Вотъ это-то свойство новаго объектива по отношенію къ фотографическимъ лучамъ и послужило основаніемъ для изслѣдованія, излагаемаго въ настоящей статьѣ.

Фотографированіе звѣздъ въ любыхъ изъ болѣе преломляемыхъ лучей.— Помѣстимъ свѣточувствительную пластинку въ фокусѣ лучей съ длиною волны λ_0. Тогда, въ виду очень быстраго измѣненія фокуса съ измѣненіемъ длины волны, всѣ остальные лучи дадутъ внѣфокальные кружки тѣмъ большаго діаметра, чѣмъ больше различіе въ длинѣ фокуса этихъ лучей и лучей λ_0. Введемъ слѣдующія обозначенія: d — діаметръ внѣфокальнаго кружка, D — діаметръ объектива, F — его фокусное разстояніе и δF — различіе фокуса лучей съ длинами волны λ_0 и λ. Легко видѣть, что эти величины связаны слѣдующимъ соотношеніемъ:

$$\frac{d}{D} = \frac{\delta F}{F},$$

или

$$d = \frac{D}{F}\,\delta F \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Для Бредихинскаго астрографа $D = 170$ мм. и $F = 800$ мм., такъ что $\frac{D}{F} = \frac{1}{4{,}7}$. Такимъ образомъ для него имѣемъ:

$$d = \frac{\delta F}{4{,}7} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Съ увеличеніемъ d яркость внѣфокальнаго кружка ослабѣваетъ. Яркость единицы площади кружка относительно яркости соотвѣтствующаго мѣста спектра пропорціональна отношенію квадрата діаметра фокальнаго изображенія къ d^2. Для Бредихинскаго астрографа діаметръ зарождающагося изображенія звѣзды чрезвычайно малъ — около 0.01 — 0.02 мм. При діаметрѣ 0.03 мм. звѣзда уже достаточно выдержана и хорошо фотометрируется. Для фокальнаго изображенія звѣзды мы и примемъ этотъ діаметръ.

Въ таблицѣ 2 даны значенія d и отношенія $\left(\frac{0.03}{d}\right)^2$ для случая фокусировки на $\lambda_0 = 390\ \mu\mu$.

Таблица 2.

λ	δF	d	$\left(\frac{0.03}{d}\right)^2$
370 $\mu\mu$	2.5 мм.	0.53 мм.	0.0032
390	0.0	03	1.0000
410	1.6	34	0.0078
430	2.8	60	25
450	3.5	74	16
470	4.1	87	12
490	4.5	0.96	10
510	4.8	1.02	9
550	5.0	1.06	8
590	5.1	1.08	0.0008

Такимъ образомъ на фотографіи мы получимъ звѣзду въ видѣ чернаго ядра (соотвѣтствующаго преимущественно лучамъ λ_0 и ближайшимъ къ нимъ), окруженнаго сѣрымъ ореоломъ. Ближайшія къ ядру части ореола состоятъ изъ наложенія кружковъ почти всѣхъ λ, а съ удаленіемъ отъ ядра въ составъ кружка входитъ все меньшее и меньшее число лучей.

Однако есть очень простой способъ весьма отчетливо выдѣлить ядро изъ окружающаго его ореола. Для этого достаточно закрыть середину объектива непрозрачнымъ кружкомъ бо́льшаго или меньшаго діаметра D_1, такъ что остающаяся открытой часть объектива имѣетъ видъ кольца. Вслѣдствіе этого внѣфокальныя изображенія принимаютъ форму колечекъ. Такимъ образомъ, дѣйствіе лучей, сколько-нибудь удаленныхъ отъ фокуса, уже не сказывается на составѣ центральнаго ядра, и оно можетъ быть изучаемо, какъ болѣе или менѣе монохроматическое изображеніе звѣзды. Эти монохроматическія изображенія, соотвѣтствующія разнымъ длинамъ

волны и составляющія въ своей совокупности спектръ звѣзды, располагаются вдоль оптической оси астрографа. Вотъ почему мы называемъ описанный приборъ продольнымъ спектрографомъ.

Разрѣшающая сила продольнаго спектрографа. — Мы будемъ называть разрѣшающей силой продольнаго спектрографа то число микромикроновъ ($\mu\mu$), которое указываетъ различіе длинъ волны крайнихъ лучей, входящихъ въ составъ ядра. Такъ, напримѣръ, если въ составъ ядра входятъ лучи отъ $\lambda = 390$ $\mu\mu$ до $\lambda = 400$ $\mu\mu$, то разрѣшающая сила въ этомъ мѣстѣ спектра равна 10 $\mu\mu$. Обозначимъ черезъ $\delta\lambda$ измѣненіе λ, соотвѣтствующее измѣненію фокуса на δF. Мы можемъ замѣнить уравненіе (1) слѣдующимъ:

$$d_1 = \frac{D_1}{F}\left(\frac{\delta F}{\delta \lambda}\right)\delta\lambda,$$

откуда:

$$\delta\lambda = d_1 \cdot \frac{F}{D_1}\left(\frac{\delta\lambda}{\delta F}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Здѣсь, какъ сказано выше, D_1 есть діаметръ кружка, закрывающаго центральную часть объектива, а d_1 — внутренній діаметръ внѣфокальнаго кольцевого изображенія звѣзды.

Эта формула даетъ возможность вычислить разрѣшающую силу продольнаго спектрографа. Примѣнимъ ее къ нашему случаю, предполагая фокуссировку для $\lambda_0 = 390$ $\mu\mu$. Такъ какъ діаметръ годнаго для фотометрированія изображенія звѣзды, какъ сказано выше, можно считать равнымъ 0.03 мм., то для внутренняго діаметра внѣфокальныхъ колецъ, не входящихъ уже въ составъ ядра, можно принять, напримѣръ, 0.05 мм., т. е. положить $d_1 = 0.05$ мм. Положимъ затѣмъ, что центральная часть объектива закрыта кружкомъ съ діаметромъ 80 мм., т. е. $D_1 = 80$ мм. Далѣе, для Бредихинской камеры $F = 800$ мм. Наконецъ, изъ таблицы 1 находимъ, что при измѣненіи λ отъ 390 $\mu\mu$ до 370 $\mu\mu$ фокусъ мѣняется на 2.5 мм., т. е. $\delta\lambda = 20$ $\mu\mu$ и $\delta F = 2.5$ мм. Подставляя всѣ эти числа въ правую часть уравненія (3), находимъ: $\delta\lambda = 4$ $\mu\mu$. Такова разрѣшающая сила въ сторону меньшихъ значеній λ. При измѣненіи λ отъ 390 $\mu\mu$ до 410 $\mu\mu$ имѣемъ, изъ таблицы 1, $\delta F = 1.6$ мм. и, по формулѣ (3), находимъ $\delta\lambda = 6$ $\mu\mu$. Это есть разрѣшающая сила въ сторону бо́льшихъ λ. Полная разрѣшающая сила равна суммѣ 4 $\mu\mu$ + 6 $\mu\mu$.

Въ таблицѣ 3 дана разрѣшающая сила $\delta\lambda$ при фокуссировкѣ на разные лучи, отъ 390 до 470 $\mu\mu$.

Таблица 3.

Фокуссировка на лучи.	Разрѣшающая сила въ сторону меньшихъ λ.	Разрѣшающая сила въ сторону большихъ λ.	Полная разрѣшающая сила.
390 $\mu\mu$	4 $\mu\mu$	6 $\mu\mu$	10 $\mu\mu$
410	6	8	14
430	8	14	22
450	14	17	31
470	17	25	42

Эта таблица показываетъ, что разрѣшающая сила быстро ухудшается съ увеличеніемъ длины волны. Разсматривая уравненіе (3), мы видимъ, что для даннаго инструмента въ нашемъ распоряженіи находится только значеніе D_1 (внутренній діаметръ кольцевой діафрагмы); увеличивая его, мы уменьшаемъ $\delta\lambda$, т. е. улучшаемъ разрѣшающую силу. Верхнимъ предѣломъ для D_1 является діаметръ свободнаго отверстія объектива D. Однако, съ увеличеніемъ D_1 открытое на объективѣ кольцо дѣлается всѣ ýже и ýже, и фотографированію становятся доступными только болѣе яркія звѣзды. Когда $D - D_1$ очень мало, то, при фокуссировкѣ на крайніе лучи, изображеніе звѣзды превращается въ кольцевой спектръ, въ которомъ обычныя спектральныя линіи замѣняются узкими концентрическими кольцами, діаметръ и ширина которыхъ увеличивается съ увеличеніемъ δF.

Возможно, что если вычислить объективъ со спеціальной цѣлью примѣненія его въ качествѣ продольнаго спектрографа, то онъ дастъ для δF еще бóльшія значенія, чѣмъ въ нашемъ приборѣ, и, слѣдовательно, разрѣшающая сила его будетъ еще лучше. Весьма вѣроятно также, что обыкновенные двухлинзовые визуальные объективы могутъ служить въ качествѣ продольныхъ спектрографовъ въ болѣе преломляемыхъ лучахъ.

Примѣненіе продольнаго спектрографа. — Продольный спектрографъ можно разсматривать, какъ усовершенствованный свѣтофильтръ. Нѣкоторыя затрудненія, встрѣчаемыя при употребленіи обычныхъ свѣтофильтровъ, особенно при изслѣдованіи лучей малой длины волны, здѣсь совершенно отпадаютъ. Такъ, напримѣръ, обычный свѣтофильтръ не можетъ выдѣлить столь узкіе участки спектра, какъ продольный спектрографъ; къ тому же, при малыхъ λ свѣтофильтръ обыкновенно значительно ослабляетъ и тѣ лучи, которые пропускаетъ. Такимъ образомъ, въ примѣненіи къ звѣздамъ продольный спектрографъ можетъ съ успѣхомъ рѣшать всевозможные вопросы спектральной фотометріи.

Въ частности, продольный спектрографъ даетъ возможность по одному снимку опредѣлить качественно цвѣтъ звѣзды, т. е. раздѣлить звѣзды на главныя группы: красныя, желтыя, бѣлыя и даже на промежуточные оттѣнки.

Двѣ фотографіи, которыя я имѣю честь предложить вниманію Академіи, представляютъ участокъ неба въ созвѣздіи Лебедя, снятый въ фокусѣ лучей 380 и 404 $\mu\mu$.

Такъ какъ красныя звѣзды въ этихъ лучахъ очень слабы, то онѣ или вовсе не имѣютъ центральнаго ядра, или оно у нихъ очень слабо. Слабость сосѣднихъ лучей обусловливаетъ также минимумъ яркости внѣфокальнаго кружка вблизи ядра. Затѣмъ яркость быстро возрастаетъ и даетъ темное кольцо на периферіи.

Для желтыхъ звѣздъ наблюдается аналогичная форма, но значительно менѣе отчетливая.

Бѣлыя звѣзды даютъ ядро, окруженное почти совершенно равномѣрнымъ ореоломъ.

Наконецъ у голубыхъ звѣздъ ореолъ даже нѣсколько усиливается съ приближеніемъ къ ядру.

Эти снимки сдѣланы при $D_1 = 7$ см. Изслѣдованіе полученныхъ негативовъ показало, что при фокусировкѣ на лучи 404 $\mu\mu$ и при выдержкѣ въ $\frac{1}{2}$ часа можно классифицировать цвѣтъ звѣздъ до 11 величины. Въ видѣ сравненія укажемъ, что приблизительно такая же выдержка требуется для полученія измѣримыхъ изображеній звѣздъ до 11 величины черезъ ультрафіолетовый свѣтофильтръ пропускающій лучи отъ 360 $\mu\mu$ до 410 $\mu\mu$.

Такимъ образомъ, продольный спектрографъ представляетъ очень удобный инструментъ въ тѣхъ случаяхъ, когда приходится произвести быстрое статистическое изслѣдованіе цвѣта звѣздъ въ избранныхъ мѣстахъ неба.

Время и практика покажутъ, къ какимъ вопросамъ можетъ быть еще примѣненъ продольный спектрографъ.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О сегментаціи яйца *Salpa fusiformis.*

В. В. Заленскаго.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г.).

Между многими работами, появившимися послѣ моей работы «Объ эмбріональномъ развитіи сальпъ»[1], труды К. Гейдера[2—4] о развитіи *Salpa fusiformis* занимаютъ выдающееся мѣсто. Они производятъ впечатлѣніе обстоятельныхъ изслѣдованій, особенно если принять во вниманіе, что *Salpa fusiformis* была изслѣдована до него менѣе полно, чѣмъ другіе виды сальпъ. К. Гейдеръ приходитъ въ этой работѣ къ заключеніямъ совершенно противуположнымъ моимъ, и для меня особенно важно провѣрить новыми изслѣдованіями факты, сообщенные Гейдеромъ, чтобы найти причину нашего разногласія. Благопріятный случай къ этому представился только въ послѣдніе годы, когда мнѣ удалось на русской зоологической станціи въ Виллльфраншѣ собрать и зафиксировать довольно много экземпляровъ *S. fusiformis* съ зародышами на различныхъ стадіяхъ развитія, между прочимъ и раннихъ, которыхъ мнѣ прежде недоставало. Фиксація и окраска матерьяла таже, что и въ моей работѣ о *Salpa africana* и *S. zonaria* (фиксація въ сулемѣ + уксусная кислота, окраска гематеиномъ Апати и желѣзнымъ гематоксилиномъ; особенно можно рекомендовать послѣдній).

---

[1] W. Salensky. Neue Untersuchungen über die embryonale Entwicklung der Salpen (Mitth. aus der zoolog. Station zu Neapel. Bd. 4, 1883).

[2] K. Heider. Mitteilungen über die Embryonalentwicklung der Salpen (Verh. d. deutsch Zool. Gesellsch. 3-te Jahresversammlung zu Göttingen 1893).

[3] K. Heider. Über die Bedeutung der Follikelzellen in der Embryonalentwicklung d. Salpen (Sitzb. der. Gesell. d. naturforsch. Freune zu Berlin Jahrg. 1893).

[4] K. Heider. Beiträge z. Embryologie von *Salpa fusiformis* (Abhandl. d. Senkenbergschen naturforschende Gesellschaft. B. XVIII, 1895).

Послѣ моей первой работы, надъ развитіемъ *S. fusiformis* работали Гейдеръ и Коротневъ. Оба пришли въ общемъ къ сходному результату, т. е. что зародышъ строится изъ бластомеръ, а калиммоциты или поѣдаются бластомерами (Гейдеръ), или разрушаются. (Коротневъ). Мой взглядъ на развитіе сальпъ, какъ и взглядъ Брукса, Гейдеръ считаетъ мало обоснованнымъ. Посмотримъ насколько обоснованъ его взглядъ.

По словамъ Гейдера «сегментація яйца сальпъ полная и инэквальная» (№ 4 стр. 384). Въ позднихъ стадіяхъ сегментаціи однако всѣ бластомеры должны быть одинаковой величины и одинаковаго качества (In den späteren Furchungsstadien dagegen zeigen sich die sog. «Blastomeren» sämtlich ungefähr von gleicher Grösse und Beschaffenheit» (№ 4 стр. 387). Къ сожалѣнію, Гейдеръ не говоритъ точнѣе въ какое же время происходитъ уравненіе бластомеръ въ величинѣ ихъ и качествамъ.

При изслѣдованіи сегментаціи сальпъ очень важно знать съ какою стадіею сегментаціи имѣешь дѣло. Опредѣляется эта стадія по числу бластомеръ, такъ какъ ихъ меньше, чѣмъ калиммоцитовъ, слѣдовательно и легче сосчитать. Опредѣлить число бластомеръ можно только при помощи реконструкціи разрѣзовъ, хотя бы и самой простой. Я срисовывалъ у *S. zonaria* разрѣзы и, сравнивая ихъ другъ съ другомъ, опредѣлялъ болѣе или менѣе точно сколько бластомеръ въ данномъ яйцѣ. Я получалъ яйца съ 4-мя, 8-ю, 10, 12, 13, 14 и 16 бластомерами, слѣдовательно могъ опредѣлить возрастъ сегментаціи. Дѣлалъ ли такой подсчетъ Гейдеръ, я не знаю; у него по крайней мѣрѣ не обозначенъ возрастъ сегментаціи для тѣхъ рисунковъ, которые онъ даетъ на своихъ таблицахъ. Между тѣмъ, такой подсчетъ, основанный на изслѣдованіи каждаго разрѣза, важенъ еще и потому, что онъ позволяетъ опредѣлить относительную величину бластомеръ и рѣшить вопросъ о томъ, есть ли между ними большія и маленькія, или всѣ онѣ одинаковы. Дѣлая выводы только на основаніи одиночныхъ разрѣзовъ, можно легко впасть въ ошибку, такъ какъ на разрѣзахъ попадаются одновременно бластомеры, разрѣзанныя во всю длину, и части ихъ. Послѣднія легко можно принять за микромеры, если не изслѣдовать серіи разрѣзовъ, и такимъ образомъ ошибочно заключить объ инэквальности сегментаціи. Я не отрицаю существованія различій въ величинѣ бластомеръ (правда рѣдкихъ), но считаю совершенно голословнымъ заключеніе Гейдера, что изъ большихъ бластомеръ образуется энтодермъ, а изъ малыхъ эктодермъ. Бластомеры вообще не участвуютъ въ образованіи зародышевыхъ листовъ, такъ какъ то, что мы съ нѣкоторымъ правомъ можемъ считать зародышевыми листами, происходитъ не изъ бластомеръ, а изъ калиммоцитовъ какъ увидимъ далѣе.

Главный центръ тяжести выводовъ Гейдера заключается въ толкованіи такъ называемыхъ «парцелль». Въ моей прежней работѣ о развитіи сальпъ (Neue Untersuchungen über die embryonale Entwicklung der Salpen) я описалъ особыя частички, находящіяся въ раннихъ стадіяхъ развитія бластомеръ, имѣющія видъ желточныхъ зернышекъ, и назвалъ ихъ «парцеллями». Тодаро[1] призналъ въ этихъ частичкахъ клѣтки и полагалъ, что онѣ происходятъ отъ дробленія бластомеръ. Гейдеръ сначала придерживался моего взгляда, какъ онъ говоритъ, но вдругъ его осѣнила мысль, что въ этихъ-то парцелляхъ лежитъ разгадка значенія калиммоцитовъ, а слѣдовательно и особенности развитія сальпъ. Онъ объявляетъ «парцелли» калиммоцитами, съѣденными бластомерами. Какія же основанія онъ имѣлъ для такого вывода? Видѣлъ ли онъ какъ бластомеры поѣдали калиммоцитовъ? Отвѣтъ на эти вопросы одинъ: онъ не видѣлъ поѣданія калиммоцитовъ и вообще не имѣлъ никакихъ основаній къ такому выводу. По крайней мѣрѣ нигдѣ въ его работахъ не встрѣчается никакихъ намековъ на наблюденія, говорящія въ пользу его взгляда, за исключеніемъ показавшагося ему сходства по формѣ между «парцеллями» и калиммоцитами. Поэтому на гипотезу Гейдера надо смотрѣть какъ на нѣкоторое вдохновеніе, приведшее его, однако, къ ложнымъ заключеніямъ.

Нисколько не смущаясь отсутствіемъ основаній для своей гипотезы, онъ утверждаетъ, что въ той стадіи развитія, гдѣ клоакальныя складки дошли до половины зародыша, всѣ до одного калиммоциты съѣдены бластомерами. Его смущало, вѣроятно, то обстоятельство, что какъ разъ въ этой стадіи вся яйцевая камера набита калиммоцитами. Чтобы обойти этотъ противорѣчащій его гипотезѣ фактъ, онъ выставляетъ новое положеніе, а именно, что во время сегментаціи потомки бластомеръ становятся такъ похожи на калиммоцитовъ, что ихъ не отличишь другъ отъ друга. Если бы онъ далъ себѣ трудъ основательно изслѣдовать сегментацію яйца, то убѣдился бы, что у *Salpa fusiformis* вовсе нѣтъ въ этомъ періодѣ такого большого количества бластомеръ или ихъ потомковъ, и что максимальное число ихъ 16. Притомъ онъ могъ бы замѣтить, что онѣ всегда гораздо больше калиммоцитовъ, и что во всѣхъ стадіяхъ сегментаціи онѣ рѣзко отличаются отъ калиммоцитовъ какъ своею плазмою, такъ и еще болѣе строеніемъ своихъ ядеръ. Въ этомъ можетъ убѣдиться каждый, давшій себѣ трудъ просмотрѣть серіи окрашенныхъ разрѣзовъ изъ различныхъ стадій сегментаціи. Дѣлая такой важный

[1] Fr. Todaro. Sui primi fenomeni nello sviluppo delle Salpe (Atti Acad. dei Lincei. 3 Ser. Transunti. Vol. 4, 1880).

выводъ, что продукты дѣленія маленькихъ бластомеръ не отличимы отъ калиммоцитовъ, онъ не постарался даже подкрѣпить этотъ выводъ соотвѣтственными наблюденіями, достойными вѣроятія. Поэтому я считаю выводы Гейдера поспѣшными и совершенно ни на чемъ не основанными, тѣмъ болѣе, что болѣе обстоятельное наблюденіе надъ происхожденіемъ «парцелль» приводитъ къ заключенію о ихъ природѣ, рѣзко отличающемуся отъ Гейдеровскихъ воззрѣній. Объ этомъ дальше.

Теперь перейдемъ къ работѣ Коротнева[1]. Она мало занимается сегментаціей яйца. Самъ Коротневъ говоритъ, что онъ изслѣдовалъ сегментаціи постольку, поскольку это необходимо, чтобы имѣть возможность отличить бластомеры отъ калиммоцитовъ. Какъ разъ въ этомъ отношеніи онъ дѣлаетъ грубую ошибку, принимая калиммоциты за бластомеры (см. его фиг. 1 и 2 *bl*). Коротневъ не подтверждаетъ Гейдеровскаго взгляда на парцелли какъ на съѣденные бластомерами калиммоциты. По его мнѣнію калиммоциты вообще не поѣдаются, а мало по малу разрушаются, принимая сначала блѣдный, хлоротическій видъ (какъ онъ выражается).

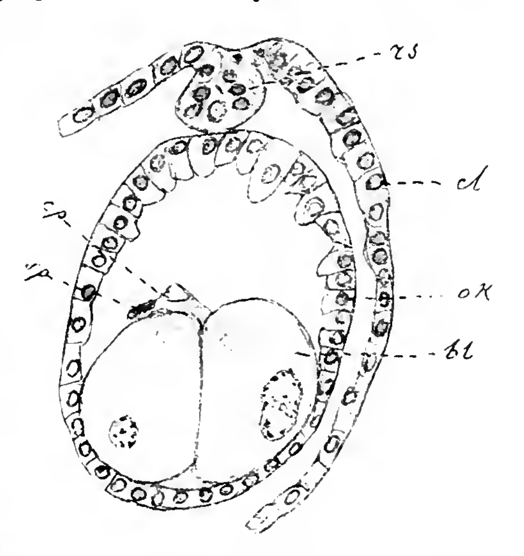
Изъ сравненія взглядовъ всѣхъ авторовъ, отрицающихъ участіе калиммоцитовъ въ построеніи зародыша, мы видимъ, что они очень разнятся другъ отъ друга. Одинъ приписываетъ исчезаніе калиммоцитовъ прожорству бластомеръ (Гейдеръ), другой — умиранію отъ слабости или хлороза (Коротневъ). Одинъ считаетъ «парцелли» съѣденными калиммоцитами (Гейдеръ), другой — продуктомъ дѣленія бластомеръ (Тодаро). Отчего бы ни происходило это разногласіе, оно показываетъ, что наши свѣдѣнія о развитіи сальпъ далеки отъ полноты и что новыя изслѣдованія въ этой области очень желательны. Это было главнымъ поводомъ къ тому, чтобы вновь переизслѣдовать сегментацію и развитіе *Salpa fusiformis*. Результаты этихъ изслѣдованій я здѣсь вкратцѣ сообщаю.

Яйцевая камера *S. fusiformis* очень похожа на яйцевую камеру *S. maxima*, которую я подробно описалъ въ очеркѣ о созрѣваніи и оплодотвореніи яйца. Она имѣетъ также овальную форму, лежитъ какъ разъ подъ клоакальной оболочкой матери. Мнѣ не удалось наблюдать самую первую стадію: дѣленіе яйца на двѣ бластомеры; но, судя по слѣдующей стадіи дѣленія, можно заключить, что направленіе первой борозды должно быть тоже, какъ и у *S. maxima*. Яйцо сокращается сильно, наполняетъ только заднюю половину яйцевой камеры (фиг. 1) и дѣлится въ продольномъ направленіи, вѣроятно въ саги-

---

[1] A. Korotneff. Zur Embryologie von *Salpa runcinata-fusiformis*. (Zeitschrift für wissenschaftl. Zoologie. Bd. LXII).

тальной плоскости на двѣ одинаковыя бластомеры. Слѣдующее дѣленіе яйцевой клѣтки идетъ также въ продольномъ направленіи, перпендикулярно первому. Яйцо, изображенное въ разрѣзѣ на фиг. 1 представляетъ именно эту вторую стадію сегментаціи: дѣленіе на четыре бластомеры. На разрѣзѣ видны только двѣ бластомеры, но, изслѣдуя всю серію разрѣзовъ этой яйцевой камеры, можно убѣдиться, что когда оканчиваются разрѣзы показанныхъ на фиг. 1 двухъ бластомеръ, показываются 2 такой же величины бластомеры, такой же формы, съ такою же плазмою и съ такими ядрами. Слѣдовательно дѣленіе яйца на 4 части представляетъ совершенно ясную эквальную форму сегментаціи. Плазма бластомеровъ мелкозерниста и кажется на разрѣзахъ однородною. При окраскѣ желѣзнымъ гематоксилиномъ плазма бластомеръ окрашивается гораздо слабѣе, чѣмъ фолликулярныхъ клѣтокъ. Тоже должно сказать и относительно ядеръ. Ядра бластомеръ пузыреобразныя, овальны, часто удлиняются въ лопасти, что придаетъ имъ неправильную форму. Они наполнены свѣтлымъ, не окрашивающимся сокомъ, внутри котораго находятся хроматинныя зернышки, лежащія въ ахроматинномъ остовѣ, очень разнообразно расположенномъ въ видѣ пластинокъ или нитей. Хроматинныя зерна различной величины, часто склеены между собою въ группы. Ядрышка, которое обыкновенно является въ позднихъ стадіяхъ развитія, въ раннихъ я не видѣлъ. Въ этой стадіи развитія ядро бластомеръ не имѣетъ еще такой неправильной, часто изогнутой, лопастной, какъ бы раздѣленной формы, которая является въ болѣе позднихъ стадіяхъ сегментаціи.



Фиг. 1. Продольный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру и яйцо въ стадіи дѣленія на 4 бластомеры (видны только двѣ). *rs* — receptaculum seminis; *cl* — клоакальная оболочка; *ok* — фолликулъ; *bl* — бластомеры; *cp* — полярная клѣтка; *sp* — головка спермія. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

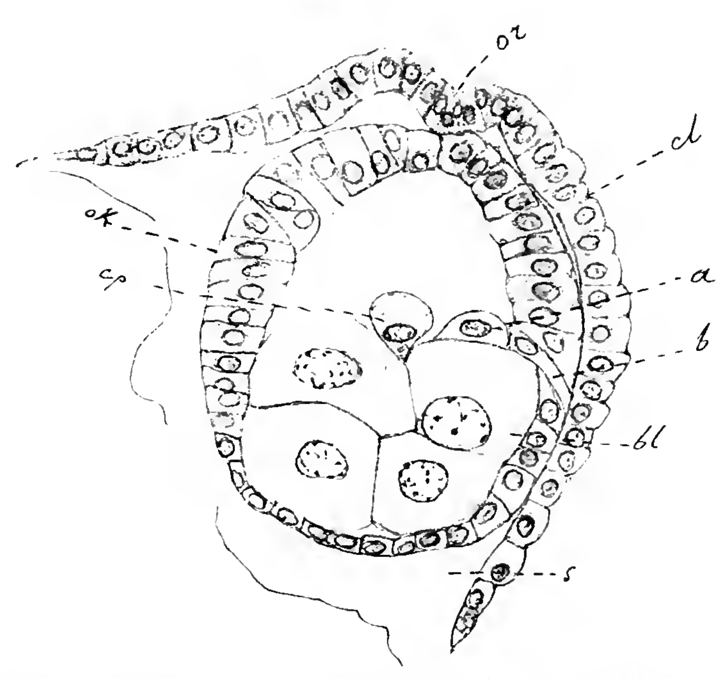
На переднемъ полюсѣ бластомеръ лежитъ клѣтка треугольной формы, удлиняющаяся по направленію борозды между бластомерами въ прозрачный отростокъ, которымъ она входитъ между послѣдними. Сбоку къ ея поверхности плотно прилегаетъ темно окрашенное гематоксилиномъ овальное тѣльце, которое по окраскѣ и по формѣ напоминаетъ головку спермія. Такія тѣльца очень часто и въ значительномъ количествѣ появляются въ яйцевой

камерѣ *Salpa africana*. По своей окраскѣ они очень похоже на спермiи, находящiеся въ сѣмяприiемникѣ; такой характерной окраски не имѣютъ другiя клѣтки, кромѣ спермiй. Поэтому я считаю его головкою спермiя, проникшею въ яйцевую камеру. Что же касается прозрачной клѣтки, лежащей на переднемъ полюсѣ бластомеръ, то я склоненъ считать ее полярною клѣткою, несмотря на то, что она находится въ передней части яйцевой камеры, а не въ задней, гдѣ обыкновенно образуются и лежатъ полярныя клѣтки. Я прихожу къ этому заключенiю потому, что въ этой стадiи развитiя клѣтки фолликулы еще низки, не размножаются и не образуютъ калиммоцитовъ; слѣдовательно это не можетъ быть калиммоцитъ. Полярныя же клѣтки обладаютъ способностью къ движенiю у сальпъ, какъ и у другихъ животныхъ. Отсюда слѣдуетъ, что онѣ могутъ пройти въ промежутокъ между бластомерами и очутиться на переднемъ полюсѣ послѣднихъ. Въ слѣдующей стадiи развитiя мы увидимъ такую же клѣтку на томъ же самомъ мѣстѣ.

Разрѣзъ, представленный на фиг. 1, прошелъ какъ разъ въ сагиттальномъ направленiи и захватилъ яйцеводъ (*Od*) въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ открывается въ клоакальную полость. Яйцеводъ имѣетъ въ этой стадiи ту-же форму, какъ у *S. africana* въ соотвѣтственной стадiи. Онъ сокращенъ, состоитъ изъ скученныхъ эпителiальныхъ клѣтокъ, между которыми попадаются остатки спермiй, не попавшихъ въ яйцевую камеру. Въ этой стадiи яйцеводъ представляетъ только комокъ клѣтокъ, плотно прилегающiй къ клоакальной оболочкѣ (*Cl*) и вполнѣ замкнутый; видно также мѣсто полового отверстiя въ видѣ маленькаго углубленiя клоакальной оболочки (*or*). Слѣды этого отверстiя сохраняются въ такомъ видѣ довольно долго.

Ближайшая стадiя сегментацiи, которую мнѣ удалось наблюдать, есть дѣленiе яйца на 8 бластомеръ. Эта стадiя представлена на фиг. 2 въ продольномъ разрѣзѣ и въ такомъ же положенiи какъ и фиг. 1. Дѣленiе на 8 совершается посредствомъ поперечной борозды. Изъ этого мы видимъ, что ритмъ дробленiя яйца въ первыхъ стадiяхъ сегментацiи у сальпъ сохраняетъ всѣ типическiя свойства, характерныя для полнаго дробленiя яйца, такъ какъ первыя двѣ фазы дѣленiя идутъ въ продольномъ, третья — въ поперечномъ направленiи. Восемь бластомеръ ложатся въ два слоя, налегающiе другъ на друга и заключающiе каждый по четыре бластомеры. Въ этой стадiи я также видѣлъ только одну полярную клѣтку какъ и въ предыдущей. Она лежитъ также (фиг. 2) на переднемъ полюсѣ яйца, довольно велика и имѣетъ грушевидную форму; съуженнымъ и заостреннымъ своимъ концомъ она вдается между передними бластомерами, переднiй, расширенный конецъ ея имѣетъ пузыревидную форму и состоитъ изъ прозрачнаго жид-

каго вещества, въ которомъ плаваютъ зернышки, тогда какъ задній конецъ состоитъ изъ темно-окрашенной зернистой плазмы. На границѣ этихъ двухъ отдѣловъ плазмы располагается овальное ядро, богатое зернышками хроматина и, вслѣдствіе этого, интенсивно красящееся гематоксилиномъ.



Фиг. 2. Продольный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру и яйцо въ стадіи дѣленія на 8 бластомеръ (видны четыре); *a* — отдѣлившійся калиммоцитъ; *b* — отдѣляющійся калиммоцитъ; *or*—остатокъ полового отверстія; *s*—кровеносный синусъ. Остальныя буквы какъ на фиг. 1. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

Описанная мною сейчасъ стадія сегментаціи представляетъ въ двухъ отношеніяхъ большой интересъ. Во 1-хъ это послѣдняя стадія сегментаціи, въ которой дѣленіе яйца идетъ правильно въ геометрической прогрессіи (2 : 4 : 8); въ дальнѣйшихъ стадіяхъ этотъ геометрическій порядокъ уступаетъ мѣсто ариѳметическому, при которомъ увеличеніе числа бластомеръ происходитъ по два, а иногда по одному. Во 2-хъ, съ этой стадіи дѣленія на 8 бластомеръ начинается миграція фолликулярныхъ клѣтокъ, которыя превращаются въ калиммоциты. Я называю этотъ процессъ миграціей, такъ какъ въ этой стадіи можно очень ясно видѣть какъ клѣтки изъ фолликулярнаго эпителія продвигаются въ полость яйцевой камеры. Одна изъ этихъ клѣтокъ уже отдѣлилась отъ фолликулярной стѣнки (*a*) и лежитъ на поверхности одной изъ бластомеръ между полярной клѣткой и фолликулярнымъ эпителіемъ. Она имѣетъ въ разрѣзѣ полулунную форму и снабжена оваль-

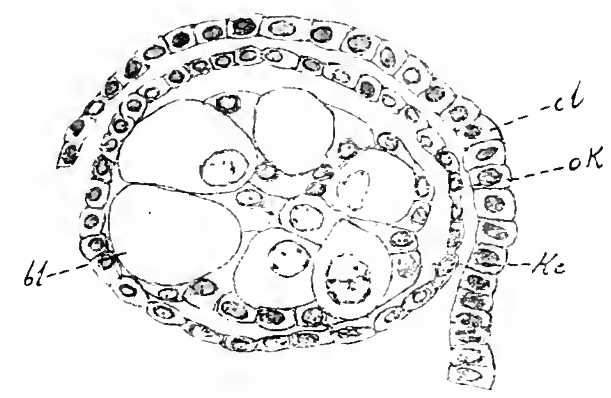
нымъ ядромъ, совершенно похожимъ по своей структурѣ на ядра фолликулярнаго эпителія, красящіяся интенсивно гематоксилиномъ. Въ непосредственномъ сосѣдствѣ съ этою клѣткою, въ стѣнкѣ фолликула находится другая клѣтка (*b*), повидимому, готовящаяся къ выходу въ полость яйцевой камеры. Она лежитъ немного наискось въ ряду другихъ клѣтокъ эпителія и плотно граничитъ своимъ концомъ съ предыдущею клѣткою. Ядро ея перемѣщается на ея конецъ, что по всей вѣроятности находится въ связи съ приготовленіемъ этой клѣтки къ миграціи.

Въ общихъ чертахъ строеніе фолликулярнаго эпителія тоже, что и въ предыдущей стадіи. Передняя часть его утолщена и состоитъ изъ высокихъ цилиндрическихъ клѣтокъ; задняя часть, въ которой лежатъ бластомеры, состоитъ изъ сплющенныхъ клѣтокъ. Миграція фолликулярныхъ клѣтокъ происходитъ на границѣ обоихъ отдѣловъ эпителія; этой границѣ соотвѣтствуетъ и передняя граница бластомеръ, чѣмъ и объясняется то обстоятельство, что первыя мигрирующія клѣтки располагаются на передней поверхности группы бластомеръ.

Послѣ раздѣленія яйцевой клѣтки на 8 бластомеръ дальнѣйшее дѣленіе бластомеръ играетъ въ развитіи второстепенную роль. Главное значеніе пріобрѣтаютъ, начиная съ этой стадіи развитія, калиммоциты. Они размножаются въ громадныхъ размѣрахъ, скоро обвалакиваютъ бластомеры, внѣдряются между ними и образуютъ вмѣстѣ съ ними комокъ клѣтокъ,— зачатокъ, какъ его можно назвать,— лежащій внутри яйцевой камеры и прикрѣпляющійся въ одномъ мѣстѣ къ стѣнкѣ послѣдней (фолликулярному эпителію). Въ то время, когда число калиммоцитовъ достигаетъ многихъ десятковъ и можетъ быть сотенъ (сосчитать ихъ очень трудно) число бластомеръ въ самыхъ позднихъ стадіяхъ, передъ началомъ органогенеза, не превышаетъ у *Salpa fusiformis* шестнадцати. О поѣданіи калиммоцитовъ бластомерами не можетъ быть рѣчи. Всякому, кто познакомится со строеніемъ яйца въ этотъ періодъ развитія, станетъ яснымъ, что число калиммоцитовъ не только не уменьшается, но напротивъ увеличивается въ громадныхъ размѣрахъ.

Эти процессы мною были описаны уже давно; они совершенно ясны и убѣдительны также и для каждаго, кто разсмотритъ рисунки разрѣзовъ яйца, представленные у Гейдера и Коротнева, утверждающихъ вопреки полнѣйшей очевидности, что бластомеры исчезаютъ, поѣдаясь бластомерами, или распадаясь вслѣдствіе старческой дегенераціи. Ни одинъ изъ названныхъ ученыхъ не прослѣдилъ подробно судьбу бластомеръ и калиммоцитовъ, и отношеніе этихъ клѣточныхъ элементовъ другъ къ другу.

Форма яйца во время сегментаціи измѣняется очень мало. Яйцо имѣетъ овальную форму. Измѣняется однако положеніе яйца. Въ раннихъ стадіяхъ сегментаціи яйцо ложится длинной осью параллельно поверхности клоакальной оболочки, къ концу сегментаціи оно становится перпендикулярно послѣдней своею длинною продольною осью. Вслѣдствіе этого клоакальная оболочка или эпителіальный бугоръ, который она образуетъ надъ яйцевой камерой, приподнимается и вдается все больше и больше внутрь клоакальной полости. Конечнымъ результатомъ этихъ измѣненій является то, что клоакальная оболочка охватываетъ яйцевую камеру и образуетъ надъ нею капюшонъ. Эти явленія, извѣстныя уже изъ изслѣдованій моихъ и другихъ эмбріологовъ надъ различными видами сальпъ и описанныя для *S. fusiformis* Гейдеромъ, общи для текогонныхъ сальпъ и для *S. zonaria* изъ гимногонныхъ сальпъ. Гистологическія измѣненія, которыя происходятъ въ клоакальной оболочкѣ въ этотъ періодъ развитія и которыя ведутъ къ образованію стѣнки плаценты и клоакальной оболочки зародыша мы разсмотримъ дальше. Теперь же перейдемъ къ обслѣдованію клѣтокъ, образующихся внутри яйцевой камеры, состоящихъ изъ бластомеръ и калиммоцитовъ — зачатка — и дающихъ начало зародышу.



Фиг. 3. Продольный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру съ яйцомъ въ стадіи дѣленія на 10 бластомеръ (*bl*). Обрастаніе бластомеръ калиммоцитами (*kc*). Остальныя буквы, какъ на фиг. 1 и 2. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

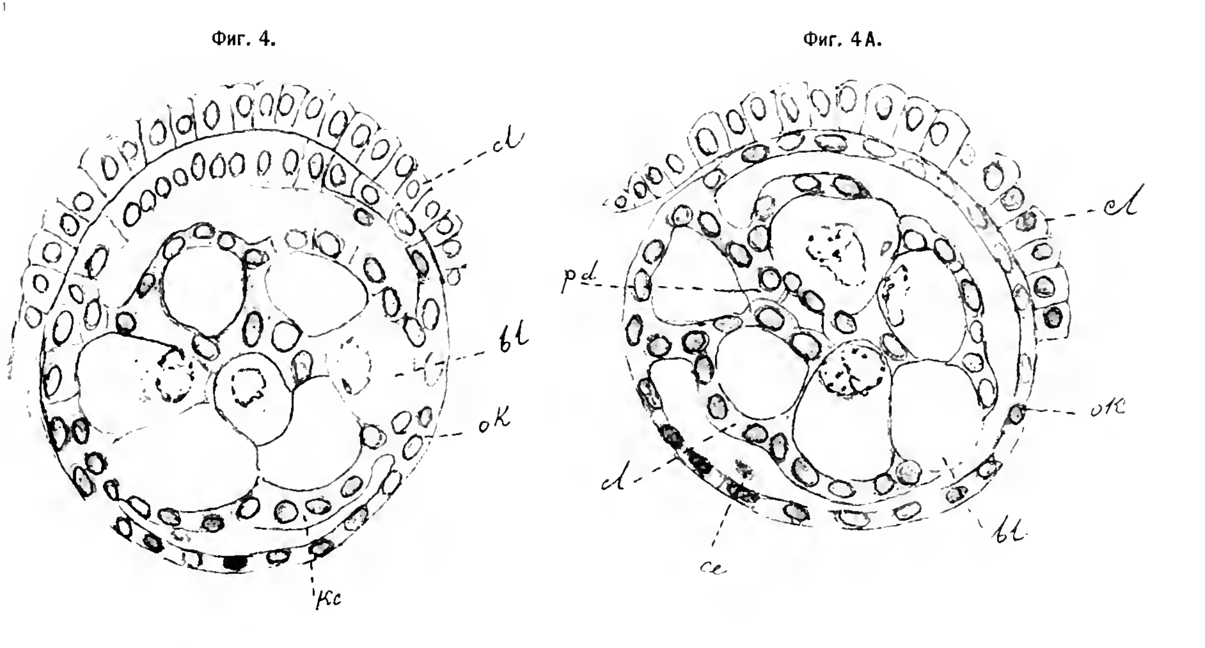
На фиг. 3 изображенъ одинъ разрѣзъ изъ серіи разрѣзовъ, проведенныхъ черезъ яйцевую камеру въ стадіи дробленія на 10 бластомеръ. Мы видимъ, что бластомеры частью уже одѣты калиммоцитами, располагающимися на ихъ поверхности и мѣстами проникающими между нихъ. Зачатокъ, состоящій изъ бластомеръ и калиммоцитовъ, далеко не заполняетъ еще полости яйцевой камеры.

Между бластомерами мы находимъ большія и маленькія. Величина, которую мы видимъ на разрѣзахъ, не соотвѣтствуетъ вездѣ настоящей величинѣ бластомеръ, такъ какъ она зависитъ отъ того, разрѣзанъ-ли бластомеръ по всей своей длинѣ и ширинѣ или задѣтъ только одной своей частью. Поэтому сравнивая однѣ и тѣ же бластомеры на сосѣднихъ разрѣзахъ, мы

видимъ, что однѣ изъ нихъ, являющіеся на данномъ разрѣзѣ большими, на сосѣднемъ являются маленькими, потому что на послѣднемъ попалъ только ихъ отрѣзокъ. Помимо этого обстоятельства, нельзя, однако, отрицать, что нѣкоторая разница въ величинѣ бластомеръ существуетъ, но она весьма незначительна, и что попадаются, главнымъ образомъ въ срединѣ комка зародышевыхъ клѣтокъ, очень маленькія клѣтки, которыя и на ближайшемъ разрѣзѣ являются маленькими. Одна изъ такихъ попалась и на фиг. 3 въ срединѣ между бластомерами; это единственная, которую я могъ замѣтить на цѣлой серіи разрѣзовъ изъ этой яйцевой камеры. Говорить на этомъ основаніи о томъ, что при сегментаціи яйцевая клѣтка дробится на микромеры и макромеры, строго говоря, можно, разъ попалась хотя бы одна эта клѣтка; но говорить о томъ, что такое различіе между бластомерами имѣетъ проспективное значеніе, что изъ большихъ клѣтокъ образуется энтодермъ, а изъ малыхъ — эктодермъ, какъ это дѣлаетъ Гейдеръ, нѣтъ ни малѣйшаго основанія, тѣмъ болѣе, что эта маленькая клѣтка, микромеръ, именно лежитъ не на поверхности, а внутри сегментирующагося яйца При этомъ надо замѣтить, что такія маленькія бластомеры попадаются не на всѣхъ стадіяхъ развитія. На разрѣзѣ въ стадіи дробленія въ 12 бластомеръ (фиг. 4) мы опять видимъ такую же маленькую бластомеру, окруженную большими; на этотъ разъ можно убѣдиться на слѣдующемъ разрѣзѣ, что она составляетъ только часть бластомеры, мало уступающей по своей величинѣ другимъ бластомерамъ.

На большинствѣ разрѣзовъ черезъ яйцевую камеру, содержащую бластомеры съ калиммоцитами видно, что послѣдніе не только прочно связаны между собою, но и фиксированы къ стѣнкѣ яйцевой камеры, т. е. фолликулярному эпителію. Связь бластомеръ между собою и образованіе ими плотной группы достигается тѣмъ, что онѣ обволакиваются калиммоцитами снаружи; связь ихъ со стѣнкою яйцевой камеры достигается тѣми же калиммоцитами, непосредственно соединяющимися съ послѣднею. Эта связь видна только на нѣкоторыхъ разрѣзахъ (одномъ или двухъ), такъ какъ она очень тонка. На фиг. 4 А представленъ разрѣзъ, проведенный именно черезъ то мѣсто, гдѣ группа зародышевыхъ клѣтокъ прикрѣпляется къ фолликулярному эпителію. Этотъ разрѣзъ особенно поучителенъ какъ для уясненія себѣ способа прикрѣпленія «зачатка», такъ и для уясненія дальнѣйшихъ стадій развитія. Какъ видно изъ приведеннаго сейчасъ рисунка на одномъ полюсѣ яйцевой камеры отъ фолликулярнаго эпителія отходитъ группа калиммоцитовъ, образующая родъ стержня, который плотно обхватывается со всѣхъ сторонъ бластомерами, подобно тому какъ зерна плода малины обхватываютъ

коническій стержень, ложе, на которомъ они сидятъ. На разрѣзѣ (4 А) пять бластомеръ, окружающихъ калиммоцитовый стержень, расположены подковообразно, въ дѣйствительности же онѣ образуютъ шапочку, надѣтую на стержень. Когда образуется этотъ калиммоцитовый стержень я не могъ рѣ-



Фиг. 4 и 4 А. Два разрѣза черезъ яйцевую камеру съ зачаткомъ въ стадіи дѣленія на 12 бластомеръ; *pd*—ножка изъ калиммоцитовъ, которой зачатокъ прикрѣпленъ къ стѣнкѣ яйцевой камеры. Буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ; *ce* — клѣтка вѣроятно отдѣлившаяся отъ зачатка, свободно лежащая въ полости яйцевой камеры. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1.5).

шить. Мы видѣли, что въ стадіи 8 бластомеръ, когда только что начинается образованіе калиммоцитовъ, послѣдніе налегаютъ на поверхность близъ лежащихъ бластомеръ; вѣроятно образованіе калиммоцитнаго стержня происходитъ впослѣдствіи путемъ пролифераціи фолликулярнаго эпителія и начинается на одномъ полюсѣ яйца, тогда какъ первые калиммоциты начинаютъ образоваться почти на экваторѣ яйцевой камеры.

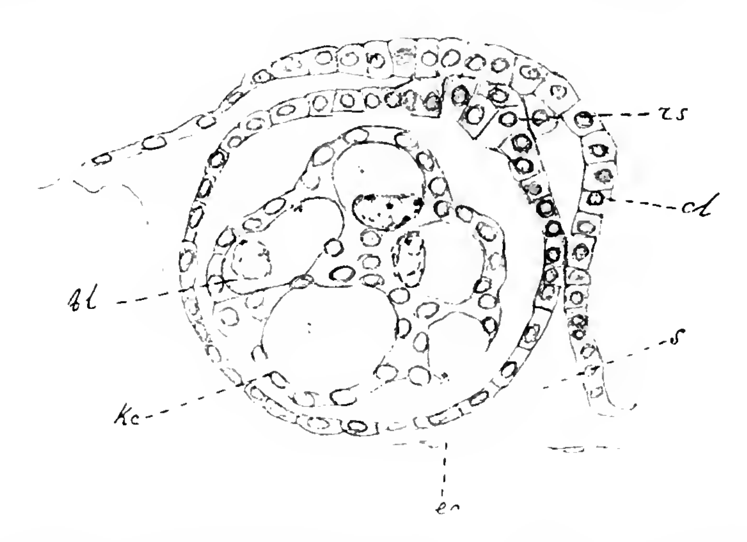
Калиммоцитный стержень виденъ на немногихъ разрѣзахъ стадіи 12-ти бластомеръ въ такомъ видѣ, какъ мы сейчасъ разсмотрѣли; такъ какъ онъ не широкъ. Связь калиммоцитнаго стержня съ фолликулярнымъ эпителіемъ несомнѣнно свидѣтельствуетъ о томъ, что онъ образуется изъ послѣдняго. Въ томъ мѣстѣ, гдѣ онъ прикрѣпляется къ фолликулярному эпителію идетъ наиболѣе энергичная пролиферація фолликулярныхъ клѣтокъ

внутрь сегментированнаго яйца. Эти клѣтки встрѣчаютъ наименьшее сопротивленіе между ближайшими бластомерами и внѣдряются между ними, сначала облекая ихъ, а потомъ и проникая въ формѣ толстаго клѣточнаго ствола между ними и далѣе въ центръ группы бластомеръ. Весьма вѣроятно, что калиммоцитный стволъ есть главный источникъ калиммоцитовъ, занимающихъ центральное положеніе въ зачаткѣ; его нельзя, конечно, считать единственнымъ источникомъ этихъ калиммоцитовъ, такъ какъ часть поверхностныхъ калиммоцитовъ, облекающихъ бластомеры, несомнѣнно проникаютъ также внутрь и тамъ служитъ для увеличенія массы центральныхъ калиммоцитовъ.

Мы видѣли изъ расположенія бластомеръ на разрѣзахъ фиг. 4 и 4 A, что они образуютъ вмѣстѣ какъ бы чехолъ, или шапочку, надѣтую на калиммоцитный стержень и окружаютъ въ центрѣ полость, наполненную калиммоцитами. Въ общемъ онѣ, по своему расположенію, напоминаютъ бластодерму, окружающую бластоцель, съ тѣмъ различіемъ, что въ нашемъ случаѣ эта бластодерма снабжена отверстіемъ для прохода калиммоцитнаго ствола. Такое сходство съ бластодермомъ и съ бластоцелемъ можетъ подать поводъ для толкованія сегментаціи *S. fusiformis* (и вѣроятно многихъ другихъ видовъ сальпъ) въ смыслѣ образованія стадіи бластула. На сколько такое толкованіе имѣетъ фактическія основанія сказать теперь очень трудно, тѣмъ болѣе что эту форму расположенія бластомеръ можно также объяснить какъ результатъ чисто механическихъ условій сегментаціи. Судя по совершенной правильности первыхъ трехъ стадій дробленія яйца (на 2, 4 и 8 бластомеръ) можно съ большимъ вѣроятіемъ принять, что прототипомъ сегментаціи сальпъ была правильная и полная сегментація, оканчивающаяся обыкновенно образованіемъ бластула съ развитымъ бластоцелемъ. Въ пользу этого говоритъ и то, что бластомеры и во время дальнѣйшихъ стадій сегментаціи примыкаютъ другъ къ другу и только въ періодъ образованія первыхъ органовъ, расходятся въ массѣ калиммоцитной ткани. Въ образованіи калиммоцитовъ, облегающихъ бластомеры и раздвигающихъ ихъ другъ отъ друга, слѣдуетъ видѣть механическую причину какъ уклоненія первоначальной правильной сегментаціи, такъ и задержки дробленія яйца. Само собою понятно, что бластомеры, окруженные со всѣхъ сторонъ калиммоцитами, сдавленные послѣдними, не имѣютъ возможности дѣлиться такъ же энергично, какъ они дѣлились прежде, или же должны измѣнить форму дѣленія, что мы и увидимъ дальше при обзорѣ позднихъ стадій сегментаціи.

Наличность причинной связи между задержкой дробленія бластомеръ и

разростаніемъ калиммоцитовъ видна очень ясно при сравненіи различныхъ стадій сегментаціи между собою. Въ стадіяхъ дробленія на 10 и 12 бластомеръ калиммоциты не образуютъ еще полной оболочки надъ бластомерами и проникаютъ въ ограниченномъ количествѣ между бластомерами въ средину зачатка. Уже между дѣленіемъ на 10 и на 12 бластомеръ видна нѣкоторая разница въ развитіи калиммоцитовъ. Еще больше проявляется эта разница въ стадіи дѣленія на 13 бластомеръ (фиг. 5), гдѣ гораздо бо́льшее коли-



Фиг. 5. Продольный разрѣзъ черезъ яйцевую камеру и зачатокъ въ стадіи дѣленія на 13 бластомеръ; *ee* — эктодермъ материнскаго тѣла; *re* — *receptaculum seminis* (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

чество калиммоцитовъ проникло внутрь зачатка. Наиболѣе усиленная пролиферація калиммоцитовъ происходитъ въ послѣднія стадіи сегментаціи, когда яйцевая камера съ зачаткомъ внутри представляетъ длинный мѣшокъ, расширенный внизу и одѣтый въ значительной своей передней и средней части клоакальной оболочкой. Здѣсь почти вся полость яйцевой камеры наполнена калиммоцитами, которые до такой степени раздвигаютъ бластомеры другъ отъ друга, что послѣдніе являются какъ бы вкрапленными внутрь калиммоцитной массы (фиг. 10).

Чрезвычайно важно уяснить себѣ отношеніе калиммоцитной массы къ бластомерамъ. Если мы изслѣдуемъ подробнѣе расположеніе ядеръ и самихъ калиммоцитовъ (если можно ясно видѣть ихъ границы), то мы можемъ различить двоякаго рода калиммоциты по ихъ расположенію. Одни изъ нихъ окружаютъ бластомеры и образуютъ вокругъ нихъ родъ капсулъ, другіе располагаются между капсулами, окружающими бластомеры. Разницы

между тѣми и другими въ строеніи нѣтъ никакой; вся разница заключается въ ихъ расположеніи. Во многихъ случаяхъ въ этой стадіи развитія, какъ и въ послѣдующихъ стадіяхъ, тѣло бластомеры выпадаетъ на разрѣзахъ, и тогда можно ясно видѣть, что бластомера лежитъ въ полости, окруженной кольцомъ калиммоцитовъ (фиг. 11). Изслѣдуя ближе эту полость, можно убѣдиться въ томъ, что кольцо калиммоцитовъ, окружающее бластомеру отдѣлено отъ послѣдней тонкой безструктурной кутикулярной оболочкой. Такимъ образомъ каждая бластомера лежитъ въ особой капсулѣ какъ въ гнѣздѣ, выстланномъ тонкой оболочкой. Это обстоятельство является весьма важнымъ въ вопросѣ: могутъ ли калиммоциты, окружающіе бластомеры и образующіе вокругъ нихъ плотную капсулу, проникнуть внутрь этой полости и при случаѣ быть съѣденными бластомерами. Теоретически такую возможность отрицать нельзя, такъ какъ оболочка не можетъ еще служить преградою для прохожденія клѣтки. Мы знаемъ, однако, вмѣстѣ съ тѣмъ, что клѣтки, проникающія черезъ оболочки (лейкоциты, фагоциты и многія другія клѣтки) обладаютъ въ такихъ случаяхъ подвижностью. Калиммоциты же не обладаютъ способностью движенія. Никогда ни я, ни эмбріологи, утверждающіе будто бы калиммоциты пожираются бластомерами, не видѣли амебообразно подвижныхъ калиммоцитовъ. Если калиммоциты мигрируютъ изъ фолликулярнаго эпителія и ложатся на поверхности бластомеровъ, какъ это, напр., имѣетъ мѣсто въ стадіи перваго ихъ появленія (фиг. 2), то здѣсь мы имѣемъ дѣло съ ростомъ фолликулярной клѣтки и проталкиваніемъ ея изъ фолликулярнаго эпителія подъ давленіемъ сосѣднихъ клѣтокъ, но не съ произвольнымъ движеніемъ.

Въ тѣхъ же стадіяхъ развитія, гдѣ появляются впервые такъ называемыя «парцелли» или «желточныя тѣла», о которыхъ была рѣчь впереди и гдѣ Гейдеръ видитъ поѣданіе калиммоцитовъ, въ стадіи 16 бластомеровъ (фиг. 7 и 8), калиммоциты лежатъ такъ плотно другъ къ другу, что даже границы ихъ видны не всегда. Поэтому, я не только отрицаю поѣданіе калиммоцитовъ бластомерами, но отрицаю и возможность такого поѣданія, при тѣхъ условіяхъ, при которыхъ находятся бластомеры и калиммоциты въ зачаткѣ.

Отвергая гипотезу Гейдера о поѣданіи калиммоцитовъ бластомерами, я, естественно, долженъ отвѣтить на вопросъ: что же представляютъ собою тѣла, найденныя мною въ бластомерахъ различныхъ сальпъ, названныя парцеллями и считающіяся Гейдеромъ за съѣденные бластомеры?

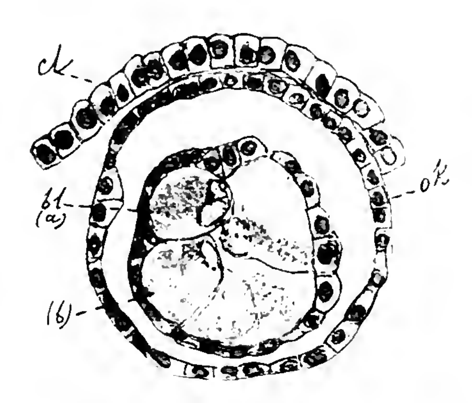
Въ моей прежней работѣ я не обратилъ достаточнаго вниманія на строеніи парцелль, придавая имъ значеніе желточныхъ зернышекъ. Я опи-

салъ ихъ тогда какъ разсѣянныя въ плазмѣ бластомеръ частицы, отличающіяся извѣстной характерной формой и извѣстными физическими качествами. Я ихъ наблюдалъ у *S. pinnata*, *S. africana* и *S. punctata;* у *S. fusiformis* я тогда ихъ не наблюдалъ, такъ какъ вообще не наблюдалъ тогда сегментаціи у этой сальпы. Теперешній опытъ научилъ меня, что для изслѣдованія тонкаго строенія бластомеръ, а слѣдовательно для изученія строенія парцеллъ необходимо наблюденіе при гораздо болѣе сильныхъ увеличеніяхъ, чѣмъ тѣ, которыми я пользовался тогда, и прослѣдить ихъ на серіяхъ разрѣзовъ, и что только такимъ путемъ можно выяснить природу ихъ и отношеніе ихъ къ плазмѣ бластомеръ. Надо имѣть въ виду, что бластомеры суть довольно большія клѣтки и что такъ называемыя парцелли находятся въ различныхъ частяхъ бластомеры, слѣдовательно на разрѣзахъ онѣ могутъ быть перерѣзаны въ самыхъ различныхъ направленіяхъ и являются вслѣдствіе этого какъ будто разсѣянными въ плазмѣ бластомеръ; въ такомъ видѣ я ихъ и описалъ. Для того, чтобы видѣть связь парцеллъ съ плазмою бластомеръ, необходимо выбрать особенно удачные разрѣзы черезъ бластомеры, гдѣ бластомера разрѣзана въ продольномъ направленіи и всѣ части ея плазмы видны въ ихъ натуральной связи другъ съ другомъ. Такіе разрѣзы, изслѣдованные мною при сильныхъ увеличеніяхъ (Zeiss Apochr. Im. 1,5 + Oc. 4) показали мнѣ, что «парцелли», какъ частички, отдѣльныя отъ плазмы и заключенныя только въ ней, не существуютъ, а что онѣ суть интегрированныя части самой плазмы бластомеръ, кажущіяся отдѣльными только на разрѣзахъ, проведенныхъ черезъ боковыя части плазмы, на которыхъ видны только ихъ отрѣзки.

Мы видѣли при описаніи раннихъ стадій сегментаціи, что бластомеры состоятъ въ этихъ стадіяхъ изъ однородной мелкозернистой плазмы, имѣющей въ большинствѣ случаевъ сферическую форму, болѣе или менѣе видоизмѣненную отъ давленія окружающихъ клѣтокъ. Въ болѣе позднихъ стадіяхъ сегментаціи онѣ лежатъ въ особыхъ полостяхъ, стѣнки которыхъ состоятъ изъ калиммоцитовъ, выдѣляющихъ пограничную оболочку этихъ полостей. Благодаря такому, относительно свободному положенію, бластомеры, обладая до извѣстной степени способностью движенія внутри этихъ полостей, не могутъ, однако, изъ нихъ выйти.

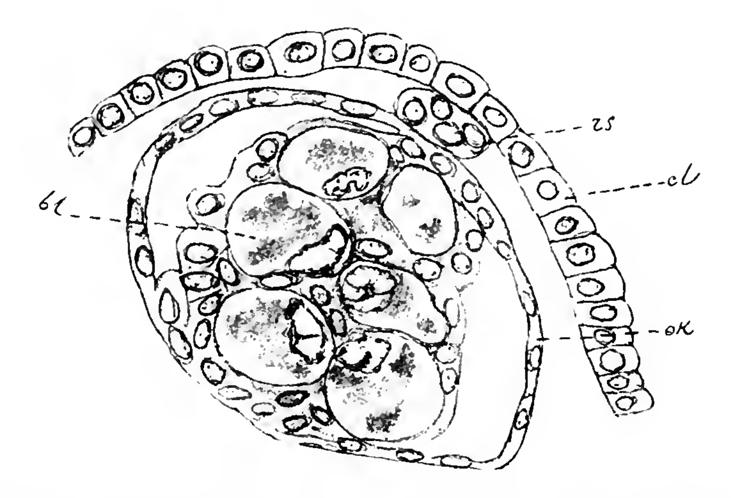
Онѣ могутъ сокращаться въ тѣхъ полостяхъ, въ которыхъ лежатъ, могутъ образовать плазматическіе отростки. И дѣйствительно, къ концу сегментаціи мы замѣчаемъ уже первые признаки измѣненія формы бластомеръ, которыя становятся впослѣдствіи очень характерными и оригинальными.

На фиг. 6 представленъ одинъ изъ разрѣзовъ черезъ яйцевую камеру въ стадіи дѣленія на 14 бластомеръ. Разрѣзъ прошелъ черезъ боковую часть зачатка, который вслѣдствіе этого находится свободно въ яйцевой камерѣ. Въ разрѣзъ попали 5 бластомеръ, одѣтыхъ слоемъ калиммоцитовъ; изъ нихъ въ трехъ видные ядра. Изслѣдуя подробнѣе эти калиммоциты, мы видимъ, что по крайней мѣрѣ въ двухъ изъ нихъ плазма отстала отъ стѣнки калиммоцитной капсулы; часть ея, лежащая вокругъ ядра цѣльная, периферическая же часть раздѣлилась на двѣ лопасти (фиг. 6, *a* и *b*). Въ остальныхъ бластомерахъ плазма не измѣнена; только въ одномъ бластомерѣ она не вполнѣ однородна вездѣ, состоитъ въ одной части изъ болѣе мелкозернистой и болѣе окрашенной плазмы, чѣмъ въ другой. Эту стадію развитія представляетъ первое начало образованія лопастей плазмою бластомеръ.



Фиг. 6. Разрѣзъ черезъ яйцевую камеру и зачатокъ въ стадіи, когда начинается образованіе лопастныхъ отростковъ въ плазмѣ бластомеръ (см. *bl* a и *b* — двѣ бластомеры, въ которыхъ именно начинаются эти измѣненія): остальныя буквы какъ на фиг. 1. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

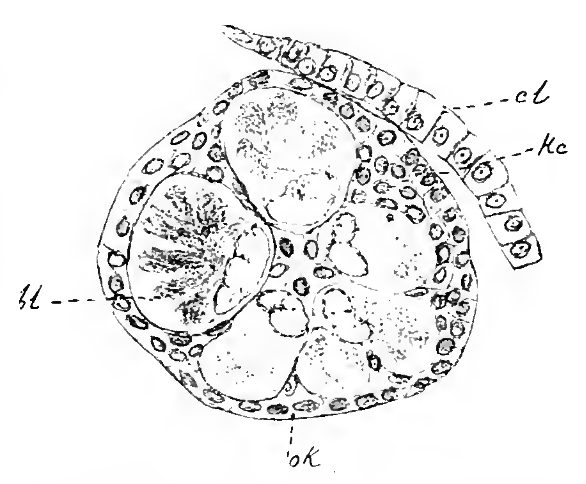
Въ слѣдующей за симъ стадіи развитія (фиг. 7) всѣ бластомеры, сократившись, отстали отъ калиммоцитной капсулы и лежатъ свободно въ полостяхъ. Плазма всѣхъ бластомеръ вытягивается въ маленькіе лопастные



Фиг. 7. Разрѣзъ черезъ яйцевую камеру съ зачаткомъ во время дальнѣйшаго развитія лопастныхъ отростковъ изъ плазмы бластомеръ (*bl*) 16 бластомеръ. Буквы какъ на фиг. 1 и предыдущихъ фигурахъ). (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

отростки, которые имѣютъ видъ полукруглыхъ фестоновъ, выходящихъ на полюсѣ противуположномъ ядру. Пузыристое ядро, наполненное прозрачною жидкостью съ протянутыми въ ней нитями, снабженными зернышками хроматина, имѣетъ неправильную форму сплющенныхъ и вытянутыхъ оваловъ; иногда зернышки хроматина скопляются посрединѣ ядеръ въ видѣ перегородокъ, придающихъ ядру видъ, какъ будто оно находится въ состояніи дѣленія. Плазма, лежащая вокругъ ядра, гораздо свѣтлѣе той, которая составляетъ лопасти, что объясняется, вѣроятно, бо̀льшимъ скопленіемъ зернышекъ въ лопастяхъ.

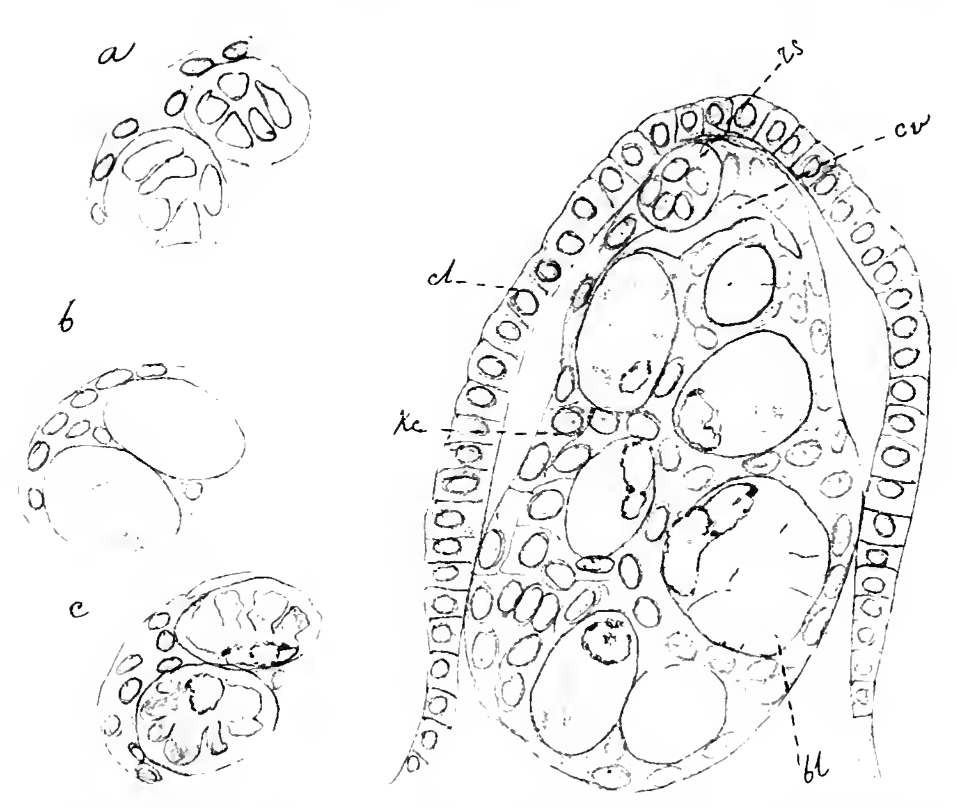
На разрѣзѣ (фиг. 8) изъ яйцевой камеры съ 16-ю бластомерами, бластомеры снабжены различнымъ количествомъ лопастныхъ отростковъ различной формы. У нѣкоторыхъ бластомеръ они тонки и длинны, закруглены или притуплены на концахъ, у другихъ толсты и коротки, какъ на стадіи фиг. 7. Вездѣ концевая ихъ часть состоитъ изъ болѣе уплотненной плазмы и потому темнѣе, чѣмъ центральная ихъ часть, лежащая ближе къ центральной плазмѣ, окружающей ядро.



Фиг. 8. Разрѣзъ черезъ яйцевую камеру съ зачаткомъ въ періодъ полнаго развитія лопастныхъ отростковъ бластомеръ. Буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1,5).

Тѣ картины, которыя мы видимъ на разрѣзахъ, прошедшихъ черезъ бластомеру съ ея отростками (фиг. 7 и 8) значительно отличаются, однако, отъ такихъ разрѣзовъ, которые прошли черезъ периферическую часть отростковъ плазмы бластомеръ, гдѣ эти отростки являются дѣйствительно въ формѣ частичекъ, «парцелль», отдѣльныхъ какъ будто отъ плазмы, окружающей ядро. Чтобы убѣдиться, что эти, кажущіяся отдѣльными, частички суть ничто иное какъ перерѣзанныя отростки плазмы, надо изслѣдовать всю серію рисунковъ черезъ бластомеры. На фиг. 9*a*, *b*, *c* представлены три послѣдовательные разрѣза черезъ 2 бластомеры. На фиг. 9*a* разрѣзъ прошелъ черезъ периферическую часть бластомеръ; въ обѣихъ бластомерахъ видны части отростковъ плазмы въ видѣ частичекъ или парцелль, совершенно такихъ, какіе нарисованы въ моей работѣ (Neue Untersuchungen etc. Табл. 11 фиг. 14$^{pln.}$, 16 фиг. 6^{af} и проч.). Въ слѣдую-

щемъ разрѣзѣ (фиг. 9*b*) мы видимъ тѣ же парцелли, но уже соединенныя вмѣстѣ и имѣющія форму лопастей. Наконецъ, на разрѣзѣ фиг. 9*c* обѣ бластомеры разрѣзаны черезъ всю плазму и ядро и представляютъ картину, которую мы видимъ на фигурахъ 7 и 8, гдѣ отъ плазмы, заключающей ядро, отходятъ въ разныя стороны отростки. Я привожу описаніе этихъ разрѣзовъ съ цѣлью показать до какой степени важно изслѣдованіе цѣлой серіи разрѣзовъ, а не одного только разрѣза. При этомъ въ моихъ прежнихъ изслѣдо-



Фиг. 9. Три слѣдующихъ другъ за другомъ разрѣза черезъ бластомеры во время полнаго развитія лопастныхъ отростковъ, для того чтобы показать, что частичныя перерѣзки ихъ можно принять за отдѣльныя тѣльца — парцелли. (Zeiss, oc. 4 + Imm. 1,5).

Фиг. 10. Продольный разрѣзъ черезъ удлинившуюся яйцевую камеру, одѣвающуюся на большей части поверхности клоакальной оболочкой: *cv* — полость яйцевой камеры; *rs* — *receptaculum seminis*, лежащій въ стѣнкѣ яйцевой камеры. Остальныя буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Zeiss, oc. 4 + Imm. 1,5).

ваніяхъ, мнѣ казалось до такой степени ясно, что такъ называемые парцелли представляютъ желточныя зерна, что я ограничился довольно бѣглымъ обзоромъ разрѣзовъ, оставивъ не выясненнымъ отношенія этихъ парцелль къ плазмѣ бластомеровъ. Такая же бѣглость изслѣдованія составляетъ причину ошибки Гейдера, который главнымъ образомъ обратилъ вниманіе на

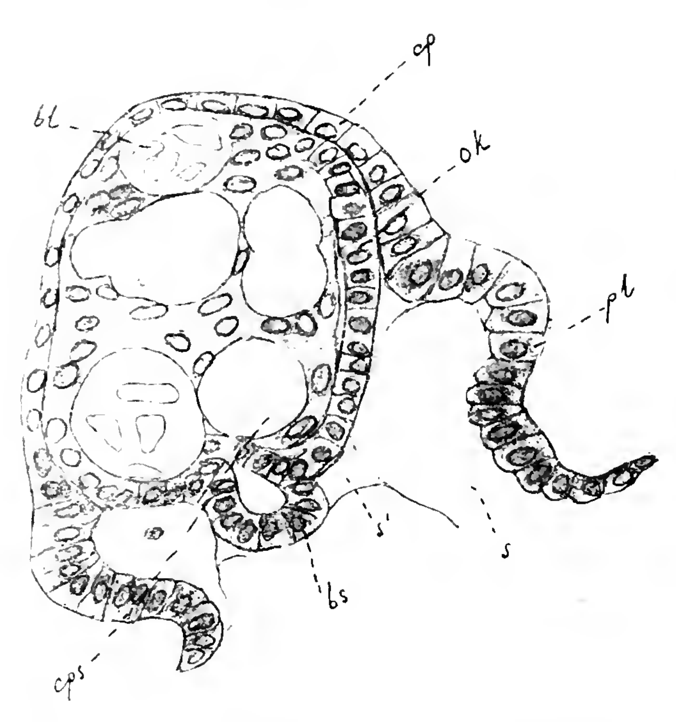
вопросъ: есть ли въ парцелляхъ ядра, и, найдя хотя бы и весьма неясныя ядра, сдѣлалъ очень поспѣшное заключеніе, что парцелли суть поглощенные калиммоциты. Такое заключеніе неосновательно, такъ какъ существованіе ядеръ доказываетъ только то, что эти парцелли суть клѣтки, но не доказываетъ, чтобы онѣ были поглощены бластомерами. Что же представляютъ изъ себя лопастные отростки плазмы бластомеръ? Этотъ вопросъ можетъ быть разрѣшенъ только изслѣдованіями болѣе позднихъ стадій развитія. Покуда я могу только сказать, что плазматическіе лопастные отростки бластомеръ получаютъ ядра и становятся клѣтками, но это совершается именно тогда, когда по Гейдеру всѣ калиммоциты уже должны быть съѣдены бластомерами. Это даетъ еще одинъ изъ доводовъ противъ теоріи Гейдера.

Мы могли бы на этомъ покончить съ описаніемъ сегментаціи, еслибы во время этого процесса не происходили чрезвычайно важныя измѣненія въ клоакальной оболочкѣ, ведущія къ образованію плаценты и клоакальнаго покрова. Образованіе этихъ органовъ, происходящихъ изъ материнскаго организма, играющихъ важную физіологическую роль, но не принадлежащихъ яйцевой камерѣ, изъ которой собственно строится зародышъ, мы можемъ разсмотрѣть теперь же.

Изъ разрѣзовъ черезъ всѣ разсмотрѣнныя до сихъ поръ стадіи сегментаціи (фиг. 3—10), мы видимъ, что клоакальная оболочка довольно близко прилегаетъ къ яйцевой камерѣ, образуетъ надъ ней сводъ, который вмѣстѣ съ тѣмъ и ограничиваетъ кровеносный синусъ, въ которомъ располагается яйцо. Въ эту клоакальную оболочку открывается яйцеводъ половымъ отверстіемъ, которое послѣ оплодотворенія яйца замыкается; яйцеводъ остается, однако, до конечныхъ стадій сегментаціи. Къ концу сегментаціи яйцевая камера вмѣстѣ съ заключеннымъ въ ней зачаткомъ сильно удлиняется (фиг. 10) и становится перпендикулярно къ клоакальной оболочкѣ (*cl*). Послѣдняя слѣдуетъ за измѣненіемъ формы яйцевой камеры и образуетъ надъ нею чехолъ, прикрывающій ее почти по всей длинѣ, за исключеніемъ нижней части, которая свободна вдается въ кровяной синусъ. Все яйцо омывается и въ этой стадіи кровью, которая протекаетъ между яйцевой камерой и клоакальной оболочкой.

Въ этой стадіи развитія можно уже замѣтить небольшую разницу въ толщинѣ между верхней частью клоакальной оболочки, прилегающей къ верхушкѣ яйцевой камеры, и нижней ея частью, переходящею въ стѣнку клоаки. Первая изъ этихъ частей становится нѣсколько тоньше второй. Послѣдняя также утончается книзу, гдѣ она постепенно переходитъ въ стѣнку материнской клоаки. Еще сильнѣе проявляется эта разница въ слѣдующей стадіи (фиг. 11), гдѣ уже совершенно ясно объособляется изъ нижней части клоа-

кальной оболочки зачатокъ плаценты. Верхняя часть клоакальной оболочки теперь совершенно плотно прилегаетъ къ яйцевой камерѣ и обнимаетъ болѣе $^2/_3$ всей ея поверхности. Поверхность яйцевой камеры покрыта эпителіальнымъ слоемъ, въ которомъ мы легко узнаемъ фолликулярный эпителій (*ok*); внутри ея находится зачатокъ, состоящій изъ бластомеръ и калиммоцитовъ. Нижняя часть яйцевой камеры вдается свободно въ кровеносный синусъ (*s*). На нижнемъ полюсѣ яйцевой камеры фолликулярный эпителій выростаетъ въ видѣ полаго отростка внутрь кровеноснаго синуса (*bs*). Этотъ отростокъ принято называть, по почину Тодаро кровеобразовательной почкой, хотя онъ собственно говоря никакого участія въ кровеобразованіи не принимаетъ.



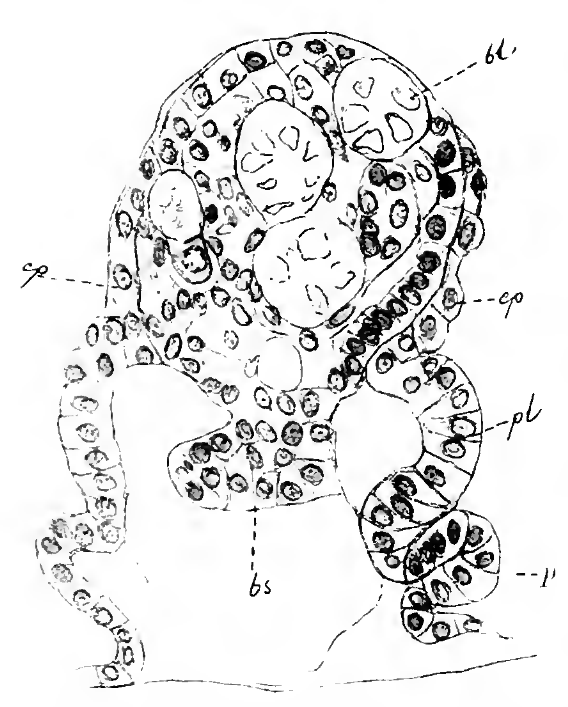
Фиг. 11. Продольный разрѣзъ черезъ зародыша во время диференцированія клоакальной оболочки на клоакальный колпачекъ (*cp*) и плаценту (*pl*); *cps* — капсулы, изъ которыхъ выпали бластомеры; *bs* — кровяная почка; *s'* — кровеносная пазуха вокругъ кровяной почки; кровяныя пазухи собствено плаценты. (Zeiss. oc. 4 + Imm. 1.5).

Нижняя часть клоакальной оболочки теперь рѣзко отличается и по формѣ и по строенію отъ верхней, такъ что мы съ полнымъ правомъ можемъ обѣ эти части обозначить отдѣльными названіями. Верхняя часть, прилегающая къ яйцевой камерѣ (*cp*), можетъ быть названа ***клоакальнымъ колпачкомъ***. Она состоитъ изъ слоя гораздо меньшихъ эпителіальныхъ клѣтокъ, нежели нижняя. Нижняя часть (*pl*), обнимающая собою кровеносный синусъ, очень сильно выпячивается и состоитъ теперь изъ большихъ цилиндрическихъ эпителіальныхъ клѣтокъ. Подобно тому, какъ въ стадіи нарисованной на фиг. 10, онъ книзу постепенно утончается и незамѣтно переходитъ въ клоакальную стѣнку. Эта часть клоакальной оболочки составляетъ зачатокъ боковой стѣнки плаценты.

Кровеносная полость, которая въ предыдущей стадіи составляла одну нераздѣльную полость, простирающуюся, какъ мы видѣли, вверхъ между яйцевой камерой и клоакальной оболочкой, теперь нѣсколько измѣняется. Во 1-хъ она замыкается тонкой оболочкой въ своей верхней части, какъ разъ соотвѣтственно верхней границѣ плаценты. Вслѣдствіе этого кровь не можетъ проникать въ верхнюю часть зародыша между яйцевой камерой и клоакальнымъ покровомъ, а концентрируется въ полости плаценты, которая является теперь главнымъ питательнымъ очагомъ зародыша. Во 2-хъ та же тонкая оболочка, которая ограничиваетъ кровяную полость одной плацентой, спускается внизъ и раздѣляетъ кровяную полость на 2 части: центральную, въ которую вдается кровеобразовательная почка, и периферическую, принадлежащую собственно плацентѣ. Надо полагать, что такое раздѣленіе кровяной полости служитъ для раздѣленія кровяного тока, который, вѣроятно, въ одной части, напр., периферической движется въ одну сторону, въ другой — въ другую.

Мы приходимъ, наконецъ, къ послѣдней стадіи изъ періода сегментаціи, въ которой начинается образованіе клоакальной складки (фиг. 12). Плацента (*pl*) совершенно уже дифференцировалась отъ клоакальнаго колпачка (*cp*). На нижней части плаценты образуется складка, которая, по всей вѣроятности, уже теперь раздѣлена на 2 складки: правую и лѣвую, но онѣ на разрѣзѣ не видны. Эти складки (*p*), судя по величинѣ клѣтокъ, изъ которыхъ онѣ состоятъ, образуются нижней частью плаценты, а не клоакальной стѣнкой, клѣтки которой гораздо площе. Собственно въ стѣнкѣ плаценты не видно особыхъ измѣненій; она состоитъ, по прежнему изъ большихъ эпителіальныхъ стѣнокъ. Гораздо существеннѣе измѣненія въ клоакальномъ колпачкѣ. Верхняя часть его, покрывающая верхнюю часть яйцевой камеры до такой степени утончается, что видна только въ видѣ тончайшей безструктурной оболочки. Клѣточное строеніе сохраняется только въ нижней части колпачка, примыкающей непосредственно къ плацентѣ. Очевидно, здѣсь мы имѣемъ дѣло съ разрушеніемъ клоакальнаго колпачка, — явленіемъ, свойственнымъ всѣмъ сальпамъ, какъ текогоннымъ, такъ и гимногоннымъ. У послѣднихъ, напр., у *S. zonaria*, клоакальный покровъ есть единственный покровъ, защищающій зародыша въ молодыхъ стадіяхъ развитія отъ дѣйствія тока воды, протекающей въ клоакѣ; тогда какъ у текогонныхъ сальпъ къ этому покрову прибавляется еще клоакальная складка. Этимъ объясняется, что у текогонныхъ сальпъ, какъ у *S. fusiformis*, клоакальный покровъ разрывается гораздо раньше, чѣмъ у *S. zonaria*. Само собою разумѣется, что на основаніи теперешнихъ моихъ изслѣдованій надъ *S. fusiformis* и *S. zonaria* я совершенно

отказываюсь отъ моего прежняго взгляда на клоакальный покровъ какъ на зачатокъ эктодерма. Этотъ покровъ имѣетъ значеніе провизорной защитной оболочки и не принимаетъ никакого участія въ построеніи зародыша.



Фиг. 12. Продольный разрѣзъ черезъ зародыша во время образованія клоакальныхъ складокъ (*p*). Буквы какъ на фиг. 11.

Въ заключеніе нѣсколько словъ относительно судьбы яйцевода. Средняя, тонкая часть его, какъ извѣстно сокращается еще раньше оплодотворенія. Какимъ образомъ идетъ это сокращеніе объ этомъ я говорю въ моей статьѣ о созрѣваніи и оплодотвореніи яйца. Послѣ оплодотворенія яйцеводъ представляетъ мѣшокъ, лежащій между яйцевой камерой и клоакальной оболочкой. Къ концу сегментаціи онъ превращается въ плотный комокъ клѣтокъ и сливается съ стѣнкою яйцевой камеры (фолликулярнымъ эпителіемъ). Въ той стадіи сегментаціи, когда яйцевая камера удлиняется и принимаетъ положеніе перпендикулярное клоакальной оболочкѣ (фиг. 10) яйцеводъ совершенно входитъ въ стѣнку яйцевой камеры и является тамъ въ видѣ круглаго комка клѣтокъ, ясно отдѣленнаго отъ клѣтокъ фолликулярнаго эпителія (фиг. 10 *rs*). Во время дальнѣйшихъ стадій развитія какъ разъ въ этомъ же мѣстѣ зародыша появляется группа подвижныхъ клѣтокъ, выходящихъ изъ зародыша въ промежутокъ между нимъ и клоакальною складкою. Мнѣ кажется весьма вѣроятнымъ, о чемъ я буду имѣть случаи подробнѣе говорить въ одномъ изъ послѣдующихъ сообщеній, что эти клѣтки суть ничто иное, какъ продукты распавшагося яйцевода, вышедшіе изъ фолликулярнаго эпителія.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Къ вопросу о плечевомъ поясѣ у *Elasmosaurus* Cope.

(Съ таблицей рисунковъ).

Н. Православлева.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Устройство плечевого пояса у эласмозавровъ до настоящаго времени остается не вполнѣ выясненнымъ.

Извѣстно, что среди скелетныхъ остатковъ эласмозавра, впервые описаннаго Кономъ въ 1868—71 гг.[1] (*Elasmos. platyurus* Cope), изъ костей плечевого пояса были найдены: 1) неполный коракоидъ и 2) одна широкая кость, очевидно парная, помѣщавшаяся впереди коракоида. Кость эта, по Кону, напоминаетъ os pubis нѣкоторыхъ черепахъ и имѣла размѣры: 14 дюйм. 9 лин. въ длину и около 13,5 дюймовъ въ ширину. Съ коракоидомъ она сочленялась двумя отростками, срединнымъ и краевымъ; между нею и коракоидомъ находился овальный foramen obturatorium. Конъ принялъ эту кость за clavicula или procoracoideum. Съ claviculae, думалъ Конъ, сростался mesosternum, и всѣ три элемента образовывали одну сплошную грудную пластину. Широкое развитіе claviculae является, по мнѣнію Кона, одной изъ отличительныхъ особенностей *Elasmosaurus*, по

[1] Proceed. Academy of Natur. Scienc. of Philadelphia, 1868. — March. 24-th., July 7-th. Proceed. Boston Soc. Natur. History, vol. XII, p. 265, 1868—69; Americ. Naturalist, vol. III, pp. 84—91, 1870; Transactions of the Americ. Philosophic. Society, vol. XIV; Americ. Journ. Sci., vol. 50, sec. ser., 1870. Срав. Preliminary Report of the Un. Stat. Geol. Survey of Woyming, 1872 (On the fossil reptiles and fishes of the cretaceous rocks of Kansas); Report of the Un. Stat. Geol. Survey of the Territor., Washington. 1875 (The vertebrata of the cretaceous formations of the West); Preliminar. Report of the Un. Stat. Geol. Survey of Montana. Washington 1870 (On the Geology and Palaeontology of the cretaceous strata of Kansas) и др.

сравненію съ остальными *Plesiosaurus*. Какъ соединялись у нихъ clavicula со scapula — указаній на это, пишетъ Копъ, на данномъ скелетѣ не имѣется.

Однако, уже въ 1874 году Сили, разбирая устройство плечевого пояса у различныхъ плезіозавровъ, высказалъ предположеніе, что кости, считаемыя Кономъ у *Elasmosaurus* за claviculae или procoracoidea, въ дѣйствительности суть scapulae. Claviculae у *Elasmosaurus*, пишетъ Сили, не извѣстны; нѣтъ у нихъ, вѣроятно, и interclavicula. Въ этомъ отношеніи *Elasmosaurus*, думаетъ Сили, можно бы соединить вмѣстѣ съ *Eretmosaurus*, *Colymbosaurus* и *Muraenosaurus*, въ особое семейство *Elasmosauridae*, и обособить отъ остальныхъ *Plesiosauria*, имѣющихъ interclavicula [1].

Тѣмъ не менѣе Копъ, описывая въ 1877 году скелетъ другого эласмозавра, *Elasmos. serpentinus*, опять указалъ среди костей плечевого пояса животнаго: 1) остатки коракоида, размѣрами 61 см. × 30,5 см., и 2) значительно поломанныя claviculae, имѣвшія по Кону:

діаметръ	поперечный	31,1 см.
»	основанія	14,5 »
»	гленоидной впадины	7,0 »

Ни рисунка, ни болѣе подробнаго описанія этихъ костей, Кономъ не было представлено [2].

Въ появившейся въ 1883 году замѣткѣ Гёлке «The Anniversary adress of the President» [3] былъ предложенъ нѣсколько иной взглядъ на строеніе плечевого пояса у *Elasmosaurus* Cope, отличный какъ отъ взгляда на этотъ вопросъ Сили, такъ и отъ взгляда Кона. По мнѣнію Гёлке, широкая парная кость, лежащая у эласмозавровъ впереди коракоида, не есть claviculae или procoracoidea, какъ думалъ Копъ; но она не есть и scapulae въ томъ смыслѣ, какъ склоненъ думать Сили. Кость эта, думаетъ Гёлке, есть ничто иное, какъ praecoracoidea, вентральная вѣтвь scapulae. У всѣхъ вообще плезіозавровъ scapula, по Гёлке, устроена по тому же типу, какъ у черепахъ. Эта кость сложная, и состоитъ: 1) изъ собственно scapula и 2) изъ сростающагося съ ней praecoracoideum. Claviculae у *Sauropterygia* вообще нѣтъ, онѣ замѣнены кожными образованіями. Непарная срединная кость, отмѣченная у нѣкоторыхъ плезіозавровъ впереди плечевого пояса,

---

[1] Seeley. Note on some of the generic modifications of the *Plesiosaurus* Pectoral Arch. Quart. Journ., vol. 30, 1874.

[2] Bullet. Un. Stat. Geolog. and Geograph. Survey, vol. III, № 3, art. XIX; Americ. Naturalist, vol. XI, 1877.

[3] Quart. Journ., vol. 39, 1883.

не можетъ считаться гомологомъ interclavicula другихъ рептилій; кость эта въ дѣйствительности соотвѣтствуетъ omosternum амфибій.

Нѣсколько раньше Гёлке, Оуэнъ также высказался (въ 1883 году) за существованіе сходства въ устройствѣ плечевого пояса у плезіозавровъ и у черепахъ[1]. Между передними концами scapulae у плезіозавровъ, по Оуэну, помѣщается широкая кость episternum: у *Pliosaurus* она имѣетъ видъ клина, вставленнаго между scapulae. Функцію sternum несетъ главнымъ образомъ коракоидъ (coracoidea)[2].

Къ взгляду Гёлке на строеніе плечевого пояса у плезіозавровъ и, въ частности, у *Elasmosaurus*, присоединился вскорѣ Лайдеккеръ[3], поспѣшившій однако позже отказаться отъ omosternum Гёлке[4].

Въ 1892 году Сили опубликовалъ критическій разборъ указанныхъ воззрѣній Гёлке[5]. Возражая противъ сближенія Гёлке плечевого пояса плезіозавровъ и черепахъ, Сили пытается показать, что этотъ поясъ устроенъ у плезіозавровъ одинаково съ ихтіозаврами, нотозаврами и парейазаврами. Мнѣніе Гёлке, что такъ называемая scapula у плезіозавровъ представляетъ собой сложную кость и состоитъ 1) изъ собственно scapula и 2) изъ сросшагося съ послѣдней praecoracoideum, по Сили, едва-ли отвѣчаетъ дѣйствительности. У плезіозавровъ praecoracoideum не обособляется въ видѣ самостоятельнаго элемента: соотвѣтствующій хрящъ идетъ у нихъ на увеличеніе coracoidea спереди и scapulae съ внутренней стороны. Что касается предполагаемаго Гёлке omosternum у плезіозавровъ, то говорить о немъ уже потому не приходится, что у нихъ нѣтъ sternum. Гдѣ имѣется подобная непарная кость, это interclavicula. Въ плечевомъ поясѣ *Elasmosaurus* Cope мы знаемъ лишь scapulae и coracoidea: clavicularia не извѣстны[6].

Въ своемъ отвѣтѣ на критику Сили, Гёлке продолжаетъ настаивать[7], что scapula у плезіозавровъ есть сложная кость, и состоитъ 1) изъ

---

[1] Owen. On generic characters in the order *Sauropterygia*. Quart. Journ., vol. 39, 1883.

[2] Owen. L. c. pp. 134 — 136.

[3] Lydekker. Notes on the *Sauropterygia* of the Oxford and Kimeridge clays. Geol. Magazine, new. ser., Dec. III, vol. V, 1888. Срав. его же: On the skeleton of a Sauropterygian from the Oxford clay near Bedford. Quart. Journ., 1889.

[4] Lydekker. Catalogue foss. Reptilia a. Amphibia British. Museum, part. II, p. 1-1, 1889.

[5] Seeley. The Nature of the Shoulder Girdle and Clavicular Arch in *Sauropterygia*. Proceed. of the Royal Society of London, vol. 51, 1892.

[6] Seeley. L. c., pp. 119 — 148.

[7] Hulke. On the Shoulder Girdle in *Ichtyosauria* and *Sauropterygia*. Proceed. Roy. Soc. London, vol. 52, 1892.

вентральнаго луча — praecoracoideum и 2) изъ дорзальнаго луча — собственно scapula; оба эти элемента сростаются въ одну кость, такъ называемую scapula. Полное соотвѣтствіе между трехлучевой передней костью въ плечевомъ поясѣ черепахъ и такимъ же поясомъ плезіозавровъ, по мнѣнію Гёлке, несомнѣнно. Что касается omosternum, то происхожденіе этой кости изъ episternum, не требуетъ обязательнаго присутствія sternum. Тѣмъ болѣе у плезіозавровъ, сильное развитіе брюшныхъ реберъ могло сопровождаться присутствіемъ хрящевого sternum. У нѣкоторыхъ плезіозавровъ удавалось наблюдать шовъ по серединѣ omosternum, что указываетъ на образованіе этой кости изъ правой и лѣвой половинъ[1].

Сили не замедлилъ возразить[2], что предполагаемое Гёлке сліяніе въ одну кость scapula и praecoracoideum, ни у какихъ другихъ рептилій не наблюдается, ни у современныхъ, ни у вымершихъ. Извѣстно сліяніе coracoideum съ praecoracoideum. У плезіозавровъ praecoracoideum вообще отсутствуетъ; онъ редуцированъ у нихъ, сравнительно напримѣръ съ *Anomodontia*, у которыхъ praecoracoideum является окостенѣвшимъ, и *Nothosauria*, гдѣ онъ остается хрящевымъ. Что касается допускаемаго Гёлке — omosternum у плезіозавровъ, то если эта кость образуется изъ epicoracoideum, то вѣдь epicoracoideum у плезіозавровъ не извѣстно. Clavicularia у плезіозавровъ кожнаго происхожденія; извѣстенъ случай нахожденія вполнѣ окостенѣвшихъ claviculae у очень юнаго плезіозавра, чего не могло быть, если-бы онѣ были хрящевого происхожденія[3].

Взглядъ Сили вскорѣ былъ поддержанъ Кокеномъ, который подтвердилъ[4], что допускаемое Гёлке сліяніе у плезіозавровъ въ одну кость scapula и praecoracoideum, ни у одного пресмыкающагося не извѣстно, и что у плезіозавровъ praecoracoideum сливается съ coracoideum; послѣдній является, такимъ образомъ, сложной костью. Что касается *Elasmosaurus* Cope, думаетъ Кокенъ, то если у лейасовыхъ плезіозавровъ scapulae раздвинуты въ стороны развитіемъ clavicularia, у *Elasmosaurus* scapulae соединяются вентральными концами по серединѣ, и оттѣсняютъ claviculae впередъ или внизъ. Однако очертанія плечевого пояса, въ общемъ остаются тѣ же. Omosternum, напримѣръ у *Anura*, дѣйствительно образуется за счетъ

---

[1] Hulke. L. c., pp. 233 — 255.

[2] Seeley. Further Observations on the Shoulder Girdle and Clavicular Arch in the *Ichtyosauria* and *Sauropterygia*. Proceed. Roy. Soc. London, vol. 54, 1893.

[3] Seely. L. c., pp. 149 — 168.

[4] Koken. Beiträge zur Kenntniss der Gattung *Nothosaurus*. Zeitschrift. d. deutsch. Geol. Gesellsch., XLV Bd., 1893.

срастанія посрединѣ парныхъ epicoracoidea; но эта кость ничего общаго со sternum не имѣетъ[1].

Въ послѣдующее время взгляды Сили на строеніе плечевого пояса у плезіозавровъ и, въ частности, у *Elasmosaurus* Cope, получили развитіе въ работахъ Эндрьюса. Изучивъ рядъ юныхъ и взрослыхъ формъ плезіозавровъ (*Cryptocleidus oxoniensis* Phil), этотъ ученый показалъ[2], что строеніе плечевого пояса у плезіозавровъ нѣсколько измѣняется съ возрастомъ животнаго. У юныхъ формъ переднія части scapulae оказываются недоразвитыми; между ними вдвигаются правая и лѣвая claviculae, треугольной формы. У болѣе взрослыхъ формъ scapulae продвигаются впередъ и оттѣсняютъ claviculae вверхъ, на внутреннюю сторону; соединившіяся scapulae принимаютъ функцію claviculae. Отсюда, думаетъ Эндрьюсъ, очень правдоподобна возможность полнаго исчезновенія clavicularia, какъ это указывается у *Elasmosaurus*. Считать вентральную часть scapulae за слившійся съ scapula praecoracoideum — основаній не имѣется; вѣроятнѣе это вторичный выростъ[3]. Такая же эволюція плечевого пояса подмѣчается, по Эндрьюсу[4], и въ исторіи *Sauropterygia*. У тріасовыхъ *Nothosaurus* плечевой поясъ состоитъ изъ scapulae, расширенныхъ coracoidea и болѣе или менѣе полной костной дуги, образующей спереди поперечную перемычку и сутурно соединенную (внѣшними концами) съ небольшимъ вентральнымъ отросткомъ scapulae. Дуга эта состоитъ 1) изъ небольшой interclavicula и 2) пары удлиненныхъ claviculae, соединяющихся внутренними концами одна съ другой, а равно и съ interclavicula. У большинства лейасовыхъ *Plesiosaurus* вентральный отростокъ scapula увеличивается въ размѣрахъ, расширяется, и въ нѣкоторыхъ случаяхъ доходитъ до соединенія по срединной линіи съ соотвѣтствующимъ отросткомъ противолежащей scapula. Ключичная дуга, охватываемая снизу вентральнымъ отросткомъ scapulae, болѣе и менѣе измѣняется: interclavicula увеличивается и распространяется назадъ, по направленію къ коракоиду, claviculae сильно редуцируются. У *Muraenosaurus*, *Cryptocleidus* и другихъ членовъ сем. *Elasmosauridae*, вентральная вѣтвь scapulae достигаетъ еще большаго развитія и распространенія; внутренніе концы scapulae сходятся по линіи срединнаго симфизиса и даютъ отростки назадъ, до встрѣчи съ срединнымъ продольнымъ

[1] Koken. L. c., pp. 337 — 377.

[2] Andrews. On the Development of the Shoulder-girdle of a Plesiosaur (Cryptoclidus oxoniensis Phill.) from the Oxford Clay. Ann. Magaz. Natur. Histor., vol. XV, 1895.

[3] Andrews. L. c., pp. 333 — 346.

[4] Andrews. A Descriptive catalogue of the Marine Reptiles of the Oxford clay, part. I, 1910.

отросткомъ коракоида. Вслѣдствіе такого расширенія scapulae, ключичная дуга оказывается лежащей на висцеральной поверхности scapulae, становится нефункціональной, и у взрослыхъ формъ болѣе и менѣе редуцируется: у однихъ — на-цѣло, у другихъ — исчезаютъ claviculae или interclavicula [1].

Эволюція эта, по мнѣнію Эндрьюса, является слѣдствіемъ приспособленія къ водному образу жизни. Если у большинства наземныхъ животныхъ переднія и заднія конечности, при поступательномъ движеніи животнаго, должны поддерживать всю тяжесть его тѣла, у водныхъ животныхъ задача конечностей сводится главнымъ образомъ къ проталкиванію тѣла животнаго въ водѣ. Головка humerus'а будетъ давить, при этомъ, главнымъ образомъ по направленію впередъ, на стѣнку гленоидной впадины, тогда какъ у наземныхъ животныхъ она давитъ главнымъ образомъ по направленію вверхъ. Возникаетъ, вслѣдствіе этого, необходимость въ поперечной ключичной перемычкѣ, плотно соединенной съ scapulae, чтобы имѣть достаточный упоръ при давленіи по направленію впередъ и внутрь, со стороны гленоидной впадины. И мы видимъ, что начиная отъ тріасовыхъ *Nothosauridae*, черезъ *Plesiosauridae* къ наиболѣе спеціализованнымъ *Elasmosauridae*, измѣненія въ плечевомъ поясѣ идутъ именно въ направленіи увеличенія устойчивости въ указанной области. Ключичная дуга постепенно редуцируется; взамѣнъ ея развивается и возрастаетъ въ значеніи вентральная вѣтвь scapulae [2].

Таковы теоретическія основанія, предложенныя для тѣхъ или иныхъ представленій о плечевомъ поясѣ *Elasmosaurus* Cope. Ими какъ-бы пытались восполнить недостаточность прямыхъ наблюденій по данному вопросу. До недавняго времени единственно извѣстными остатками плечевого пояса эласмозавровъ являлись лишь тѣ обломки, которые были указаны Копомъ среди скелетныхъ остатковъ *Elasm. platyurus* и *Elas. serpentinus*, и толкованіе которыхъ, какъ мы отмѣтили, оказалось впослѣдствіи столь спорнымъ.

Въ послѣднее время Уиллистонъ пытается пополнить фактическій матеріалъ по этому вопросу. Имъ было заявлено [3] объ имѣющихся остаткахъ плечевого пояса у нѣкоторыхъ изъ вновь найденныхъ въ С. Америкѣ ископаемыхъ животныхъ, отнесенныхъ Уиллистономъ къ р. *Elasmo-*

---

[1] Andrews. Descriptiv. catalogue etc., part. I, p. 77.

[2] Andrews. Ibid.

[3] Williston. N. American Plesiosaurus. Americ. Journ. Sci., 4-th ser., vol. XXI, 1906.

saurus Cope: *El. Snowi*, *Elasm.*(?) *Marschi*, *Elasm. ischiadicus*, *Elasm. nobilis*. Но не говоря уже о томъ, что принадлежность къ р. *Elasmosaurus* Cope, напримѣръ костей животнаго, поименованнаго Уиллистономъ *Elasm.* (?) *Marschi*, оставляется подъ вопросомъ самимъ Уиллистономъ[1]; и что вообще среди извѣстныхъ до настоящаго времени сѣв.-американскихъ скелетныхъ остатковъ, относимыхъ къ р. *Elasmosaurus* Cope (*El. platyurus* Cope, *El. serpentinus* Cope, *El. orientalis* Cope, *El. intermedius* Cope, *El. Snowi*, *El. Marschi*, *El. ischiadicus*, *El. Sternbergi*, *El. nobilis*), по Уиллистону, «возможно, болѣе того — вѣроятно присутствіе двухъ или даже болѣе различныхъ родовъ»[2]; помимо всего этого, приводимыя Уиллистономъ фактическія указанія едва-ли исчерпываютъ данный вопросъ.

Такъ, среди скелетныхъ остатковъ *El. Snowi*, Уиллистонъ отмѣчаетъ присутствіе коракоида «настоящаго эласмозавроваго типа, съ широкимъ вырѣзомъ назади», посрединѣ, и «обѣихъ scapulae обычнаго типа, не очень расширенныхъ въ proscapula'рной части»[3]. Реконструкція этого пояса, представленная Уиллистономъ[4], далеко не соотвѣтствуетъ тому представленію, которое можно было-бы составить, по даннымъ Копа, о поясѣ канзасскаго *Elasm. platyurus*, являющагося типическимъ представителемъ рода. Къ тому же самъ Уиллистонъ относилъ незадолго предъ тѣмъ скелетные остатки *El. Snowi* къ р. *Cimoliasaurus* (*Cimol. Snowi*)[5]. То же приходится сказать о реконструкціи Риггза (Riggs), приводимой Уиллистономъ въ качествѣ типичной для плечевого пояса эласмозавровъ[6]. Въ существенныхъ чертахъ, реконструкція эта не отличается отъ той, которая дана Уиллистономъ для *Elasm. Snowi*[7].

Отъ плечевого пояса *Elasm.* (?) *Marschi* Уиллистонъ описываетъ лишь scapula[8]. «Кость эта, пишетъ Уиллистонъ, сильно вытянута со стороны вентральнаго края и широко выдается до встрѣчи съ противолежащей scapula, по средней линіи. Отъ мѣста симфиза обѣихъ scapulae отходитъ сзади узкій, удлиненный отростокъ, который однако не доходитъ до соединенія съ коракоидомъ, какъ это имѣетъ мѣсто у *Elasm. platyurus*. Спереди

---

[1] Williston. L. c., p. 223, 229—231.

[2] Williston. Ibid. p. 224.

[3] Williston. Ibid., p. 230.

[4] American. Journ. Sci., 4-th ser., vol. XXI, p. 230, fig. 4.

[5] Williston. N. Americ. Plesiosaurs. Field Columbian Museum, vol. II, № 1, 1903. Срав. Americ. Journ. Sci, 4-th ser , № 123, 1906.

[6] Williston. Water Reptiles of the Past and Present. p. 86, fig. 39. Chicago, 1914.

[7] Americ. Journ. Sci., 4-th ser., 1906, p. 228, fig. 2.

[8] Williston. N. Americ. Plesiosaurs. Americ. Journ. Sci. 1906.

обѣ scapulae широко расходятся, образуя угловатый промежутокъ, для claviculae или interclavicula. Я думаю, добавляетъ Уиллистонъ, что отсутствующая кость есть interclavicula, и что claviculae окажутся какъ у *Cryptocleidus*»[1].

Относительно плечевого пояса *Elasm. ischiadicus* Уиллистонъ сообщаетъ лишь, что среди американскихъ коллекцій «имѣется почти полный плечевой поясъ, кажется, этого именно вида»[2], который—кстати сказать—относился раньше Уиллистономъ къ р. *Polycotylus*, т. е. къ наиболѣе короткошеимъ плезіозаврамъ[3]. Ни описанія, ни рисунка костей Уиллистономъ пока не дано.

Наконецъ, изъ костей плечевого пояса *Elasm. nobilis*, Уиллистонъ называетъ «массивный обломокъ scapula, показывающій широкое и прочное соединеніе съ противолежащей scapula по срединной линіи»[4], а также «коракоидъ, съ очень длиннымъ и сильно стянутымъ у конца заднимъ выступомъ, съ дистальной стороны расширеннымъ (its distal width being a little less than twice that of its least width); внѣшній задній уголъ острый и не сильно выступающій»[5]. Рисунка и болѣе подробнаго описанія этихъ костей Уиллистономъ пока не представлено.

Въ 1912 году, при раскопкѣ на сѣверѣ Донской Области (хут. Лысовъ, бассейнъ рѣки Лиски) скелетныхъ остатковъ, оказавшихся, судя по хорошо сохранившимся позвонкамъ, принадлежащими одному изъ представителей р. *Elasmosaurus* Cope, были вынуты обломки плечевого пояса животнаго. Обломки эти состояли: 1) изъ кусковъ лѣвой scapula; 2) изъ interclavicula и 3) изъ кусковъ лѣваго коракоида. Ниже мы даемъ описаніе этихъ костей.

Scapula.

(Табл. 1, фиг. 2 *a*, *b*).

Относимые нами сюда обломки изображены на табл. 1, фиг. 2 *a*, *b*.

Фиг. 2 *a* изображаетъ наибольшій кусокъ лѣвой scapula. Задній участокъ ея, или суставный стволъ scapula, сохранился почти полностью;

[1] Williston. L. c., p. 230.
[2] Americ. Journ. Sci., 4-th ser., vol. XXI, № 123, p. 231.
[3] Williston. Field. Columbian Museum, vol. II, № 1, 1903.
[4] Americ. Journ. Sci., 4-th ser., p. 233, 1906.
[5] Ibid., p. 233.

дорсальная вѣтвь сбита вверху и спереди; вентральная вѣтвь сохранилась лишь отчасти у основанія.

По общему очертанію, кость представляется замѣтно вогнутой съ висцеральной стороны, и полуовально выпуклой съ латерально-вентральной стороны.

Задній участокъ ея, или *суставный стволъ* scapula, представляетъ короткую, довольно массивную кость, полуовально-треугольнаго очертанія въ поперечномъ сѣченіи, и слегка выгнутую въ вентрально-латеральномъ направленіи. Суставный конецъ приподнято-оттянутъ по висцеральному краю; висцеральная поверхность ствола кажется поэтому нѣсколько болѣе вогнутой. У наружнаго края стволъ толще (около 3,7 см.); въ сторону внутренняго края онъ нѣсколько утоняется.

Размѣры суставнаго ствола.

Длина, по прямой (воздушной) линіи отъ задне-висцеральнаго края гленоидной поверхности до нижне-задняго угла дорсальной вѣтви scapula	около	9,4 см.
Поперечный діаметръ суставной головки	»	6,8 см.
Поперечный діаметръ дистальнаго конца ствола	»	3—3,3 см.
Ширина суставнаго конца (внутренній край сбитъ) .	»	8—9 см. (?).

Отъ гленоидной поверхности сохранилась лишь задняя половина. Поверхность эта, видимо, слегка вогнутая; покрыта болѣе или менѣе крупными бородавчатыми вздутіями [1]. Внѣшнія очертанія ея, видимо, близки къ полуовалу, съ діаметрами: 5,7 см. по широтной оси и 6,8 см. по поперечной оси. Площадка для сочлененія съ коракоидомъ сбита; повидимому, она почти равнобедренно-треугольнаго очертанія, съ основаніемъ (со стороны гленоидной поверхности) около 6,2 см., и длиной — около 5—6 см. (?) Относительно гленоидной поверхности площадка эта поставлена, повидимому, почти подъ прямымъ угломъ.

Наружная поверхность суставнаго ствола сильно шероховатая, носитъ слѣды прикрѣпленія мышцъ. Въ верхней $^1/_3$ ея замѣтны слѣды сглаженнаго кругло-гребневиднаго вздутія, переходящаго кпереди въ широко-округлый киль, отграничивающій вентральную вѣтвь scapula — отъ ея дорсальной

[1] Быть можетъ, мы имѣемъ въ этомъ указаніе на невполнѣ зрѣлый возрастъ животнаго? По Эндрьюсу, гленоидная поверхность, напр., у *Muraenosaurus*, «is only slightly concave and nearly smooth in specimens in which ossification seems to be approaching completion, but in younger animals it may be roughened, and was no doubt covered with cartilage». Andrews. Marin. Reptil., par. 1, p. 110.

вѣтви. Верхній наружный край ствола округлый, дугообразно переходитъ кпереди въ нижне-задній край дорзальной вѣтви scapula.

Дорсальная вѣтвь scapula обломана по переднему краю и сбита на верхнемъ suprascapula'рномъ концѣ. Длина (вышина) сохранившагося участка около 12,5 см.; толщина кости у основанія 2,2 см., въ верхней половинѣ около 1,85 см. и вверху около 1,7 см. Съ наружной (латеральной) стороны кость нѣсколько вогнута въ продольномъ (высотномъ) направленіи; съ висцеральной стороны она округло-выпукла у задняго края, и нѣсколько утоняется по направленію къ переднему краю. Задній край дорсальной вѣтви, видимо, дугообразно вогнутый; книзу округло сливается съ наружнымъ краемъ суставнаго ствола scapula.

Вентральная вѣтвь scapula сохранилась лишь въ небольшой части, смежной съ дорзальной вѣтвью и съ суставнымъ стволомъ scapula. Она представлена обломкомъ широкой кости, слегка вогнутой съ висцеральной стороны и полого-корытообразно сливающейся съ прилежащими участками дорзальной вѣтви и суставнаго ствола scapula. Съ вентральной стороны она овально-выпукла. Толщина обломка, на границѣ съ дорсальной вѣтвью, около 2,4 см.; въ направленіи передняго и внутренняго краевъ кость нѣсколько утоняется; у передне-верхняго угла толщина обломка 1,7 см., у нижне-внутренняго угла 1,4 см. Ближе къ внутреннему краю кость, повидимому, еще болѣе утоняется.

Изображенный на табл. I, фиг. 2b обломокъ кости представляетъ собою, повидимому, *симфизіальную часть* вентральной вѣтви лѣвой scapula. Кость сколота съ боковъ; передній край слегка сбитъ слѣва. Въ общемъ, обломокъ этотъ имѣетъ видъ короткой палицы (пестика), верхній конецъ которой слегка расширенъ и лопатовидно-срѣзанъ съ висцеральной стороны; нижній конецъ представляетъ какъ-бы массивную рукоятку, полуокруглую въ сѣченіи и слегка вогнутую съ лѣвой стороны. Съ нижней (вентральной) стороны кость гладкая по всей длинѣ, съ боковъ закругленная.

Указанный лопатовидный срѣзъ на расширенномъ концѣ обломка служилъ, повидимому, для сочленовнаго помѣщенія соотвѣтствующаго крыла interclavicula и, быть можетъ, clavicula (?). Поверхность срѣза слегка вогнута; съ задней стороны срѣзъ ограниченъ невысокимъ уступомъ, косо поставленнымъ относительно длинной оси обломка. Передній край срѣза проходитъ по слегка вогнутой линіи, въ общемъ почти параллельно направленію уступа назади срѣза, въ разстояніи отъ послѣдняго: 5,1 см. съ лѣвой стороны и 5,6 см. — посрединѣ и справа. Толщина обломка на мѣстѣ сочленовнаго срѣза: на линіи задняго уступа около 4,9 см.; у основанія уступа

около 3,9 см.; въ срединной вогнутой части 2,5 см.; у передняго края около 1,9 см. Спереди слѣва, выпуклая поверхность срѣза нѣсколько понижается, и обломокъ утоняется въ этомъ направленіи. Спереди справа, срѣзъ ограниченъ почти вертикальной поверхностью, слабо-желобовидно вогнутой по окружности; видны мозолистыя утолщенія, служившія, очевидно, для помѣщенія хряща.

На поверхности срѣза имѣется небольшое удлиненно-овальное вдавленіе, по длинной оси обломка. Волокна кости на поверхности срѣза расходятся нѣсколько вѣерообразно отъ задняго уступа, ограничивающаго срѣзъ. Задняя часть обломка, за линіей сочленовнаго срѣза, какъ сказано, представляетъ какъ-бы рукоятку палицы или пестика, слегка утоняющуюся къ вершинѣ. Кость здѣсь полуовальна въ поперечномъ сѣченіи. Съ лѣвой стороны она полого-дугообразно вырѣзана, и ограничивала, повидимому, foramen coraco-scapulare. Съ правой стороны — кость соприкасалась съ соотвѣтствующей частью правой scapula. Къ сожалѣнію, симфизіальная поверхность сколота. Толщина обломка, въ сантиметрахъ:

Около сочленовнаго срѣза . . . . 4,9 × 5,5
Позади отъ сочленовнаго срѣза . . . . 4,6 × 4,2 (?)

Задній конецъ кости сбитъ. Общая длина обломка около 14 см.; длина сочленовнаго срѣза около 6,8 cm.

Interclavicula.

(Табл. I, фиг. 1 *a*, *b*, *c*).

Ладьевидная кость, продольно-вогнутая съ висцеральной стороны и соотвѣтственно килеватая съ вентральной стороны. Спереди киль вентральной поверхности широко округлый, кзади суживается, заостряется и становится болѣе рѣзко очерченнымъ. Спускающіяся отъ него боковыя крылья кости слегка продольно вогнуты. Сзади кости, крылья эти образуютъ съ килемъ пріостренный уголъ около 100°; спереди они округло сливаются (на линіи киля) подъ угломъ около 120°. Съ висцеральной стороны, боковыя крылья округло встрѣчаются, на линіи вентральнаго киля, подъ угломъ 140—150°.

Продольно-вогнутая висцеральная поверхность кости несетъ замѣтное вдавленіе въ средне-передней части: вдавленіе это отчасти заполнено плотно приросшимъ кускомъ сорванной волокнистой кости, видимо довольно тонкой, и являющейся, быть можетъ, частью обломанныхъ claviculae. Такой же, по характеру костныхъ волоконъ, кусокъ кости оказался плотно пристав-

нимъ на уступѣ, ограничивающимъ сочленовный срѣзъ описаннаго выше передне-симфизіальнаго конца scapula [1].

Наружные края кости обломаны. Возможно, что она имѣла, въ общемъ, полуокругло-треугольныя очертанія, съ вершиной на переднемъ концѣ килевой линіи. Задній край кости, повидимому, слегка вогнутъ посрединѣ или почти прямой; прилежащая часть висцеральнаго поля interclavicula выпукло отогнута въ сторону этого края. Съ боковъ и спереди, кость нѣсколько утоняется къ краямъ.

Размѣры:

Длина кости (обломка) по воздушной линіи	около	9,2 см.
Ширина » » » » »	»	7,0 »
» » лѣваго крыла, отъ гребня киля	»	6,4 »
» » праваго » » » »	»	5,5 »
Толщина, по килевой линіи, сзади	»	2,8 »
» » » » спереди............	»	1,0 »
» крыльевъ, ближе къ килю............	»	1,0 »
» » » » боковому краю	»	0,7 »

Coracoideum.

(Табл. I, фиг. 3 *a*, *b*, *c*).

Имѣющіеся обломки коракоида изображены на табл. I, фиг. 3 *a*, *b*, *c*. Они принадлежатъ лѣвому коракоиду и состоятъ: a) изъ обломка суставной шейки кости, съ cavitas glenoidalis; b) изъ обломка лѣваго бока и c) изъ куска передне-средней части коракоида.

Обломокъ *суставной шейки* (фиг. 3*a*) въ поперечномъ сѣченіи даетъ очертанія полуовала, суживающагося въ сторону задняго (каудальнаго) края шейки. Утоняясь нѣсколько по направленію симфизіальнаго края коракоида, кость утолщается къ суставному концу, и даетъ рѣзко выступающій край вокругъ суставной впадины. Особенно выдаются, оттянутые внизъ и вбокъ, вентральный и, отчасти, каудальный (задній) края этой впадины.

Очертанія *суставной впадины* (cavitas glenoidalis) видны на фиг. 3*a*, табл. I. Поверхность впадины несетъ, мѣстами, плотно приставшие кусочки сорванной головки humerus'a; видны также небольшія овальныя вдавленія.

---

[1] Аналогичный случай отмѣченъ Сили у *Picrocleidus beloclis* Seeley. «On the left side of the ventral surface (of interclavicula), пишетъ Сили, its middle part is covered by a thin film of bone, which I suppose may be part of the clavicle. It corresponds in texture and thickness with a detached film of bone which rests upon the right scapula». Proc. Royal. Soc., vol. 51 (1892), p. 113.

Размѣры:

Наибольшая длина обломка, со стороны суставной впадины . . около 6,8 см.
Поперечный діаметръ суставной впадины . . . . » 5,5 »
Глубина суставной впадины . . . . » 1,0 »
Толщина обломка спереди . . . . » 3,3 »
» » сзади . . . . » 1,0 »
и менѣе.

Кусокъ *лѣваго бока коракоида*, изображенный на табл. I, фиг. 3*b*, относится, повидимому, къ средне-боковой части коракоида. Съ вентральной стороны, кость овально-гребневидно выпукла въ продольномъ направленіи; съ висцеральной стороны она лишь слегка продольно-вогнута и полого понижается кпереди и кзади, отъ легкаго поперечнаго выгиба (утолщенія). Внѣшній (боковой) край округло иріостренъ и слегка вогнутъ.

Толщина кости, по линіи поперечнаго выгиба (утолщенія). . . около 2,8 см.
Длина обломка . . . . » 10,7 »

Обломокъ *передне-средней части коракоида* представляетъ массивную широкую кость, утолщенную на передне-внутренней сторонѣ и нѣсколько утоняющуюся къ задне-наружному углу (фиг. 3*c*, табл. I). Вентральная поверхность кости слегка выпукло-выгнута, по діагонали отъ утолщеннаго угла; висцеральная поверхность такъ же слегка выпукла, въ косо-поперечномъ направленіи. Кость обломана со всѣхъ сторонъ, судить ближе объ ея нормальныхъ очертаніяхъ не представляется возможнымъ.

Толщина кости, со стороны утолщеннаго угла . . . . около 4,5—5 см.
» » » » противолежащаго утонченнаго
конца . . . . » 2,5 »

Трудно судить на основаніи описанныхъ обломковъ объ общемъ очертаніи плечевого пояса даннаго животнаго. Обломки слишкомъ разрознены, и не всегда удается съ увѣренностью оріентировать ихъ, одинъ относительно другого.

Тѣмъ не менѣе, едва-ли подлежитъ сомнѣнію, что поясъ этотъ не подходитъ подъ ту реконструкцію, которая дана Копомъ для *Elasm. platyurus*[1]. Не говоря объ ошибочной интерпретаціи Копомъ os scapulae,

---

[1] Cope. Synopsis of the extinct *Batrachia*, *Reptilia* a. *Aves* of N. America. Transact. o the Amer. Philosoph. Society, Philadelphia, vol. XIV, 1871.

принятой имъ, какъ мы знаемъ, за clavicula или procoracoideum, scapulae *Elasm. platyurus* показаны Копомъ сходящимися по прямой линіи срединнаго симфизиса и ограничены спереди почти прямымъ краемъ (слегка кругло-вогнутымъ на линіи симфизиса). Scapulae нашего эласмозавра несомнѣнно расходились спереди, по линіи симфизиса; между ними вклинивалась небольшая ладьевидная interclavicula. Вмѣстѣ съ тѣмъ, передне-внутренній уголъ вентральной вѣтви scapula былъ выемчато-лопатовидно срѣзанъ съ висцеральной стороны, для помѣщенія соотвѣтствующаго крыла interclavicula и, вѣроятно, clavicula. Получалось сочлененіе, повидимому, болѣе или менѣе приближающееся къ соотвѣтствующему сочлененію у различныхъ представителей сем. *Elasmosauridae*, напр. у нѣкоторыхъ *Muraenosaurus* (*Mur Leedsi* и др.), *Tricleidus*, отчасти *Picrocleidus* и др.[1]. Гленоидная впадина (cavitas glenoidalis) захватывала не только суставный конецъ коракоида, какъ показано Копомъ у *Elasm. platyurus*, но передней половиной лежала на суставномъ стволѣ scapula. Дорзальная вѣтвь scapula, видимо, была выше (длиннѣе) и уже, чѣмъ это можно предполагать, по рисунку Копа, для *Elasm. platyurus*.

Тѣ же особенности отличаютъ данный поясъ отъ плечевого пояса *Elasm. serpentinus*, поскольку о немъ имѣются указанія у Копа[2].

Сравнительно съ Іельскимъ экземпляромъ *Elasm. Snowi* Willst., плечевой поясъ нашего эласмозавра имѣетъ scapulae, видимо, не такъ широко расходящіяся спереди (по линіи срединнаго симфизиса), какъ это изображено Уиллистономъ для *Elasm. Snowi*. Внутренній край вентральной вѣтви scapula у нашего эласмозавра имѣлъ сзади массивный продольный отростокъ, ограничивавшій foramen coraco-scapulare и, очевидно, продолжавшійся по направленію къ переднему краю coracoideum, чего у *Elasm. Snowi* не наблюдается[3]. Тоже слѣдуетъ сказать о рисункѣ Риггза, приводимомъ Уиллистономъ какъ изображеніе типичнаго пояса эласмозавровъ, и являющемся, въ сущности, дополненіемъ Уиллистоновскаго рисунка *Elasm. Snowi*[4].

Скорѣе плечевой поясъ нашего эласмозавра можно бы сближать съ поясомъ *Elasm. Marschi* Willist. Изображенныя Уиллистономъ scapulae

---

[1] Срав. Andrews. Descript. catal. marine reptiles, part I, табл. VI, ф. 3; табл. VIII ф. 3; табл. VII, ф. 2; p.p. 108—111, 142—143, 158—159 и др.

[2] Bull. U. Stat. Geol. and Geogr. Survey. v. III. № 3; 1877. По Уиллистону, въ недалекомъ будущемъ должно появиться описаніе этого пояса, по коллекціямъ въ Field Columb. Museum. См. Americ. Journal of Science, 4-th Ser., Vol. XXI, p. 228.

[3] Amer. Journ. Sci.. vol. XXI. 4 th ser., p. 228, fig 2.

[4] См. Williston. Water reptiles. p. 86, fig. 89. 1914.

этого животнаго встрѣчаются вентральными вѣтвями по линіи срединнаго симфизиса и даютъ сзади «узкій удлиненный отростокъ»; послѣдній, однако, не соединяется съ коракоидомъ[1]. Спереди scapulae *Elasm. Marschi* «оставляютъ широкій угловатый промежутокъ для claviculae или interclavicula»[2]. Однако, ближе установить черты сходства и различія соотвѣтствующихъ костей обоихъ животныхъ уже потому затруднительно, что отъ плечевого пояса *Elasm. Marschi* извѣстны пока лишь scapulae, да и то въ схематическомъ описаніи[3].

Еще болѣе затруднительно въ настоящій моментъ судить о сходствѣ и отличіяхъ даннаго пояса, сравнительно съ плечевымъ поясомъ *Elasm. ischiadicus* Willist. и *Elasm. nobilis* Willist. Изображенія и подробнаго описанія послѣднихъ пока не имѣется[4]. Извѣстно лишь, что у *Elasm. nobilis* «массивный обломокъ scapula показываетъ широкое и плотное соединеніе съ противолежащей scapula, по срединной линіи. Задній отростокъ коракоида очень длинный и сильно сжатъ (constricted) на концѣ; внѣшній задній уголъ острый и несильно выдающійся»[5].

Присутствіе interclavicula и, повидимому, claviculae, значительно сближаетъ плечевой поясъ нашего эласмозавра, какъ сказано, съ нѣкоторыми *Muraenosaurus*, *Tricleidus*, *Picrocleidus* и другими представителями семейства *Elasmosauridae*. Повидимому, имѣется сходство и въ общихъ очертаніяхъ этого пояса, сравнительно съ поясомъ упомянутыхъ животныхъ. Но какъ далеко идетъ это сходство — судить затруднительно, вслѣдствіе фрагментарнаго состоянія костей нашего эласмозавра. Interclavicula у послѣдняго, въ общемъ, такъ же ладьевидно выгнута и килевата съ вентральной стороны, какъ у *Muraenosaurus Leedsi* Seeley[6]. Однако, какъ располагался этотъ киль относительно вентральныхъ вѣтвей scapula, какъ далеко заходилъ назадъ; имѣлся ли позади interclavicula foramen interscapulare, какъ у *Mur. platyclis* Seeley[7] и *Mur. durobrivensis* Lydekker[8]; или быть можетъ задній конецъ interclavicula плотно замыкался сосѣдними scapulae, какъ у *Mur. Leedsi* Seeley[9], и какъ предполагаетъ Уиллистонъ

---

[1] Williston, Am. J. Sci., vol. XXI, 4 ser., p. 230.

[2] Williston, ibid. p. 230.

[3] Срав. Williston, l. c. fig. 4.

[4] См. Williston, ibid. p.p. 231—233. Срав. Williston, Field. Col. Mus. Pub., Geol. Ser., vol. II, p. 72. 1903.

[5] Williston. Am. J. Sci. 1906, p. 233.

[6] Срав. Andrews. Descript. Catal. Mar. Rept., part I. tabl. VI, f. 6.

[7] Andrews, l. c. tabl. IV, fig. 3, p. 134.

[8] Andrews. ibid. tabl. V, fig. 10. p. 109.

[9] Andrews, ibid.. p. 109, fig. 62.

вообще у *Elasmosaurus* Cope[1]; несомнѣнныхъ данныхъ для сужденія по этимъ вопросамъ пока не имѣется.

Во всякомъ случаѣ, если правильно предположеніе, видѣть въ обломкѣ, изображенномъ нами на табл. I, фиг. 2b, кусокъ передне-симфизіальнаго конца вентральной вѣтви scapula, мы едва ли должны ожидать у нашего эласмозавра столь же расширенныя (удлиненныя) scapulae, въ вентральной вѣтви, какъ у названныхъ *Muraenosaurus*[2]. Въ этомъ отношеніи онѣ, кажется, ближе къ scapulae *Picrocleidus*[3] и *Tricleidus*[4].

Ближе всего плечевой поясъ нашего эласмозавра, какъ кажется, приближается, именно, къ плечевому поясу *Tricleidus* Andrews (напримѣръ, *Tric. Seeleyi* Andrews). По очертаніямъ interclavicula, по положенію claviculae, по общему облику scapulae и coracoidea, а равно по способу сочлененія этихъ костей, передній поясъ *Tricleidus*, кажется, весьма напоминаетъ соотвѣтствующій поясъ нашего эласмозавра[5]. Возможно, что дорсальная вѣтвь scapula у послѣдняго была нѣсколько длиннѣе и болѣе сужена на верхнемъ концѣ, чѣмъ у *Tricleidus;* очертанія задняго края коракоида у нашего эласмозавра остаются пока совершенно неизвѣстными. Но общее строеніе, повторяемъ, кажется намъ весьма близкимъ къ тому, которое указывается для плечевого пояса *Tricleidus.*

Такимъ образомъ, прогнозъ Уиллистона, что въ плечевомъ поясѣ по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ *Elasmosaurus* Cope вѣроятно присутствіе interclavicula и claviculae[6], получаетъ подтвержденіе въ скелетѣ нашего эласмозавра. Имѣемъ ли въ данномъ случаѣ общій типъ строенія эласмозавровъ, или лишь случай возрастной особенности животнаго, въ смыслѣ Эндрьюса, судить объ этомъ едва ли не преждевременно. Напомнимъ, что Уиллистонъ такъ же отмѣчаетъ вѣроятность присутствія interclavicula и claviculae у *Elasm. Marschi;* Эндрьюсъ указываетъ эти кости у различныхъ представителей сем. *Elasmosauridae.*

Петроградъ.
Геол. каб. И. В. Мед. Академіи
3/V 1915.

---

[1] Am. Journ. Sci. 1906, p. 225.
[2] Срав. Andrews, l. c. text-fig. 62, 68; tabl. VI, f. 3 и др.
[3] Andrews, ibid., p. 142—143, tabl. VII, fig. 2.
[4] Andrews, ibid. text-fig. 76 и др.
[5] Срав. подробное описаніе у Andrews, l. c., pp. 158—159.
[6] Am. J. Sci. 1906, p. 230.

П. Православлевъ. Къ вопросу о плечевомъ поясѣ у *Elasmosaurus* Cope.

1a

1b

1c

2a

3a

3b

3c

2b

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О зубномъ аппаратѣ индрикотерія.

А. Борисяка.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г.).

Минувшимъ лѣтомъ раскопки въ континентальныхъ отложеніяхъ Чалкаръ-Тениза, кромѣ извѣстныхъ ранѣе формъ, *Indricotherium* pl. sp.[1] и *Epiaceratherium turgaicum m.*[2], доставили также остатки одного изъ древнѣйшихъ представителей семейства Equidae, затѣмъ — грызуна, двукопытныхъ, хищныхъ, птицъ и черепахъ; такимъ образомъ, фауна этихъ слоевъ постепенно умножается, — однако собранный матеріалъ пока въ высшей степени скуденъ, и наиболѣе полно попрежнему представлены лишь первыя двѣ изъ названныхъ формъ.

Что касается индрикотерія, то важнѣйшимъ открытіемъ нынѣшняго года является находка почти полнаго ряда (рис. 1) его верхнихъ зубовъ (не достаетъ лишь P^1 и M^3, но послѣдній зубъ въ двухъ экземплярахъ имѣется

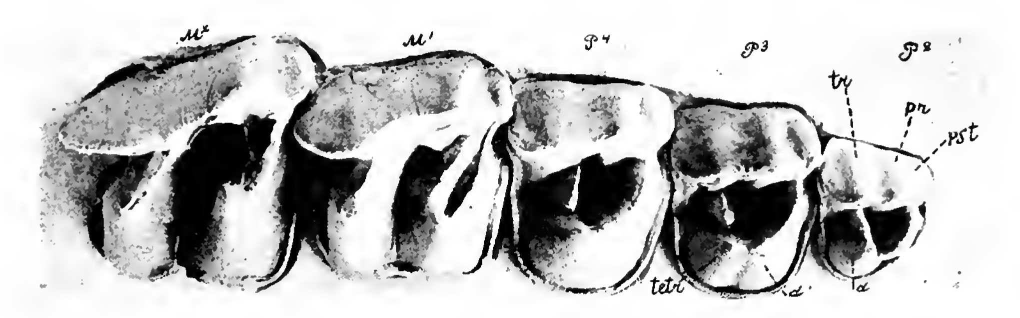


Рис. 1. — *pr* — potoconus. *tr* — tritoconus. *d* — deuteroconus, *tetr* — tetartoconus, *pst* — parastylus.

отъ прежнихъ раскопокъ). Обнаруживая, подобно описанному въ прошломъ году эпіацератерію, очень примитивное строеніе, зубы индрикотерія относятся однако къ совершенно иному типу, и въ нѣкоторыхъ отношеніяхъ представляютъ несравненно большій интересъ.

---

[1] Геологическій Вѣстникъ, I, стр. 131.

[2] ИАН., 1915. стр. 781.

Размѣры коренныхъ зубовъ[1].

P^2 —	длина	43 мм.	M^1 —	длина	78 мм.
	ширина	51 »		ширина	86 »
	высота	> 15 »		высота	> 58 »
P^3 —	длина	55 »	M^2 —	длина	94 »
	ширина	70 »		ширина	93 »
	высота	> 55 »		высота	> 65 »
P^4 —	длина	61 »	M^3 —	длина по заднему гребню[2]	96 »
	ширина	78 »		длина по внутренней стѣнкѣ	72 »
	высота	> 60 »		ширина	88 »
				высота коронки	43 »

Индрикотерій былъ охарактеризованъ[3], на основаніи прежнихъ находокъ, какъ гигантское носорогообразное животное (самые крупные представители его превосходили размѣрами мамонта) примитивнаго строенія. Такое опредѣленіе вполнѣ подтверждается упомянутымъ зубнымъ аппаратомъ (ложнокоренные открыты впервые). Мы начнемъ разсмотрѣніе его съ коренныхъ зубовъ.

Эти послѣдніе не оставляютъ сомнѣнія въ принадлежности индрикотерія къ семейству Rhinoceratidae, а не къ какой-либо изъ боковыхъ вѣтвей группы Rhinoceroidea[4]. Тогда какъ ихъ низкая коронка, почти полное отсутствіе боковыхъ складокъ на гребняхъ, скульптура эмали, состоящая изъ вертикальныхъ дихотомирующихъ струекъ и горизонтальныхъ линій — свидѣтельствуютъ о низкой степени ихъ дифференцировки.

Изъ коренныхъ зубовъ наибольшій интересъ представляетъ послѣдній коренной, M^3 (рис. 2). Онъ имѣетъ трапецоидальное очертаніе; его задній гребень изогнутъ *s*-образно и на наружной стѣнкѣ несетъ большой шипъ, вытянутый въ направленіи длины зуба. Болѣе явственно, чѣмъ у какой-либо другой формы среди древнѣйшихъ носороговъ, шипъ этотъ представляетъ остатокъ задняго конца эктолофа (при очень стертыхъ зубахъ должна получаться полная иллюзія присутствія этого гребня); онъ сопровождается глубокой бороздкой со стороны внутренняго конца задняго гребня, представляющей остатокъ задней долинки. У типичныхъ Rhinoceratidae задній коренной имѣетъ треугольную форму, его задній гребень прямой, шипъ, если имѣется, небольшихъ размѣровъ, — однимъ словомъ, исчезаютъ всѣ признаки совмѣщенія въ заднемъ гребнѣ экто- и металофа. Однако, несмотря на свое

---

[1] Индрикотерій представленъ тремя формами (видами) различной величины. Описываемые зубы принадлежатъ, вѣроятно, формѣ средней величины.

[2] Этотъ зубъ принадлежитъ другой особи, но, судя по размѣрамъ, той же формѣ.

[3] Геолог. Вѣстникъ, I, стр. 133.

[4] Osborn, Extinct Rhinoceroses, Mem. Am. Mus. N. H., I, p. 87.

необычайно примитивное строеніе, описываемый зубъ тѣмъ не менѣе принадлежитъ несомнѣнному представителю Rhinoceratidae, отличаясь отъ боковыхъ вѣтвей Rhinoceroidea — Amynodontidae и Hyracodontidae—отсутствіемъ настоящаго эктолофа.


Рис. 2.

Наибольшій интересъ въ описываемомъ рядѣ представляютъ ложнокоренные зубы. Они еще совершенно не тронуты истираніемъ, и потому позволяютъ великолѣпно наблюдать свое строеніе. Ни одинъ изъ нихъ не моляризованъ. Нѣкоторые первичные бугорки ихъ еще вполнѣ изолированы. Другіе слились въ гребни, но совершенно отчетливо моделлированы. Въ этомъ отношеніи ложнокоренные индрикотерія представляетъ рѣдкое по отчетливости зрѣлище.

Второй ложнокоренной, P^2, вдоль наружнаго края представляетъ два равныхъ бугорка, protoconus и tritoconus, и небольшой, вдвое болѣе низкій parastylus, — всѣ три отчетливо моделлированы на наружной стѣнкѣ зуба, которая несетъ также и на заднемъ концѣ небольшую складочку, симметричную parastyl'ю. На внутреннемъ концѣ зуба имѣется лишь deuteroconus въ видѣ почти совершенно изолированнаго высокаго конуса правильной формы. Къ нему (къ его переднему краю) направляются два сходящихся поперечныхъ гребня: бо́льшій передній, protoconulus, въ видѣ невысокой стѣнки, и меньшій задній, tritoconulus, въ видѣ изолированнаго плоскаго шипа[1]. Зубъ имѣетъ треугольную форму, при чемъ наружная и задняя стороны образуютъ прямой уголъ[2], а третья слабо выпуклую дугу. Со всѣхъ сторонъ его охватываетъ небольшой базальный воротничекъ. Скульптура эмали, какъ у коренныхъ зубовъ.

Третій ложнокоренной, P^3, имѣетъ трапецоидальную форму, вытянутъ въ ширину; передній гребень у него слился съ deuteroconus'омъ, и отъ послѣдняго началъ отшнуровываться tetartoconus; tritoconulus, сохраняя тотъ же характеръ плоскаго шипа, сталъ поворачиваться внутреннимъ концомъ назадъ.

Четвертый ложнокоренной, P^4, еще болѣе вытянутъ въ ширину,

[1] Значеніе бугорковъ этого зуба допускаетъ и иное толкованіе, — подобно тому, какъ это дѣлаетъ Déperet для ложнокоренныхъ зубовъ лофіодонта (см. Déperet, Lophiodon du Minervois, Arch. Mus. Lyon, IX, 1903, p. 8, примѣчаніе). Разсмотрѣніе этого вопроса по существу неумѣстно въ краткой замѣткѣ, и потому здѣсь сохранена «классическая» точка зрѣнія.

[2] У большинства примитивныхъ носороговъ, которые имѣютъ, кромѣ deuteroconus'a, также и tetartoconus, прямой уголъ образуютъ наружная и передняя стѣнки.

имѣетъ видъ удлиненнаго четыреугольника; deuteroconus и tetartoconus еще тѣсно слиты между собою: tritoconulus повернулся внутреннимъ концомъ назадъ, въ положеніе, параллельное переднему гребню.

Базальный воротничекъ и скульптура эмали у обоихъ зубовъ, какъ описано выше.

Среди древнѣйшихъ извѣстныхъ представителей Rhinoceratid'ъ[1] до сихъ поръ не было извѣстно такой примитивной стадіи ложнокоренныхъ зубовъ, когда бы рядъ ихъ представлялъ процессъ отщепленія tetartoconus'а. Съ другой стороны, постепенное усложненіе коронки ложнокоренныхъ по направленію отъ P^2 къ P^4 сближаетъ индрикотерія не только съ европейскимъ стволомъ[2] примитивныхъ носороговъ, но также съ упоминавшимися уже боковыми вѣтвями, Amynodontid'ами и Hyracodontid'ами. Ближайшее сравненіе съ послѣдними, какъ и слѣдовало ожидать (см. выше), не даетъ признаковъ тождества. Въ особенности отличны Amynodontidae, хотя ложнокоренные ихъ построены очень примитивно: особенностью этой группы, какъ извѣстно, и является редукція ложнокоренныхъ, за счетъ которыхъ мощно развиваются коренные, при чемъ происходятъ измѣненія въ распредѣленіи эмали, на чемъ, однако, здѣсь останавливаться не мѣсто. Ближе къ типичнымъ носорогамъ и, слѣдовательно, къ индрикотерію Hyracodontidae, среди которыхъ имѣются формы съ очень различною степенью дифференцировки ложнокоренныхъ, представляющія, вѣроятно, самостоятельныя параллельныя вѣтви; индрикотерій по указанному признаку располагается между *Hyracodon* (tetartoconus имѣется и у P^2) и *Hyrachyus* (tetartoconus не появляется и у P^4). Однако, по общему habitus'у, по общей морфологической картинѣ строенія своихъ ложнокоренныхъ онъ не можетъ занять мѣста среди представителей этого семейства.

Взоръ обращается поэтому невольно къ болѣе примитивнымъ непарнокопытнымъ, относительно которыхъ есть основаніе предполагать ихъ близость къ первоначальному общему стволу Rhinoceroidea. Среди нихъ, дѣйствительно, мы находимъ форму, которая съ поразительной точностью повторяетъ картину расположенія и взаимнаго отношенія отдѣльныхъ бугорковъ у ложнокоренныхъ индрикотерія. Таковъ американскій *Protapirus*, именно, *Pr. obliquidens*[3], единственнымъ отличіемъ зубовъ котораго является еще бо́льшая

---

[1] См. Osborn, Extinct Rhinoceroses, Mem. Americ. Mus. N. H., v. I, 1898.
Roman, Rhinocérides de l'oligocène, Arch. M. Lyon, 11, 1911.
Abel, Paläog. Rhinoceratid., Abh. k. k. g. R., XX, 3. 1910.
Hatcher. Ann. Carnegie Mus., I, 1901—2, p. 135.

[2] Abel, l. c.

[3] Wortmann, Ancestors of the Tapir, Bull. Am. Mus. N. H., 1893.

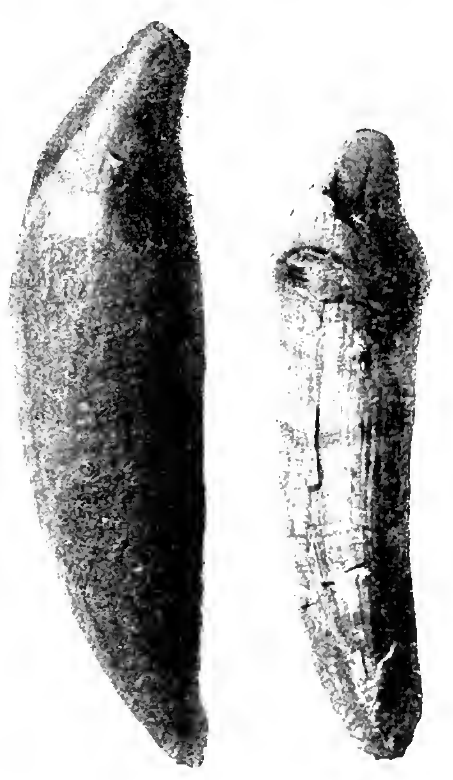
моделлировка его бугорковъ. Но коренные зубы тапира представляютъ типъ совершенно отличный отъ носороговъ; отличны также и ихъ рѣзцы, — въ частности, и плоскіе долотообразные рѣзцы упомянутой формы не имѣютъ сходства съ рѣзцами индрикотерія, какъ мы сейчасъ это увидимъ.

До сихъ поръ у насъ нѣтъ цѣльнаго черепа индрикотерія, и нѣтъ поэтому цѣльнаго зубного ряда его переднихъ зубовъ in situ. Однако отдѣльно встрѣченные гигантскіе зубы съ конической коронкой и одинарнымъ корнемъ, несомнѣнно, принадлежатъ ему, представляя его клыки и рѣзцы.

Размѣры переднихъ зубовъ[1].

C — длина	39 мм.	J^2 — длина	44 мм.	J^3 — длина	42 мм.
ширина	32 »	ширина	31 »	ширина	32 »
высота коронки	44 »	выс. коронки	48 »	выс. коронки	44 »
длина корня	150 »	дл. корня	120 »	дл. корня	120 »

Въ противоположность извѣстнымъ древнѣйшимъ носорогамъ[2], верхніе клыки индрикотерія еще крупнѣе рѣзцовъ (рис. 3). Они имѣютъ коническую низкую коронку, слегка сплющенную съ боковъ, иногда съ легкимъ килемъ спереди и сзади, безъ воротничка, и съ совершенно гладкой эмалью; корень очень длинный и массивный, вздувающійся на нѣкоторомъ разстояніи отъ коронки на подобіе корня клыка хищныхъ. Онъ не имѣетъ подобнаго себѣ ни среди Rhinoceroidea, ни среди Tapiridae, тогда какъ клыкъ Lophiodontid'ъ[3] и по характеру коронки, и по формѣ корня весьма ему близокъ, только онъ еще крупнѣе по сравненію съ рѣзцами.


Рис. 3. Рис. 4.

Рѣзцы индрикотерія (рис. 4) по формѣ коронки также весьма близки рѣзцамъ лофіодонтовъ, или, точнѣе, занимаютъ среднее мѣсто между рѣзцами этихъ послѣднихъ и древнѣйшихъ

[1] Всѣ три зуба принадлежатъ различнымъ особямъ.
[2] Osborn, Extinct Rhinoc., p. 131, fig. 34.
[3] Filhol, Vertébrés fossiles d'Issel, Mém. Soc. G. Fr.. (III), v. I. Déperet, Lophiodon du Minervois, Arch. M. Lyon, 9, 1903.

носороговъ. Несомнѣнно, ихъ было не меньше двухъ паръ[1]: имѣется два хорошо сохраненныхъ рѣзца, почти равныхъ по величинѣ, но отличающихся степенью повернутости коронки относительно корня: у болѣе передняго коронка повернута сильнѣе. Коронка этихъ рѣзцовъ имѣетъ видъ сплющеннаго съ боковъ низкаго конуса, несимметричнаго, съ болѣе или менѣе придвинутою кпереди вершинкой, которая слегка загнута назадъ; она кончается тупымъ остріемъ, отъ котораго идутъ два рѣзкихъ киля — одинъ по приплюснутой задней сторонѣ коронки, а другой направляется къ переднему внутреннему углу ея; коронка окружена воротничкомъ и несетъ скульптуру коренныхъ зубовъ.

По строенію своего зубного аппарата индрикотерій представляетъ, такимъ образомъ, примитивнѣйшую стадію среди настоящихъ Rhinoceratidae, къ которымъ онъ, несомнѣнно, относится. Но въ то же время его колоссальный ростъ и нѣкоторыя особенности его скелета не позволяютъ разсматривать его, какъ примитивнѣйшую форму, а лишь какъ сохранившую поразительно примитивное строеніе зубного аппарата. Указанныя выше черты сходства съ древнѣйшими тапирами и лофіодонтами — далеко не близкими между собою формами — могутъ имѣть лишь весьма отдаленное филогенетическое значеніе. Индрикотерій, надо думать, представлялъ среди типичныхъ Rhinoceratid'ъ одну изъ многочисленныхъ ихъ вѣтвей, изъ которыхъ лишь очень немногія сохранились до позднѣйшихъ временъ, тогда какъ большинство ихъ (подобно вѣтвямъ боковыхъ группъ, частью упоминавшихся выше) отмирали, — отсѣкаемыя, какъ «неудачныя» направленія развитія.

Изъ сказаннаго вытекаетъ также, что описываемая новая форма не можетъ дать указаній стратиграфическаго характера, и возрастъ *индрикотеріевыхъ слоевъ* долженъ устанавливаться на основаніи другихъ, лучше извѣстныхъ и болѣе широко распространенныхъ формъ[2].

---

[1] По всѣмъ вѣроятіямъ, индрикотерій имѣетъ, какъ примитивная форма, всѣ три пары рѣзцовъ; возможно, что передняя пара верхнихъ рѣзцовъ была крупнѣе двухъ остальныхъ — характерный признакъ Rhinoceratidae. Въ такомъ случаѣ имѣющіеся рѣзцы (они разсматриваются, какъ зубы верхней челюсти) принадлежатъ второй и третьей парѣ.

[2] См. ИАН., 1915, стр. 787.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О частицахъ отрицанія при повелительномъ наклоненіи въ монгольскомъ языкѣ.

Б. Я. Владимірцова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Историческихъ наукъ и Филологіи 27 января 1916 г.).

I.

Въ письменномъ монгольскомъ языкѣ извѣстна одна частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи: ᠪᠦ «буу»[1]. Впослѣдствіи въ томъ же языкѣ стала употребляться еще одна частица отрицанія при пове-

[1] См. I. J. Schmidt. Grammatik der Mongolischen Sprache. St.-Petersburg, 1831, p. 89, Я. Шмидтъ. Грамматика монгольскаго языка. С.-Петербургъ, 1832, стр. 93.
О. Ковалевскій. Краткая грамматика монгольскаго книжнаго языка. Казань, 1835, стр. 127.
О. Ковалевскій. Монгольская хрестоматія. Казань, 1836, т. I, стр. 248—249.
Алексѣй Бобровниковъ. Грамматика монгольско-калмыцкаго языка. Казань. 1849 (въ цитатахъ ниже: Грамм.), стр. 175—176.
Léon Feer. Tableau de la Grammaire Mongole. Paris, 1886, p. V.
В. Л. Котвичъ. Лекціи по грамматикѣ монгольскаго языка. Изданіе студентовъ Э. Маурингъ и Э. Беренсъ. С.-Петербургъ, 1902, стр. 130.
А. Д. Рудневъ. Лекціи по грамматикѣ монгольскаго письменнаго языка, читанныя въ 1903—1904 академическомъ году. Выпускъ I, С.-Петербургъ, 1905 г., стр. 41.
Г. Ц. Цыбиковъ. Пособіе къ практическому изученію монгольскаго языка. Владивостокъ, 1915 г. (ниже: Пособіе), стр. 16, 19.

лительномъ наклоненіи — «бітегеі»[1]. Г. І. Рамстедтъ обратилъ вниманіе на эту послѣднюю частицу и въ своей работѣ о глагольныхъ формахъ халхасцевъ даетъ объясненіе ея происхожденія; только Г. І. Рамстедтомъ эта частица дается въ формахъ «бітӳгеі, бӳтӳгеі», не встрѣчавшихся мнѣ въ монгольскихъ текстахъ, происхожденіе же этой частицы отрицанія при повелительномъ наклоненіи Г. І. Рамстедтомъ объясняется совершенно вѣрно, какъ optativus на «тубаі, тӳгеі» отъ глагола «бӳ» — быть, подобно другой частицѣ «баjітубаі»—не только... но и, являющейся optativ. на «тубаі» отъ глагола «баjі» — быть, существовать[2]. Теоретически возстановленная форма optativ. отъ v. «бӳ», сдѣлавшаяся частицей отрицанія при повелительномъ наклоненіи, будетъ *бӳтӳгеі; въ монгольскихъ текстахъ optativ. отъ v. «бӳ» никогда не употребляется, формы же частицы отрицанія «бітӳгеі» и «бӳтӳгеі» сомнительны, и если и встрѣчаются, то очень рѣдко[3].

Какъ частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи, форма «бітегеі» < *бӳтӳгеі (||«баjітубаі»), по всей вѣроятности, попала въ монгольскую письменность въ сравнительно новое время (старые тексты ея не знаютъ) изъ живой рѣчи, гдѣ старая форма *бӳтӳгеі успѣла уже измѣниться и давно уже перестала чувствоваться, какъ optativ. отъ v. бӳ. Дѣйствительно, въ монгольскомъ языкѣ ӳ послѣ б часто измѣняется въ і. Напр., халх.-зап., бант., захач. біс < «бӳс» — поясъ; халх.-зап., дэрб.-коб., бант., захач. бір (||бӳр; бӳр) < «бӳр» — вѣтка; повидимому, уже въ старомъ монгольскомъ языкѣ «ӳ» послѣ «б» чередовался съ «і», что̀ наблюдается и въ родственныхъ турецкихъ словахъ, напр., монг.-письмен. «бӳтӳ, «бӳте», дэрб.-коб., банг. бӳт, біт — исполниться, совершиться, но «бітегӳӳ» — цѣльный, пол-

---

[1] См. G. J. Ramstedt Über die Konjugation des Khalkha-mongolischen. Mémoires de la Société Finno-Ougrienne. XIX. Helsingfors, 1903 (ниже Konjug.), p. 72

G. J. Ramstedt. Mogholica. Beiträge zur kenntnis der moghol-sprache in Afganistan. Journal de la Société Finno-Ougrienne, XXIII, 4, Helsingfors, 1905, p. 24.

[2] А. Бобровниковъ уже обратилъ на это свое вниманіе и далъ почти такое же объясненіе (Грамм. 175—176). Имъ только предполагается optativ. отъ какой-то другой основы «бу».

См. также В. Л. Котвичъ. Лекціи. 130—131.

[3] К. О. Голстунскій и Г. Ц. Цыбиковъ указываютъ на форму «бітӳгеі» и «бӳтӳге» безъ ссылки на источники; см. Монгольско-русскій словарь, составленный профессоромъ С.-Петербургскаго Университета К. О. Голстунскимъ, т. I, стр. 230, С.-Петербургъ, 1895, и Г. Ц. Цыбиковъ. Пособіе, 19.

ный, «бітегӯн», дэрб.-коб., бант. бӯтӯн, бітӯн, халх.-зап. бітӯн. бітӯн — последній день мѣсяца; тур.: уйг., осм.. дж., хив., сарт.. тркм., крм., кр. біт — быть оконченнымъ, готовымъ, исполненнымъ, кончаться, уйг., дж.. тар. бӯт — id.; осм., крм., ком. бӯтӯн — цѣлый, полный; дж. бӯтеӯ — нетронутый, цѣлый; въ старо-монг. памятникахъ «бӯсіре», монг.-письмен. «бісіре», ойрат. письмен. «біші̇ре» — почитать. уважать, благоговѣть.

Далѣе нужно выяснить почему въ формѣ «бітегеі» послѣ «т» вмѣсто «ӯ» имѣется «е»?—Вѣроятно, стали писать «е» по аналогіи съ послѣдующими гласными и потому, что не знали, какъ изобразить гласный неполнаго образованія, обычно появляющійся въ предпослѣднемъ слогѣ въ разныхъ монгольскихъ нарѣчіяхъ и часто совершенно исчезающій[1], въ то время какъ морфологическое чутье формы «тегеі» < *-тӯгеі уже утратилось. Во многихъ монгольскихъ и ойратскихъ рукописяхъ, относящихся къ различнымъ эпохамъ, можно найти много примѣровъ подобнаго же неумѣнья обозначать гласные неполнаго образованія, при чемъ явно обнаруживается тенденція выразить и въ письмѣ ассимиляцію гласныхъ; напр., въ парижскомъ экземплярѣ монгольскаго Ганджура, напечатаннаго при Цянь-Лунѣ (вывезенъ проф. P. Pelliot), встрѣчаются такія формы: «ӯцӯ(-гӯлӯмӯі)» (vol. ца отдѣла «елдеб», f. 381 v.) и «ӯце(бе)» (vol. га отдѣла «һдулба», f. 9 r.)—двѣ формы отъ глагола «ӯце» — видѣть[2]; «бӯлӯчіг, бӯлӯчӯг» и «бӯлӯчег» — кольцо, перстень (vol. да, отдѣла «һдулба») и др.; въ монгольскихъ рукописяхъ и ксилографахъ[3] разныхъ эпохъ постоянно встрѣчаются формы: «табаҕ» и «табуҕ» — блюдо, «котон» и «котан» — городъ, «боскан» и «боскун» — поднявшись; еще больше примѣровъ того же явленія даютъ ойратскіе тексты: «модон» и «модун» — дерево, «бурхун» и «бурхан» — Будда, бурханъ, «öгӯлöксен, öгӯлӯксен» и «öгӯлексен» — сказавшій, «тӯшӯмел» и «тӯшімел» — чиновникъ, и т. п.

---

[1] Объ этомъ явленіи см. Г. І. Рамстедтъ. Сравнительная фонетика монгольскаго письменнаго языка и халха'ско-ургинскаго говора. Переводъ студентовъ Факультета Восточныхъ языковъ Имп. С.-Пб. Университета, съ перваго нѣмецкаго изданія, подъ редакціей прив.-доц. А. Д. Руднева, съ дополненіями автора. С.-Петербургъ, 1906 (ниже: Фон.), стр. 49—50 и В. Л. Котвичъ. Опытъ грамматики калмыцкаго разговорнаго языка. Петроградъ, 1915 (ниже: Опытъ), стр. 10—14.

[2] Въ данномъ случаѣ, можетъ быть, тоже слѣдуетъ видѣть примѣръ древняго чередованія «ӯ» и «е».

[3] Къ сожалѣнію, монголисты до сихъ поръ не располагаютъ ни однимъ научно составленнымъ описаніемъ рукописей, ни однимъ каталогомъ. Монгольская палеографія находится болѣе, чѣмъ въ зачаточномъ состояніи.

Благодаря тому же вліянію живой рѣчи частица *бӱтӱгеі является въ нѣкоторыхъ монгольскихъ рукописяхъ въ формахъ: «бетегеі» «бітгеі, біткеі».

Въ современныхъ живыхъ нарѣчіяхъ эта частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи встрѣчается въ такихъ формахъ: халх.-ург. біʻтʻёгī, біʻтʻёгē, біʻтʻёгǟ[1], дэрб.-коб. баит., минг., захач., уряих.-алт. бітӗгǟ, бітгǟ, біткǟ, баит. бітǟ, торг.-алт., торг.-астр., дэрб.-астр. бічкǟ, дэрб.-астр., торг.-астр. бічǟ, бічӗгǟ[2] (ойрат. письменная форма «бічігеі» встрѣчается только въ самыхъ новыхъ рукописяхъ)[3]. Просматривая перечень этихъ формъ, легко отмѣтить такія параллели образованій:

*бӱтӱгеі > «бітегеі» > { бітӗгǟ ∾ біткǟ ∾ бітǟ / бічӗгǟ ∾ бічкǟ ∾ бічǟ }.

Образованіе формъ бітӗкǟ и біткǟ вполнѣ понятно: *бӱтӱгеі > «бітегеі» > бітӗгǟ > біткǟ. Дѣйствительно, дифтонгъ «еі» древне-монгольскаго языка даетъ во многихъ современныхъ нарѣчіяхъ ǟ[4]; предпослѣдній гласный стараго языка или дѣлается гласнымъ неполнаго образованія, или же исчезаетъ вовсе, что наблюдается во многихъ, если не во всѣхъ, монгольскихъ говорахъ[5]; наконецъ, звонкіе подъ вліяніемъ предшествующихъ глухихъ, ассимилируясь съ ними, измѣняются тоже въ глухіе; въ настоящемъ случаѣ г, очутившись рядомъ съ т, измѣняется въ соотвѣтствующій глухой к[6].

Нѣсколько труднѣе представить себѣ образованіе формъ «бічігеі», бічӗгǟ. По всей вѣроятности, онѣ тоже образовались изъ «бітегеі» > *бӱтӱгеі. Можно думать, что ойраты, имѣющіе теперь формы «бічігеі», бічӗгǟ и

---

[1] G. J. Ramstedt. Konjug., p. 72.

[2] В. Л. Котвичъ. Опытъ, стр. 136.

[3] В. Л. Котвичъ. Опытъ, стр. 136.

А. Бобровниковъ. Грамм., стр. 175.

А. Поповъ въ своей очень полной «Калмыцкой грамматикѣ» (Казань, 1848) этой частицы не упоминаетъ вовсе, ср. стр. 173—177.

[4] Г. І. Рамстедтъ. Фон., стр. 55—56.

В. Л. Котвичъ. Опытъ, стр. 13—14.

[5] Г. І. Рамстедтъ. Фон., стр. 49—50.

В. Л. Котвичъ. Опытъ, стр. 10—11.

[6] Объ этомъ явленіи см. А. Д. Рудневъ. Матеріалы по говорамъ Восточной Монголіи. С.-Петербургъ, 1911 (ниже МВМ), стр. 176.

А. Д. Рудневъ. Хори-бурятскій говоръ. Опытъ изслѣдованія, тексты, переводъ и примѣчанія. Петроградъ, 1913—1914, (ниже ХБГ). Выпускъ I, стр. XIV.

бічкā̈, знали раньше формы *бітегеі, *бітĕгā̈, встрѣчающіяся и до сихъ поръ у нѣкоторыхъ ойратскихъ племенъ, напр., у баитовъ, кобдоскихъ дэрбэтовъ, захачиновъ и др., хотя, можетъ быть, и подъ вліяніемъ халхасцевъ. Подъ вліяніемъ переднихъ («мягкихъ») гласныхъ и въ особенности подъ вліяніемъ предшествующаго і, звукъ т (въ формѣ *бітегеі, *бітĕгā̈) сталъ палатализоваться и измѣнился въ *т̀. Аналогичныхъ примѣровъ можно представить много, пользуясь матерьяломъ, даваемымъ разными монгольскими нарѣчіями. Напр., дэрб.-коб., баит., захач. ā̈ⁱlдă — вѣдать, — образовалась изъ ā̈ⁱлăд < *аїлад < «ајілад», гдѣ л подъ вліяніемъ предшествующаго і измѣнился въ l, т. е. палатализовался; дэрб.-коб., дэрб.-астр., торг.-алт., торг.-астр., баит., захач., урянх.-алт., минг. ӯl — плакать, — < *уїла < «угіла, ујіла», ср. ойрат. письмен. «ујіла» (встрѣчающаяся въ нѣкоторыхъ ойратскихъ рукописяхъ форма «ӯлі»[1] возникла, очевидно, подъ вліяніемъ живой рѣчи), горл. ӱl, öхöl. дурб.-бейс. ӱäl, халх. уїлă, бур. уїлă; тур.: каз. аҕыла, уйг., осм. аҕла, ком. ыҕла. алт. уїла.

Далѣе, *т̀ въ монгольскомъ языкѣ часто измѣняется въ ч, напр., уджум. чімё < *т̀імё < тімё < «тејімӱ»[2] — такой, такъ, да; Г. І. Рамстедтъ совершенно справедливо отмѣтилъ развитіе *т < *ті и *т̀ > «ч»[3] для стараго монгольскаго языка; накапливающійся новый матерьялъ только подтверждаетъ его предположеніе (напр. монг. «чіңна» — слушать, внимать < *т̀іңна < *тіңна, ср. тур., уйг. тың — слушанье < кит. 聽, какъ мнѣ указалъ академикъ В. В. Радловъ, каз., крм. тыңла — внимать, слушать, леб., шор., саг., койб., каз. тыңна, алт., тел., кир., сойот. тыңда). Подъ вліяніемъ мягкаго ч < *т̀ гласный е измѣнился въ і и такимъ образомъ получились формы «бічігеі», бічїгā̈.

Измѣненіе же е въ і подъ вліяніемъ предшествующаго ч часто наблюдается въ разныхъ монгольскихъ нарѣчіяхъ, напр., баит. чід — мочь, быть въ состояніи < чад < «чіда»[4], гдѣ, такимъ образомъ, языкъ возстановилъ

---

[1] См. А. М. Позднѣевъ. Калмыцко-русскій словарь въ пособіе къ изученію русскаго языка въ калмыцкихъ начальныхъ школахъ. С.-Петербургъ, 1911, стр. 45.

[2] А. Д. Рудневъ. МВМ, стр. 177.

[3] Г. І. Рамстедтъ. Фон., стр. 10—11. Ср. также объясненіе А. Бобровникова (Грамм., стр. 176): «бичигэй произошло изъ битэгэй также, какъ изъ тейму произошло чійми». Формы «чіимі» и «тімі, чімі» встрѣчаются иногда въ монгольскихъ рукописяхъ и ксилографахъ вм. «тејімӱ», см. К. О. Голстунскій. Монгольско-русскій словарь, III, стр. 265.

[4] Ср. А. Д. Рудневъ. МВМ, стр. 188.

древній гласный і, ср. хал., бур., ойрат. чад. Что касается формы бічкā̄, то развитіе ея изъ бічӯгā̄ аналогично бiткā̄ < бiтёгā̄.

Любопытно отмѣтить одинъ фактъ развитія формы, аналогичный развитію бічӯгā̄ < бітёгā̄ < *бӯтӯгеі: въ нѣкоторыхъ ойратскихъ былинахъ, распѣваемыхъ профессіональными пѣвцами въ с.-з. Монголіи, встрѣчается форма гічкā̄, какъ optativ. отъ глагола ге (гі) говорить (гічкā̄ < гітёгā̄ < гетёгā̄ < «гетӯгеі»). Замѣчательно еще и то, что форма гічкā̄ встрѣчается въ былинахъ баитовъ (напр., въ былинѣ Хаӊ-Харāцбӯ), употребляющихъ теперь въ качествѣ частицы отрицанія при повелительномъ наклоненіи не форму бічкā̄, а бiткā̄, бiтā̄.

Нѣсколько труднѣе объяснить ходъ развитія формъ бiтā̄ и бічā̄. По всей вѣроятности, онѣ образовались отъ бiткā̄ и бічкā̄, благодаря ассимиляціи к съ предшествующими т и ч и, видимо, прошли черезъ стадію развитія въ формахъ *біттā̄, *біччā̄. На возможность подобнаго объясненія наводятъ такія аналогичныя явленія развитія формъ монгольскаго языка: торг.-астр., торг.-алт., дэрб.-астр., дэрб.-кобд. очі — отправился < отчі < «одчі» (ойрат. письмен.) < «одчу», гдѣ т < д, ассимилируясь съ послѣдующимъ ч, исчезъ и вполнѣ возможно предположить переходную форму *оччі; баит. ӯтсн̥ < ӯʒсн̥ < ӯʒёксн̥ < «ӯцегсен» — видѣвшій, гдѣ ʒ < ц, очутившись благодаря исчезновенію е рядомъ съ с, ассимилируясь съ нимъ, измѣнился въ т; баит. дāч̀сн̥ < дāч̀тсн̥ < дāц̀тсн̥ < дāці чітсн < дāці чадсн̥ < «дағацу чідағсан» — выдержавшій; дэрб.-кобд., баит., хотогойт., халх.-зап. bolціглā̄ < bolці геклā̄ < bolці гекёlā̄, bolцї гехёlā̄ < «болцу гекӯле» — если такъ, если сдѣлалось, гдѣ гlā̄ < *ггlā̄ < *гкlā̄ < геклā̄ < «гекӯле». Во всякомъ случаѣ, нельзя предполагать, что бiтā̄ и бічā̄ образовались изъ бітёгā̄ и бічӯгā̄ путемъ «стяженія» ёгā̄ и ӯгā̄; одновременно съ бітёгā̄ и бічӯгā̄ существующія формы бiткā̄ и бічкā̄ хорошо показываютъ путь развитія.

Такимъ образомъ мы прослѣдили развитіе формъ частицы отрицанія при повелительномъ наклоненіи, которыя могутъ быть возведены къ формѣ *бӯтӯгеі, являющейся optativ. отъ глагола «бӯ» — быть.

II.

Обратимся теперь къ другой частицѣ отрицанія при повелительномъ наклоненіи. Въ монгольскихъ рукописяхъ и ксилографахъ частица эта чаще всего встрѣчается въ формѣ ᠪᠤᠤ «буу». Она сохранилась во многихъ жи-

выхъ монгольскихъ нарѣчіяхъ: хори-бур.[1] бӯ, бе, ару-хорч., дурб.-бейс., джаст., горл. бу[2], могол. бі[3]; затѣмъ въ живомъ литературномъ разговорномъ языкѣ кобдоскихъ ойратовъ встрѣчается форма бӯ[4]. На основаніи этихъ данныхъ можно было бы предполагать древнюю общую форму *бӯ: ойратскій письменный языкъ[5] даетъ важное подтвержденіе этому предположенію. Дѣйствительно, въ ойратскихъ рукописяхъ, старыхъ и новыхъ, эта частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи встрѣчается чаще всего въ формѣ «бӯ», и только въ болѣе новыхъ рукописяхъ, и то рѣдко, попадается форма «бу». Проф. А. Поповъ, повидимому, обратилъ уже вниманіе на это обстоятельство, потому что въ своей «Калмыцкой грамматикѣ»[6] онъ указываетъ только одну форму «бӯ», какъ частицу отрица-

---

[1] См. А. Д. Рудневъ. ХБГ, стр. LXXIII.

Протоіерей А. Орловъ въ своей «Грамматикѣ монголо-бурятскаго разговорнаго языка» (Казань. 1878), указываетъ форму «бу» (стр. 187), однако надо имѣть въ виду, что его транскрипція очень несовершенна. Кастренъ тоже пишетъ бу («bu»), см. M. Alexander Castrén's Versuch einer Burjätischen Sprachlehre nebst kurzem Wörterverzeichniss. Herausgegeben von Anton Schiefner. St.-Petersburg, 1857, p. 72—73

[2] См. А. Д. Рудневъ. МВМ, стр. 74. Въ Опытѣ словаря указаны формы бӯ (ару-хорч., дурб.-бейс., джаст.), бу (горл.), но въ текстахъ есть бу и для ару-хорч. (стр. 17). Надо имѣть еще въ виду, что въ восточно-монгольскихъ говорахъ часто у и ӯ < «ӯ» не различаются (ibid., стр. 192), такъ что, быть можетъ, и для восточно-монгольскихъ говоровъ возможно признавать существованіе формы бӯ.

[3] См. G. J. Ramstedt. Mogholica, p. 24.

[4] У современныхъ ойратовъ (западныхъ монголовъ, калмыковъ) Кобдоскаго округа с.-з. Монголіи наравнѣ съ обыденнымъ, часто небрежнымъ, языкомъ существуетъ особый, традиціонно сохраняющійся, болѣе возвышенный, «идеальный» языкъ, болѣе древній и получающій особое примѣненіе въ устныхъ эпическихъ произведеніяхъ. Несмотря на различіе ойратскихъ нарѣчій и говоровъ с.-з. Монголіи этотъ живой литературный языкъ является болѣе или менѣе одинаковымъ въ устахъ представителей разныхъ ойратскихъ племенъ, говорящихъ на разныхъ нарѣчіяхъ. Частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи въ формѣ бӯ встрѣчается въ такомъ живомъ литературномъ разговорномъ языкѣ разныхъ ойратскихъ племенъ, живущихъ иногда далеко другъ отъ друга, напр. захач. бӯ келёк, — пусть не говоритъ, баит. бӯ jowō — не иди, не смѣй итти.

[5] Ойратская (западно-монгольская, калмыцкая) письменность и литература возникли въ половинѣ 17-го вѣка благодаря дѣятельности Зая Пандиты (см. К. Ѳ. Голстунскій. Монголо-ойратскіе законы 1640 года, дополнительные указы Галданъ-хунъ тайджія и законы, составленные для Волжскихъ калмыковъ при калмыцкомъ ханѣ Дондукъ-Даши. Калмыцкій текстъ съ русскимъ переводомъ и примѣчаніями. С.-Петербургъ, 1880, стр. 121—130). Въ настоящее время у многихъ ойратскихъ племенъ эта письменность (тодӧ бічік) вытѣсняется монгольской (худм бічік).

[6] Стр. 174. См. также B. Jülg. Die Märchen des Siddhi-Kür. Kalmükischer Text mit deutscher Übersetzung und einem kalmükisch-deutschen Wörterbuch. Leipzig, 1866, p. 170. А. Бобровниковъ (Грамм., стр. 175) указываетъ форму «бӯ», но замѣчаетъ: «Вмѣсто

нія при повелительномъ наклоненіи. Очень можетъ быть, что появленіе формы «бу» надо будетъ отнести къ безграмотнымъ написаніямъ. Ойратскіе грамотѣи, въ виду слабости письменныхъ и литературныхъ традицій, часто не знаютъ, какъ примирить формы живой рѣчи съ правилами старой письменности [1].

Вотъ эти данныя и заставляютъ пересмотрѣть вопросъ о частицѣ монгольскаго письменнаго языка «буу».

Въ монгольскихъ рукописяхъ и ксилографахъ, кромѣ этой формы, встрѣчаются и другія: «бу», «буі», или «бӯ», «бӯӯ», или «буіу» [2]. Можно-ли считать на основаніи существованія этихъ формъ, что и въ письменномъ монгольскомъ языкѣ имѣлась частица «бӯ», которую тогда можно было бы считать общемонгольской?

Надо выяснить вопросъ, откуда взялось столько разныхъ формъ одной и той же частицы.

Извѣстно, что монголы заимствовали свою письменность отъ уйгуровъ; извѣстно также, что монголы часто рабски слѣдовали уйгурскимъ образцамъ въ написаніи тѣхъ или другихъ словъ [3]. Уйгуры же, очевидно въ виду осо-

---

(«бӯ») калмыки часто пишутъ («бу»), и это справедливѣе, такъ какъ въ этой частицѣ гласная *у* произносится коротко».

Памятники монгольскаго «квадратнаго» письма, трудъ араба-филолога и китайская транскрипція Юань-чао-ми-ши даютъ форму «бу», но въ этихъ источникахъ у и ӯ различить часто весьма трудно (см. проф. А. М. Позднѣевъ. Лекціи по исторіи монгольской литературы, читанныя въ 1896/97 акад. году. Записалъ и издалъ студентъ Х. П. Кристи. С.-Петербургъ, 1897 г., стр. 175—176).

П. М. Меліоранскій, Арабъ-филологъ о монгольскомъ языкѣ. ЗВОИРАО, т. XV, стр. 169. С.-Пб. 1903 г.

[1] Ойраты часто, напримѣръ, пишутъ «угеі» вмѣсто правильнаго «ӯгеі»—нѣтъ— совершенно пренебрегая всѣми правилами своей письменности потому, что въ ихъ живомъ языкѣ это слово звучитъ угā, угō, угō; ср. В. Л. Котвичъ. Опытъ, стр. 2—6.

[2] Напр. въ экземплярѣ Парижской Національной Библіотеки монгольскаго Ганджура (фондъ Pelliot), иногда воспроизводящемъ дословно редакцію рукописнаго монг. Ганджура, находящагося въ библіотекѣ Петроградскаго Университета и представляющаго собою, повидимому, переводъ временъ Ликданъ-хана, часто встрѣчаются формы «бӯ» и «бӯӯ». Первая изъ этихъ формъ часто попадается въ xyl. изданіи монгольскаго сочиненія «боḍhi седкіл тегӧсӯгсен кӧке коḅолаіту Саран кӧкеге перетӯ сібаḅун-у туḅуці» (Xyl. Q. 9 по рукописному каталогу библіотеки Императорскаго Петроградскаго Университета).

[3] См. Б. Я. Владимірцовъ. Турецкіе элементы въ монгольскомъ языкѣ. ЗВОИРАО, т. XX (С.-Петербургъ, 1911), стр. 162—169.

бенностей своего алфавита, затруднялись изображать конечное ӱ въ односложныхъ словахъ: дѣйствительно ᠶ «ӱ» на концѣ могло бы читаться, какъ «уі». Вѣроятно поэтому уйгуры стали обозначать конечное «ӱ» односложныхъ словъ черезъ два у: «уу»; напр., «суу» = «сӱ» — войско, — при чемъ такое начертаніе закрѣпощалось за словомъ и употреблялось и тогда, когда не было въ немъ особой нужды, когда, напримѣръ, наращались частицы, и «ӱ» переставало быть конечнымъ; напр., «суусі» = «сӱсі» — его войско[1].

То же самое встрѣчаемъ мы и въ монгольской письменности; подражая уйгурамъ, монголы тоже стали изображать конечное «ӱ» односложныхъ словъ черезъ два у: «уу»; напр., то же слово «сӱ» — войско, встрѣчается въ начертаніи «суу»=«сӱ» (vol. ка отдѣла hдулба экземпляра монгольскаго Ганджура Парижской Національной Библіотеки, f. 1 r.), т. е. совершенно такъ же, какъ и въ уйгурской письменности.

На этомъ основаніи можно предполагать, что монголы при помощи двухъ у: «уу»: стали изображать и «ӱ» въ словѣ «бӱ» — не, не смѣй, т. е. стали писать «буу»=«бӱ»; формы же и , которыя должны читаться «бӱ» и «бӱӱ», указываютъ на стараніе такъ или иначе точнѣе отмѣтить это конечное «ӱ». Благодаря алфавиту Зая-Пандиты западные монголы — ойраты — могли легко справиться съ задачей обозначать конечное «ӱ» въ односложныхъ словахъ и, дѣйствительно, въ ойратскихъ рукописяхъ мы чаще всего находимъ эту частицу отрицанія при повелительномъ наклоненіи въ формѣ «бӱ».

Такимъ образомъ, на основаніи формъ какъ живыхъ монгольскихъ нарѣчій, такъ и письменныхъ монгольскихъ и ойратскихъ можно думать, что общей формой этой частицы отрицанія при повелительномъ наклоненіи было *бӱ.

Вышеупомянутая другая частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи *бӱтӱгеі есть не что иное, какъ форма optativ. отъ глагола «бӱ» быть, подобно другой частицѣ «баjітуɣаі» — не только... но и, являющейся

---

[1] См. W. Radloff. Tišastvustik ein in türkischer Sprache bearbeitetes Buddhistisches Sūtra. Bibliotheca Buddhica, XII, St.-Petersburg, 1910. p. 60.

optativ. отъ глагола «баjі» — быть, существовать. Можно, поэтому, съ большой вѣроятностью предполагать, что частица отрицанія при повелительномъ наклоненіи *бӱ является формой imperativi того же глагола «бӱ» — быть[1], и труднымъ для объясненія представляется лишь семасіологическое измѣненіе.

6 декабря 1915 г.
Петроградъ.

[1] Любопытно отмѣтить, что въ живомъ литературномъ, разговорномъ языкѣ ойратовъ с.-з. Монголіи встрѣчается выраженіе бӱ келē (—не говори), часто употребляемое вмѣсто байтха̄ < «баjітуҕаі» — не только... но и.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Результаты первой стадіи экспериментальнаго изслѣдованія структуры кристалловъ.

Е. С. Федорова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г.).

Пользуясь появленіемъ книги В. Г. и В. Л. Брагговъ (отца и сына) X Rays and crystal structure, я хотѣлъ бы здѣсь собрать и воспроизвести полученные ими результаты въ наиболѣе простомъ и наглядномъ видѣ, считая, что эти результаты въ нѣкоторой степени есть результаты первой стадіи такого рода изслѣдованій. Я считаю это потому, что, какъ будетъ видно изъ дальнѣйшаго изложенія, примѣненный методъ далъ возможность опредѣлить съ полною подробностью структуру кристалловъ на рядѣ нѣсколько усложняющихся примѣровъ, но все-таки не вышелъ изъ области простѣйшихъ возможныхъ случаевъ, и уже не далъ возможности получить результатовъ даже для кристалловъ столь простого химическаго состава, какъ кварцъ и ромбическая сѣра. Конечно, по этому методу можетъ быть получено еще не мало другихъ опредѣленій, но всѣ они все-таки будутъ относиться къ простѣйшимъ примѣрамъ изъ всѣхъ возможныхъ; чтобы совладать съ примѣрами нѣсколько болѣе сложными, методъ необходимо долженъ получить дальнѣйшее развитіе, котораго въ настоящее время нельзя и предвидѣть.

Прежде всего эта сложность обусловливается большимъ числомъ атомовъ, входящихъ въ составъ частицы. Кромѣ того, явное несовершенство метода, употребленнаго Браггами, состоитъ въ томъ, что онъ не является гармонически приспособленнымъ къ изслѣдованію структуры кристалловъ, что выражается въ томъ, что для двухъ веществъ, которыя мы могли бы вообразить съ тождественною кристаллическою структурою, но съ разными

атомами, экспериментальныя числа, которыя получаются по этому методу и служатъ для установленія структуры, получаются весьма различными[1], и вообще глубокія различія получаются при замѣщеніи одного атома другимъ, сколько бы послѣдній ни былъ близокъ къ первому по химической роли (но не по вѣсу атома; близкіе же по роли вообще существенно различаются по своему вѣсу).

Впрочемъ, этой первой стадіи предшествовало такъ сказать введеніе въ методы экспериментальнаго изученія структуры кристалловъ, когда производилось простое фотографированіе X лучей, пропущенныхъ чрезъ кристаллическое вещество. Результаты получались различные для разныхъ кристалловъ и даже для такихъ близкихъ какъ ClK и ClNa и хотя въ полученныхъ фотографическихъ отпечаткахъ и кроются данныя для опредѣленія структуры, но эти данныя связаны со структурой настолько сложно, что распознаваніе по нимъ структуры оказалось возможнымъ лишь въ исключительныхъ случаяхъ; къ тому же этотъ методъ характеризуется и особою грубостью, несравнимою съ точностью метода Бdevices Брагговъ.

Для кристаллографовъ глубочайшій интересъ представляютъ только методы, дающіе возможность точно устанавливать структуру кристалловъ, и такъ какъ въ настояще время общихъ методовъ такого характера еще не существуетъ, то приходится ограничиться методомъ Брагговъ и на первый разъ хотя бы полученными ими результатами.

Уже теперь однако можно сказать, что этотъ методъ санкціонировалъ экспериментально тѣ теоретическіе выводы и построенія, которые были сдѣланы до его появленія, такъ что всѣ пока полученные результаты входятъ въ рамки возможныхъ структуръ, предусмотрѣнныхъ раньше, а для этихъ структуръ были выработаны методы простѣйшаго ихъ выраженія и изображенія. Въ частности, наиболѣе простые методы этого ряда были употреблены авторомъ этой статьи въ сочиненіи «Reguläre Plan- und Raumtheilung»[2]. Въ немъ правильныя системы точекъ получили выраженія: 1) въ видѣ спеціальныхъ уравненій для такихъ системъ, 2) въ видѣ спеціальныхъ проекцій ихъ элементовъ симметріи, и наконецъ 3) въ видѣ соотвѣтственныхъ параллелоэдровъ съ отмѣченными на ихъ граняхъ элементами симметріи,

[1] Въ этомъ отношеніи методъ гоніометрическаго изслѣдованія является такъ сказать основнымъ, гармонически приспособленнымъ къ изслѣдованію кристалловъ; за нѣкоторыми исключеніями числа, получаемыя по этому методу, тѣмъ ближе другъ къ другу, чѣмъ ближе подходятъ кристаллы по своей структурѣ. Напротивъ того, оптическій методъ не связанъ такъ точно со структурою и можетъ привести къ весьма различнымъ числамъ для кристалловъ съ тождественною структурою.

[2] Abhandlungen d. k. bayer. Akad. d. Wis. II Cl. XX B., 1899.

связывающихъ такой параллелоэдръ съ равнымъ смежнымъ ему параллелоэдрамъ, примыкающимъ къ нему по этой грани. Если по такой грани смежный параллелоэдръ примыкаетъ просто въ параллельномъ положеніи, то никакой отмѣтки на грани не требуется. Если въ изображеніи всѣ грани остаются безъ отмѣтокъ, то значитъ всѣ параллелоэдры тождественно параллельны и система получаеть названіе системы I порядка; если существуютъ только двѣ оріентировки, то система называется II порядка и т. д.

Если всѣ элементы симметріи сходятся въ одной точкѣ, центрѣ симметріи, то система называется симморфной; если въ одномъ центрѣ симметріи сходятся только всѣ оси симметріи, а элементы симметричности служатъ для совмѣщенія параллелоэдра со смежными, то система называется гемисимморфною; всѣ остальныя правильныя системы точекъ асимморфны.

Если система не симморфна, то значитъ содержимое параллелоэдровъ имѣетъ нѣсколько напр. n различныхъ оріентировокъ (очевидно, что сами параллелоэдры какъ простыя геометрическія тѣла сохраняютъ во всей системѣ параллельную оріентированность), и такая система есть система n-го порядка. Но и въ симморфной системѣ параллелоэдры могутъ располагаться не въ одной оріентировкѣ[1].

Итакъ, простѣйшее выраженіе всей безконечной правильной системы, то есть кристаллической структуры сводится: 1) къ параллелоэдру, изъ котораго можно составить систему, 2) къ показанію содержимаго такого параллелоэдра; сюда относится расположеніе разныхъ атомовъ, если таковые имѣются внутри одного параллелоэдра, а также расположеніе въ немъ элементовъ симметріи, если таковые имѣются, то есть если расположеніе атомовъ въ предѣлахъ ограниченія параллелоэдра обладаетъ симметріей, напр. имѣющей величину S_i. Число различныхъ оріентировокъ параллелоэдровъ называется величиною симметріи связи S_e. Произведеніе же $S_i \times S_e = S$ есть величина симметріи системы то есть кристаллическаго вещества, которое выражается этою системою.

Такъ какъ сами Брагги въ своемъ изложеніи не обратили вниманія на эту сторону дѣла, и черезъ это не выразили въ простѣйшемъ видѣ полученные ими результаты, то я и имѣю въ виду сдѣлать въ этой замѣткѣ.

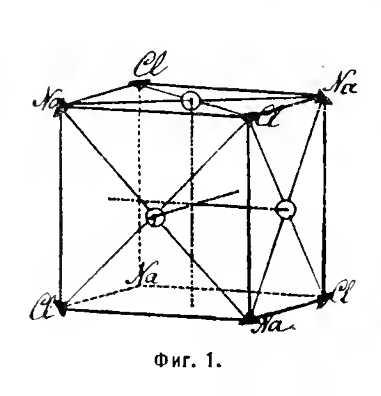
---

[1] Подъ параллелоэдромъ системы мы будемъ подразумѣвать тотъ, который обнимаетъ наименьшую часть пространства, изъ которой путемъ симметрическаго совмѣщенія мы можемъ вывести всѣ остальныя части, то есть такіе же параллелоэдры, хотя бы и съ иначе оріентированнымъ содержимымъ.

При этомъ я не имѣю въ виду здѣсь излагать метода и хода изслѣдованія[1] этихъ авторовъ и даже не предполагаю излагать предварительной работы, необходимой для полученія изложенныхъ здѣсь результатовъ, а именно копированіе по даннымъ авторовъ изображеній соотвѣтственныхъ правильныхъ системъ точекъ въ изображеніи векторіальными кругами[2].

Простѣйшими примѣрами, съ которыхъ Брагги начали свои опредѣленія, были кристаллы хлоридовъ щелочей, къ которымъ конечно принадлежатъ и другія изоморфныя соли. Расположеніе атомовъ, къ которому привели эти изслѣдованія, сводится къ чередованію обоихъ составляющихъ атомовъ въ вершинахъ куба такъ, чтобы каждыя двѣ вершины на одномъ ребрѣ принадлежали разнымъ атомамъ.

Параллелоэдръ (Фиг. 1), обнимающій наименьшее повторяющееся пространство, въ данномъ случаѣ есть кубъ, въ чемъ легко убѣдимся, если примемъ его грани за плоскости симметріи или помѣстимъ въ ихъ центрахъ центры обращенія[3]. Но такіе кубы выполняютъ пространство не въ параллельномъ положеніи, а имѣютъ двѣ различныя оріентировки, опредѣляемыя только-что упомянутыми элементами симметріи, а содержимое ихъ имѣетъ вдвое меньшую величину симметріи (гексакисъ-тетраэдрической), чѣмъ симметрія полной системы (гексакисъ-октаэдрическая). Слѣдовательно, это система параллелоэдровъ II порядка.



Фиг. 1.

Но какъ правильная система точекъ, данная система симморфна, и центры симметріи, въ которыхъ пересѣкаются всѣ элементы симметріи системы (три четверныхъ, четыре тройныхъ, шесть двойныхъ осей симметріи, главныя и діагональныя плоскости симметріи; въ нихъ же находятся и центры обращенія), есть вершины этого куба[4].

---

[1] Въ наиболѣе доступномъ изложеніи это сдѣлано въ журналѣ «Природа» въ статьѣ «Первые шаги въ дѣлѣ распознаванія расположенія атомовъ въ кристаллѣ» (мартъ 1915).

[2] Въ частности, это сдѣлано для алмаза въ Запискахъ Горнаго Института въ статьяхъ «О строеніи кристалловъ алмаза по Браггу» (V, 68) и «Первое констатированіе опытнымъ путемъ асимморфной правильной системы» (V, 54).

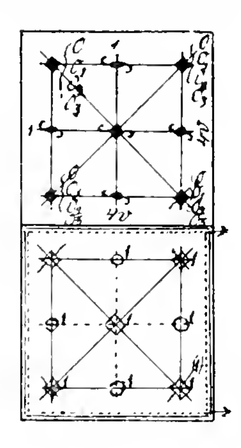
[3] Иначе — центры обратнаго равенства.

[4] Можно также принять такую точку за центръ ромбическаго додекаэдра, и тогда этотъ параллелоэдръ будетъ I порядка; но это находилось бы въ противорѣчіи съ опредѣленіемъ элементарнаго параллелоэдра, даннымъ выше.

Кубъ съ элементами симметріи даннаго случая обозначается 19δ III. а данная симморфная правильная система точекъ, которую мы разсмотримъ ближе, обозначается 24 γ, почему вся система параллелоэдровъ должна имѣть отмѣтку 24γ. 19δ III.

Совокупность элементовъ симметріи изображена на фиг. 2, которая слагается изъ двухъ частей; на верхней изображены элементы симметріи совмѣщенія, на нижней — элементы симметричности[1].

Для поясненія этого чертежа приходится сказать слѣдующее: на верхней черные квадратики отмѣчаютъ положеніе вертикальныхъ четверныхъ осей симметріи, посреди паръ которыхъ находятся двойныя винтовыя оси симметріи, а въ центрѣ изображена четверная винтовая ось, но не съ ходомъ $^{\lambda}/_{4}$, какъ обыкновенныя правыя и лѣвыя четверныя винтовыя оси, а съ ходомъ $^{\lambda}/_{2}$, почему она не можетъ быть ни правою, ни лѣвою и одновременно представляетъ изъ себя двойную ось симметріи. Что относится къ расположенію вертикальныхъ осей, то же относится до обѣихъ группъ горизонтальныхъ осей. изъ коихъ оси симметріи вычерчиваются сплошными, а винтовыя — пунктиромъ. Но такъ какъ горизонтальныя оси могутъ находиться не только въ плоскости



Фиг. 2.

чертежа, но отстоять отъ него (выше или ниже) на $^{\lambda}/_{2}$ (равной сторонѣ вычерченнаго квадрата) и на $^{\lambda}/_{4}$, то соотвѣтственныя разстоянія отмѣчаются на чертежѣ сбоку, считая $^{\lambda}/_{4}$ за 1-цу; цифру 2 уже ставить незачѣмъ, такъ какъ на этомъ разстояніи ось покрывается такою же осью и того же наименованія (но не равною, а равнодѣйствующею).

Что же касается тройныхъ осей симметріи, то при точкѣ ихъ пересѣченія съ плоскостью чертежа выставляются буквы O, O_1, O_2, O_3, соотвѣтствующія направленіямъ [111], [$\bar{1}$11], [$\bar{1}\bar{1}$1] и [1$\bar{1}$1]. Имѣются еще и равнодѣйствующія правыя и лѣвыя тройныя винтовыя оси, но онѣ пропускаются въ изображеніи. Положеніе ихъ легко найти, какъ составляющихъ оси правильныхъ трехгранныхъ призмъ, образующихся тремя параллельными ближайшими тройными осями симметріи. На чертежѣ пропущены также всѣ косыя двойныя оси симметріи и винтовыя. Ихъ полное изображеніе сдѣлало бы чертежъ очень сложнымъ, а ихъ пропускъ не такъ су-

[1] Ср. Reg. Pl. u. R. Th. Taf. III и V.

щественъ, такъ какъ онѣ выводятся какъ равнодѣйствующія изъ четверныхъ и тройныхъ осей [1].

Исключеніе сдѣлано для двухъ двойныхъ осей симметріи, представляющихъ діагонали квадрата на плоскости чертежа. Внимательное разсматриваніе чертежа покажетъ, что въ центрѣ куба, построеннаго на основномъ квадратѣ, пересѣкаются три четверныя винтовыя оси съ ходомъ $\lambda/_2$ и что въ такой оси на разстояніи $\lambda/_4$ чередуются то пары осей, параллельныхъ главнымъ осямъ, то пары діагональныхъ осей.

На нижней половинѣ чертежа въ видѣ сплошныхъ прямыхъ показаны вертикальныя плоскости симметріи и пунктиромъ — вертикальныя плоскости симметричнаго скольженія [2] съ вертикальнымъ поступаніемъ $\lambda/_2$.

Косыя плоскости симметріи и симметричнаго скольженія вовсе пропущены.

Горизонтальная плоскость симметріи, совпадающая съ плоскостью чертежа (а слѣдовательно и параллельныя ей плоскости симметріи на разстояніи $\lambda/_2$ и кратномъ) показана на обводѣ чертежа въ видѣ сплошного квадрата. Что же касается горизонтальной плоскости скольженія, то она на томъ же обводѣ показана пунктиромъ, а приставленною цифрою (1) показывается ея разстояніе; стрѣлкою же отмѣчены направленія скольженія.

Центры обращенія показаны кружками, а разстояніе ихъ всѣхъ отъ плоскости чертежа отмѣчено цифрою 1, отмѣчающею, что это разстояніе есть $\lambda/_4$. Изъ того же чертежа видно, что четверныя оси симметріи есть одновременно и четверныя оси сложной симметріи, причемъ ихъ центры (пересѣченія оси и плоскости сложной симметріи), находятся на плоскости чертежа, а четверныя винтовыя оси есть также и четверныя оси сложной симметріи, но ихъ центры отстоятъ отъ плоскости чертежа на разстояніи $\lambda/_4$.

Распознаваніе расположенія атомовъ въ связи съ знакомствомъ главнѣйшихъ кристаллографическихъ свойствъ кристалловъ этой группы, позволяетъ точнѣе опредѣлить, съ чѣмъ связаны главныя особенности кристаллографическихъ комплексовъ.

Въ данномъ случаѣ за элементарный параллелоэдръ системы приходится

---

[1] Достаточно указать на то, что полный циклъ всѣхъ осей совмѣщенія выводится изъ произвольно взятыхъ двухъ непересѣкающихся осей: одной четверной и одной тройной. Можно взять и двѣ пересѣкающіяся оси, но тогда нужно имѣть въ виду направленіе и величину полнаго совмѣщенія или ея слагающихъ по направленію главныхъ осей.

[2] Напомню, что соотвѣтствующее движеніе слагается изъ отраженія въ плоскости симметріи и поступанія по направленію, находящемуся въ плоскости симметріи. Слѣдовательно, такіе элементы симметричности до нѣкоторой степени аналогичны винтовымъ осямъ.

признать не ромбическій додекаэдръ (гексапараллелоэдръ), а кубъ (см. прим. 4, стр. 362), почему и структуру приходится признать за гексаэдрическую.

И въ самомъ дѣлѣ, если признать атомы за равнозначные слагающіе кристаллической структуры, то пространственная рѣшетка получается гексаэдрическая, то есть съ наибольшею плотностью по плоскостямъ куба и соотвѣтственнымъ уменьшеніемъ плотностей для плоскихъ сѣтокъ другихъ направленій. Въ этомъ случаѣ не только главнѣйшими я даже почти единственно представленными являются грани куба, но по нимъ слѣдуетъ и спайность высокаго совершенства.

Изъ разсмотрѣнной группы изоморфныхъ солей Брагги изслѣдовали и убѣдились въ ихъ одинаковомъ строеніи соли ClNa, ClK, BrK, JK. Сюда же относится и изслѣдованный ими галенитъ PbS, имѣющій совершенно одинаковое съ ними расположеніе атомовъ, и притомъ одинаковое по отношенію къ обоимъ слагающимъ атомамъ.

Въ общемъ случаѣ амміачныя соли проявляютъ особую близость къ солямъ каліевымъ, которою обусловливается преимущественный изоморфизмъ этихъ солей. Но какъ разъ данная группа составляетъ исключеніе, и кристаллографическія свойства нашатыря, начиная съ главнѣйшихъ формъ, существенно отличаются отъ другихъ кристалловъ этой группы; структура ясно октаэдрическая.

Теперь уже мы имѣемъ изслѣдованіе этихъ кристалловъ по новому методу, и оно показало дѣйствительно совсѣмъ не похожую структуру (стр. 158). Прежде всего уголъ паденія луча указываетъ на присутствіе всего одной частицы $ClNH_4$ въ единицѣ кристаллической структуры[1]. Сравненіе же энергіи отраженія показало, что можно принять атомы Cl находящимися въ вершинахъ куба, а атомъ N въ центрѣ послѣдняго; но атомы водорода по своей ничтожной массѣ почти не вызываютъ никакого эффекта въ изслѣдованіяхъ этого рода, почему положеніе его атомовъ не могло быть опредѣлено.

Такимъ образомъ, хотя структура кристалловъ нашатыря и остается не вполнѣ опредѣленною, но констатировано существенное различіе ея отъ другихъ хлоридовъ, между собою изоморфныхъ.

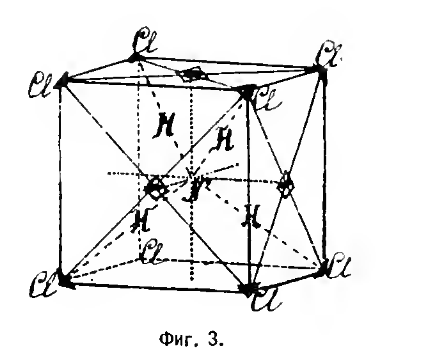
---

[1] Въ самомъ дѣлѣ, по формулѣ $n\lambda = 2d \sin(\theta)$, зная длину волны пущеннаго луча (напр. отъ палладіева антикатода $\lambda = 0{,}576 \cdot 10^{-7}$) и отраженнаго напр. отъ плоскости куба (принимая, что d выражаетъ разстояніе ближайшихъ сѣтокъ этой плоскости) и получивъ для перваго отраженія ($n = 1$) уголъ θ, вычислимъ d, а помноживъ d^3 на плотность кристаллическаго вещества, найдемъ массу вещества, приходящуюся на одинъ кубикъ. Съ другой стороны, помножая массу атома водорода ($1{,}64 \times 10^{-24}$ gr.) на сумму вѣсовъ атомовъ въ химической частицѣ, получаемъ массу такой частицы. Сравненіе двухъ такихъ массъ покажетъ, сколько частицъ приходится на одинъ кубикъ структуры.

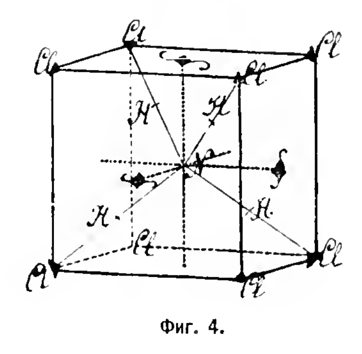
Неопредѣленнымъ остается собственно положенie атомовъ H на дiагоналяхъ куба, такъ какъ по условiямъ симметрiи, конечно они должны быть расположены на этихъ дiагоналяхъ и въ совокупности образовать тетраэдръ. Но, строго говоря, это положенie не играетъ особой роли. Ихъ присутствie во всякомъ случаѣ вдвое повышаетъ плотность расположенiя атомовъ на центральныхъ плоскостяхъ, параллельныхъ гранямъ ромбическаго додекаэдра и представляющихъ плоскости симметрiи (фиг. 3). Въ данномъ случаѣ мы опять получаемъ симморфную систему, отмѣченную 19δ III.

Самимъ Браггамъ было извѣстно, что на этихъ кристаллахъ наблюдались проявленiя признаковъ гироэдрическаго вида симметрiи, котораго никакъ нельзя вывести изъ полученной структуры кристалла.

Теоретически для нашатыря представляется полная возможность вывести гироэдрическiй видъ симметрiи, если представить себѣ, что главныя оси, которыя въ данномъ случаѣ представлены четверными осями сложной



Фиг. 3.



Фиг. 4.

симметрiи, замѣнить четверными винтовыми осями съ ходомъ $\lambda/_2$. При соотвѣтствующемъ элементарномъ движенiи кубъ совмѣстится со смежнымъ по грани кубомъ, въ которомъ расположенie атомовъ (H) будетъ нѣсколько иное, чего однако по способу Браггов ъ распознать нельзя.

Въ этомъ случаѣ получится однако симморфная система точекъ, отмѣченная числомъ (24)[1]. Но по методу Браггов ъ мы не отличили бы ее отъ предъидущей системы, такъ какъ различie свелось бы лишь къ нѣкоторому различiю атомовъ H (дополнительные тетраэдры) въ смежныхъ по гранямъ кубахъ. Въ виду большаго согласiя такого предположенiя съ опытомъ, нужно полагать, что именно таково и есть строенie нашатыря; параллелоэдръ системы изображенъ на фиг. 4.

---

[1] Я не привожу здѣсь ея изображенie, потому что оно тождественно съ верхнею половиною фиг. 2, ибо въ этомъ случаѣ элементовъ симметричности не имѣется.

Параллелоэдръ этотъ опять есть кубъ фиг. 4, если только въ немъ четверную ось сложной симметріи замѣнимъ четверною винтовою осью съ ходомъ $\lambda/_2$ (считая именно за $\lambda/_2$ сторону куба) и конечно отбросимъ плоскости симметріи. Поэтому обозначеніе системы должно быть 24. 19 III, гдѣ III есть выраженіе куба (трипараллелоэдра); 19 III выражаетъ кубъ съ осями тетартоэдрическаго вида симметріи, а 24 совокупность элементовъ симметріи, изображенная на фиг. 2 (верхняя часть).

Если бы мы разсматривали атомы какъ геометрическія точки и даже какъ шары, то получилась бы спеціальная система точекъ съ гексакисъ-октаэдрическимъ видомъ симметріи. На опытѣ же констатированъ гироэдрическій видъ симметріи. Это требуетъ спеціальнаго разъясненія.

Этотъ фактъ мнѣ представляется имѣющимъ большое значеніе. При изслѣдованіяхъ этого рода атомы большею частью играютъ роль шаровъ. Это слѣдуетъ изъ того, что чрезъ одинъ и тотъ же атомъ проходятъ всякаго рода оси и плоскости симметріи. Напримѣръ въ данной системѣ чрезъ атомъ Cl проходятъ всѣ четверныя, тройныя и двойныя оси симметріи, а въ системѣ хлористаго калія чрезъ него, такъ-же какъ и чрезъ атомъ K проходятъ не только всѣ эти оси симметріи, но и всѣ девять плоскостей симметріи кубическихъ кристалловъ.

Между тѣмъ, свойства атомовъ уже настолько намъ знакомы, что мы можемъ утверждать, что они во всякомъ случаѣ не имѣютъ симметріи шара, такъ какъ не представляютъ шарообразнаго комка однороднаго и непрерывнаго вещества.

Слѣдовательно, есть нѣчто, что придаетъ такому асимметрическому, по существу, образованію какъ атомъ свойства шара. Я здѣсь говорю про асимметричность по крайней мѣрѣ нѣкоторыхъ атомовъ потому, что одно изъ коренныхъ извѣстныхъ ихъ свойствъ есть такъ называемая атомность, а атомы одноатомные очевидно не могутъ быть иными, какъ только вполнѣ асимметричными. Между тѣмъ именно таковые (примѣръ Cl и K) фигурируютъ въ нашихъ системахъ, какъ имѣющіе симметрію шара.

Ясно, что то привходящее обстоятельство, которое можетъ придать имъ это свойство, есть ихъ движеніе, которое должно быть двоякаго рода: 1) вращеніе около центра (точнѣе около мгновенныхъ осей) и 2) колебательное движеніе во всевозможныхъ направленіяхъ. Если бы мгновенныя оси могли имѣть всевозможныя направленія и притомъ съ равными предѣлами угловыхъ скоростей и также если бы амплитуды колебаній во всѣхъ направленіяхъ были бы одинаковы, то конечно атомъ получилъ бы симметрію шара.

Но есть ли такое движеніе необходимое свойство движенія атомовъ въ кристаллическихъ веществахъ?

Вотъ фактъ гироэдрическаго вида симметріи кристалловъ нашатыря при только что констатированномъ расположеніи его атомовъ даетъ на вопросъ отвѣтъ отрицательный, то есть, что во всякомъ случаѣ не всегда атомы обладаютъ симметріей шара, и въ разсматриваемомъ частномъ случаѣ этого нельзя сказать про атомы H. И конечно сами по себѣ атомы H, какъ одноатомные, представляютъ типичный примѣръ ассиметрическихъ атомовъ.

Но мы можемъ идти дальше и утверждать, что если бы эти атомы и имѣли симметрію шара, то, находясь въ условіяхъ, только что разобранныхъ для кристалловъ нашатыря, они подъ воздѣйствіемъ окружающихъ разнородныхъ атомовъ получили бы движеніе, нарушающее ихъ симметрію. Если признать, что они находятся на тройныхъ осяхъ симметріи, то пришлось бы ихъ признать за образованія, обладающія этими осями, но отнюдь не осями вращенія (при каковомъ условіи всѣ плоскости, проходящія чрезъ ихъ тройную ось симметріи, были бы плоскостями симметріи). Если бы это имѣло мѣсто, то кристаллы обладали бы не гироэдрическою, а гексакисъ-октаэдрическою симметріей. Въ этомъ смыслѣ для характеристики ихъ роли въ данномъ кристаллическомъ строеніи мы должны были бы разсматривать ихъ за тѣла, обладающія только тройною осью симметріи, но безъ плоскостей симметріи.

Въ этомъ смыслѣ мы и впредь будемъ говорить про атомы, обладающіе симметріей шара или другою, низшею симметріей, а въ частныхъ случаяхъ можетъ быть и лишенными симметріи.

Мы будемъ брать это какъ фактъ прямого опыта, потому что, не зная свойствъ атомовъ въ достаточной полнотѣ, мы, конечно, не можемъ предвидѣть ихъ поведенія въ отдѣльныхъ частныхъ случаяхъ.

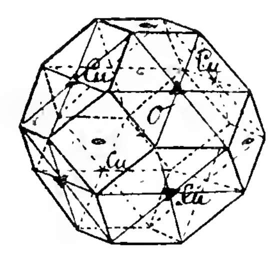
Отъ нашатыря простой переходъ къ *куприту*, кристаллы котораго изслѣдованы Браггами съ исчерпывающей полнотой (стр. 155). Въ общемъ, расположеніе атомовъ въ отдѣльномъ кубическомъ элементѣ какъ разъ такое, какое мы приняли для нашатыря на фиг. 4; однако теперь атомы кислорода имѣютъ положеніе не только атомовъ Cl, но и атомовъ N въ нашатырѣ, а атомы Cu замѣщаютъ мѣста атомовъ H. Но именно вслѣдствіе такого расположенія двухъ родовъ атомовъ, теперь уже нельзя кубъ признать за элементарный параллелоэдръ системы, а за таковой приходится признать притупленный октаэдръ, какъ это и изображено на фиг. 5. Въ ней показанъ атомъ O въ центрѣ, а атомы Cu въ центрахъ четырехъ граней, такъ что въ совокупности получается тетраэдръ.

По методу Брагговъ центръ обращенія не опредѣляется; поэтому результаты получаются тождественными, если всю систему атомовъ или ея часть замѣнимъ діаметрально противоположнымъ расположеніемъ.

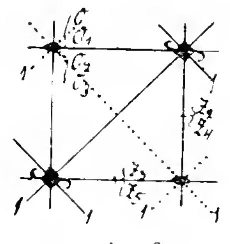
Въ случаѣ нашатыря мы имѣемъ какъ разъ такое отношеніе въ расположеніи атомовъ двухъ смежныхъ по грани кубовъ; на дѣлѣ мы получаемъ одно расположеніе изъ другого вращеніемъ около главныхъ винтовыхъ осей на уголъ 90°, но результатъ для этого спеціальнаго случая не отличается отъ того, какъ если бы мы произвели обращеніе чрезъ центръ или же поворотъ на 180° около двойной оси симметріи, расположенной по діагонали грани куба.

Теперь, останавливаясь на купритѣ, мы опять замѣчаемъ нѣкоторое противорѣчіе результатовъ Брагговъ съ опытомъ, такъ какъ на опытѣ явно проявленъ гироэдрическій видъ симметріи, а это несовмѣстимо съ только что отмѣченнымъ атомнымъ строеніемъ куприта.

Но вообразимъ, что мы отъ содержимаго параллелоэдра переходимъ къ содержимому смежнаго по октаэдрической грани параллелоэдру чрезъ посредство двойной оси симметріи, расположенной на грани октаэдра какъ одна изъ діагоналей шестиугольника. Получимъ систему параллелоэдровъ II порядка и новую, и притомъ асимморфную систему точекъ, а именно отмѣченную цифрою (9). И если бы таково было дѣйствительно расположеніе атомовъ, то, какъ я только-что отмѣтилъ, по способу Брагговъ его нельзя было бы отличить отъ того, которое дано этими учеными. Но вмѣстѣ съ тѣмъ противорѣчіе съ опытомъ было бы устранено, а потому нѣтъ основанія останавливаться непремѣнно на уже отмѣченномъ расположеніи, а съ большимъ основаніемъ мы можемъ замѣнить его тѣмъ, которое получится отъ присоединенія двойныхъ осей симметріи на октаэдрическихъ граняхъ, что и показано на фиг. 5. Хотя при этомъ положеніе атомовъ въ плоскостяхъ



Фиг. 5.


Фиг. 6.

сѣтокъ и измѣнится, но составъ и плотность расположенія атомовъ останутся неизмѣнными, а отъ этого только и зависятъ какъ углы отраженія, такъ и напряженности лучей.

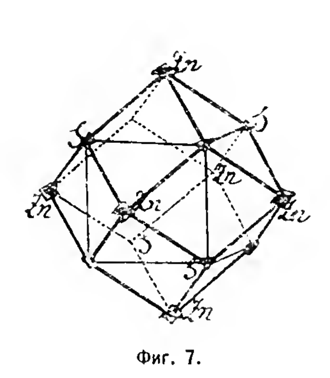
Такимъ образомъ для этой системы получимъ отмѣтку (9) 20 VII, гдѣ VII выражаетъ гептапараллелоэдръ, 20 VII показываетъ въ немъ оси тетартоэдрическаго вида симметріи, а (9) асимморфную систему точекъ, изображенную на фиг. 6 (см. примѣчаніе въ концѣ, стр. 389).

Въ этой системѣ атомы Cu находятся въ точкѣ пересѣченія одной тройной съ тремя перпендикулярными двойными осями симметріи (центръ тригонально трапецоэдрической симметріи) и слѣдовательно также не принадлежатъ къ атомамъ съ симметріей шара. Если бы они имѣли такую симметрію, видъ симметріи системы не могъ бы быть гироэдрическимъ.

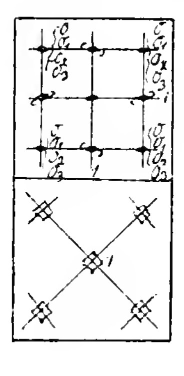
Еще разъ сравнивая системы нашатыря и куприта, отмѣтимъ, что хотя относительное расположеніе атомовъ въ обоихъ случаяхъ одинаково (или по крайней мѣрѣ его можно принять таковымъ), однако системы все таки различны, потому что тѣ положенія, которыя въ первомъ занимаютъ атомы Cl и N, во второмъ заняты одинаковыми атомами O. Вотъ почему первая представлена кубомъ, а вторая притупленнымъ октаэдромъ.

Такое же отношеніе въ расположеніи атомовъ Брагги получили для кристалловъ алмаза и сфалерита. Въ обоихъ случаяхъ эти атомы занимаютъ положеніе вершинъ ромбическаго додекаэдра, при чемъ изъ тригональныхъ вершинъ заняты только 4, образующія въ совокупности тетраэдръ. Но въ сфалеритѣ однѣ изъ этихъ вершинъ заняты атомами S, а другія вершины заняты атомами Zn. Однако, въ этомъ случаѣ, несмотря на различіе системъ, ромбическій додекаэдръ для обѣихъ остается элементарнымъ параллелоэдромъ[1].

Въ *сфалеритѣ* (фиг. 7) изъ расположенія атомовъ непосредственно



Фиг. 7.



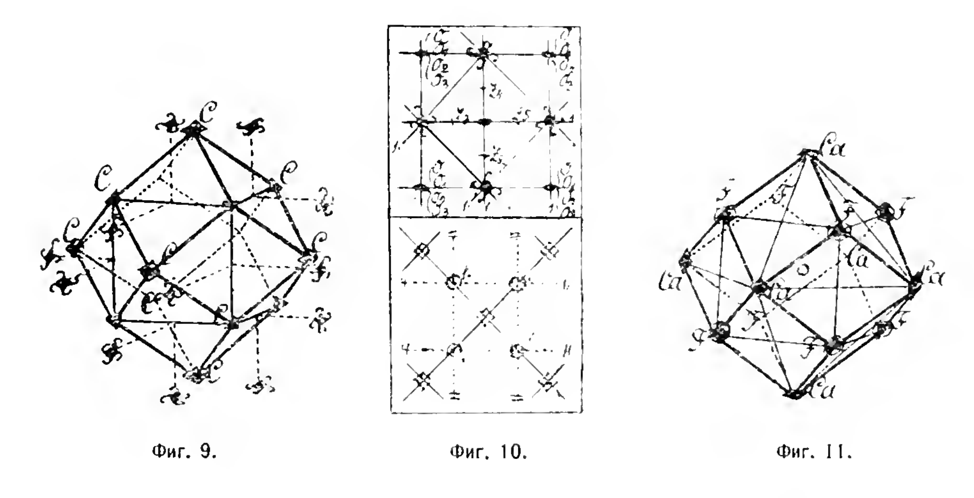
Фиг. 8.

[1] Каждый изъ этихъ атомовъ можно отнести и къ центру параллелоэдра. Слѣдовательно, параллелоэдръ по отношенію къ системѣ точекъ можетъ занимать четыре различныя положенія.

вытекаетъ симморфная система 21δ VI гексакисъ-тетраэдрическаго вида симметріи, что превосходно согласуется съ опытомъ. Сокращенное изображеніе ея элементовъ симметріи дано на фиг. 8.

Что же касается алмаза, то при такомъ же расположеніи атомовъ мы въ первый разъ встрѣчаемъ то усложненіе, что на объемъ одного элементарнаго параллелоэдра системы приходится не наименьшее число равныхъ атомовъ, а именно два атома C: наименьшее же число есть конечно 1-на. Благодаря этому, становятся возможными особенныя движенія совмѣщенія атомовъ, которыя однако не вполнѣ относятся къ самимъ параллелоэдрамъ.

Въ частности, сюда относятся правыя и лѣвыя четверныя винтовыя оси, показанныя на фиг. 9. Это уже было отмѣчено въ книгѣ Браггов̆ъ. Если принять во вниманіе, что внутренняя симметрія параллелоэдра, также показанная на фигурѣ, есть гексакисъ-тетраэдрическая, то значитъ полная симметрія системы есть гексакисъ-октаэдрическая.



Фиг. 9. Фиг. 10. Фиг. 11.

Какъ система точекъ она раньше была отмѣчена 38 (γ1) и воспроизведена на фиг. 10. Слѣдовательно, обозначеніе системы въ данномъ случаѣ (38) (γ1). 21δ VI.

Расположеніе атомовъ во *флюоритѣ* оказалось близкимъ къ двумъ предыдущимъ, напримѣръ сфалериту, если Zn замѣнить Ca, но атомы F занимаютъ уже положеніе не четырехъ, а всѣхъ восьми тригональныхъ вершинъ ромбическаго додекаэдра. Система получается симморфная, гексакисъ-октаэдрическаго вида симметріи. Расположеніе атомовъ и элементовъ симметріи показано на фиг. 11. Обозначеніе системы 24γ VI.

Несмотря на специальныя трудности, встрѣченныя при изученіи кристалловъ *мѣди*, именно для нихъ получались простѣйшіе результаты изъ всѣхъ,

до сихъ поръ изслѣдованныхъ, а именно ромбическій додекаэдръ обладаетъ полною симметріей, но одинъ атомъ мѣди нужно помѣстить въ его центрѣ. Хотя расположеніе атомовъ въ этомъ случаѣ и отлично отъ предыдущаго, но система остается въ точности такою же, почему ей также принадлежитъ обозначеніе 24/ VI.

Не безъ особыхъ трудностей обошлось и изслѣдованіе кристалловъ *кальцита* и изоморфныхъ съ нимъ по строенію и расположенію атомовъ кристалловъ *родохрозита*, *сидерита* и *натровой селитры*.

Однако результатъ изслѣдованій можетъ быть изображенъ весьма просто при посредствѣ гексапараллелоэдра, представляющаго какъ бы сжатый, по направленію одной изъ тройныхъ осей симметріи, ромбическій додекаэдръ. Величина сжатія приблизительно (точныя числа можно дать только для отдѣльныхъ членовъ ряда кальцита, но не для всѣхъ) 5 : 7 то есть если примемъ діагональ ромбическаго додекаэдра по тройной оси симметріи за 7, то соотвѣтствующая діагональ для гексапараллелоэдра будетъ 5.

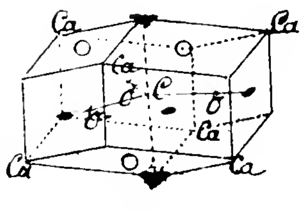
Атомъ C находится въ центрѣ, а атомы Ca занимаютъ положеніе тетрагоналоидныхъ вершинъ гексапараллелоэдра; атомы же O находятся въ центральной плоскости, перпендикулярной къ тройной оси симметріи на радіусахъ, соединяющихъ центръ фигуры съ центрами граней на разстояніи 2 : 3 отъ перваго центра[1]. Этихъ атомовъ конечно 3 и они связаны другъ съ другомъ тройною осью симметріи.

Если примемъ длину вертикальнаго ребра гексапараллелоэдра за 1-цу, то плоскость трехъ атомовъ C (содержащая и атомы O), перпендикулярная къ этому ребру какъ тройной оси симметріи пересѣчетъ его на разстояніи $^2/_3$ отъ тетрагоналоидной вершины (съ атомомъ Ca), а слѣдующій атомъ Ca на той же оси отстоитъ на $2^2/_3 = 4 \times {}^2/_3$ отъ той же плоскости; слѣдовательно, *первый атомъ* Ca *занимаетъ положеніе центра тяжести четырехгранника, одна вершина котораго есть второй атомъ* Ca, *а три другія вершины — атомы* C (*или* O); что атомъ C находится въ центрѣ тяжести трехъ атомовъ O, непосредственно очевидно.

Содержимое параллелоэдра имѣетъ тригонально-трапецоэдрическую симметрію, причемъ двойныя оси симметріи перпендикулярны къ вертикальнымъ гранямъ параллелоэдра, какъ это все и показано на фиг. 12.

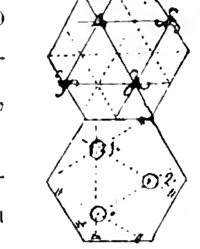
[1] Обращу вниманіе на то, что *именно при такомъ расположеніи атомовъ O они* образуютъ въ центральной плоскости систему правильныхъ трехугольниковъ то есть въ *въ наибольшей возможной степени удалены другъ отъ друга.* При этомъ ихъ конгруентные ряды параллельны вертикальнымъ гранямъ параллелоэдра.

Но этимъ симметрія частицы не ограничивается, такъ какъ для кальцита отчетливѣе, чѣмъ для какого-нибудь другого кристалла, выражается тригонально-скаленоэдрическая симметрія. Ее можно существенно отличить отъ тригонально-трапецоэдрической симметріи присутствіемъ центровъ обращенія; а такъ какъ по расположенію атомовъ эти центры не могутъ быть помѣщены въ центрѣ параллелоэдра, не могутъ быть расположены также и въ центрахъ вертикальныхъ граней (тогда эти грани стали бы плоскостями симметріи, которыя въ такомъ случаѣ также должны были проходить и чрезъ центръ параллелоэдра) и вообще ни въ какихъ другихъ точкахъ кромѣ центровъ косыхъ граней, что и показано на фигурѣ.



Фиг. 12.

Но отсюда вытекаетъ, что параллелоэдры въ этомъ случаѣ располагаются слоями, перпендикулярными къ тройной оси симметріи, и притомъ расположеніе атомовъ (собственно только атомовъ O) въ одномъ слоѣ отличается отъ расположенія въ смежныхъ слояхъ, непосредственно примыкающихъ къ нему. Мы легко поймемъ это различіе, если данное положеніе атомовъ O замѣнимъ другимъ, а именно на трехъ другихъ радіусахъ-векторахъ, составляющихъ биссектрисы трехъ первыхъ.


Фиг. 13.

Такимъ образомъ на этомъ примѣрѣ мы имѣемъ типичную гемисиморфную систему. Эта система была выведена и отмѣчена 16α 1. Мы даемъ изображеніе ея элементовъ симметріи на фиг. 13.

Такъ какъ на этомъ примѣрѣ мы въ первый разъ вышли изъ предѣловъ кристалловъ кубической сингоніи, то полезно остановиться на немъ нѣсколько подробнѣе.

Прежде всего объ осяхъ совмѣщенія.

На основаніи одной теоремы ученія о безконечныхъ правильныхъ системахъ фигуръ въ системахъ кубическаго типа, если имѣются тройныя оси симметріи, то непремѣнно имѣются также правая и лѣвая винтовыя оси[1]. Такъ какъ тройныя оси симметріи проходятъ не только чрезъ центръ

[1] Эта теорема непосредственно доказывается тѣмъ соображеніемъ, что въ параллелоэдрахъ кубическаго типа непремѣнно имѣются поступанія, не перпендикулярныя къ тройнымъ осямъ симметріи, а при такихъ поступаніяхъ равнодѣйствующими тройныхъ осей симметріи могутъ быть только правая и лѣвая тройныя винтовыя оси.

Въ связи съ этимъ находится тотъ эмпирическій выводъ, полученный авторомъ, что

параллелоэдра, но и совпадают съ его вертикальными ребрами, то этимъ вполнѣ опредѣляется и положеніе тройныхъ винтовыхъ осей, потому что онѣ составляютъ оси трехгранныхъ призмъ, образуемыхъ тремя ближайшими осями симметріи. Такимъ образомъ тройныя винтовыя оси пересѣкутъ косыя грани параллелоэдра въ точкахъ на горизонтальныхъ діагоналяхъ ромбовъ, и притомъ чрезъ одну изъ такихъ точекъ на одной и той же діагонали пройдетъ правая, а чрезъ другую лѣвая ось.

Если мы примемъ это во вниманіе, то прямо изъ фиг. 12 увидимъ, что эти винтовыя оси пересѣкаютъ двойныя оси симметріи, а изъ фиг. 13 (верхней части) видно, что каждую винтовую ось пересѣкаютъ три двойныя оси симметріи на разстояніи $\lambda/_3$ другъ отъ друга.

Если въ системахъ кубической сингоніи величина λ поступанія совмѣщенія одна и та же для всѣхъ трехъ главныхъ осей, то въ системахъ гексагональной (и тетрагональной) сингоніи уже нужно отличать λ, относящуюся къ главной (вертикальной) оси, отъ λ_1, относящейся къ горизонтальнымъ осямъ. Для известковаго шпата это различіе очень рѣзко въ смыслѣ $\lambda < \lambda_1$, гдѣ λ_1 относится къ осямъ, перпендикулярнымъ къ гранямъ призмы.

Мы придали центру обращенія положеніе въ центрахъ косыхъ граней параллелоэдра; но изъ фиг. 13 (нижней части) можемъ усмотрѣть, что центры обращенія находятся и на тройныхъ осяхъ симметріи, но не въ центрахъ параллелоэдровъ, а какъ разъ посрединѣ между двумя такими центрами ($1^1/_2\lambda$). Горизонтальная плоскость, проходящая чрезъ такой центръ на тройной оси симметріи, есть плоскость сложной симметріи. Такимъ образомъ всѣ тройныя оси симметріи этой системы есть одновременно и шестерныя оси сложной симметріи. Черезъ эти же оси проходятъ (и отмѣчены на фигурѣ парою узкихъ черточекъ) вертикальныя плоскости скольженія съ косымъ направленіемъ скольженія.

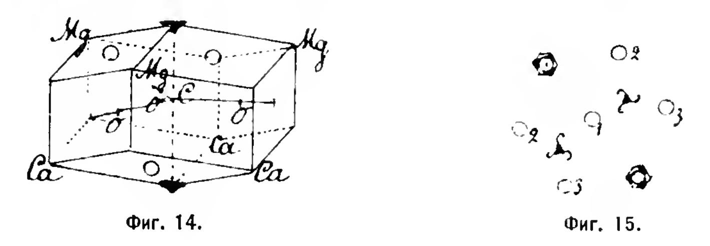
Кромѣ упомянутыхъ кристалловъ группы кальцита Брагги изслѣдовали относящійся обыкновенно къ той же группѣ *доломитъ*, который въ сущности далъ то же расположеніе атомовъ; но понятно, что половина атомовъ Ca замѣщена атомами Mg, и именно замѣщеніе идетъ въ послѣдовательныхъ горизонтальныхъ слояхъ.

Но все-таки система, относящаяся къ доломиту, существенно различна отъ системы кальцита. Прежде всего это различіе проявляется въ исчезно-

---

всѣ кристаллы гексагональной сингоніи, проявляющіе вращеніе плоскости поляризаціи, непремѣнно относятся къ гипогексагональному типу. Съ этой точки зрѣнія эмпирическій выводъ получаетъ значеніе строго теоретическаго.

веніи двойныхъ осей симметріи и слѣдовательно уменьшеніи величины симметріи вдвое. Это сразу видно изъ расположенія атомовъ, изображеннаго на фиг. 14. Остаются, слѣдовательно, только вертикальныя тройныя оси совмѣщенія и центры обращенія. Понятно, что и въ этомъ случаѣ тройныя оси симметріи есть одновременно шестерныя оси сложной симметріи, а правая и лѣвая тройныя винтовыя оси остаются на тѣхъ же мѣстахъ, что и раньше,



Фиг. 14. Фиг. 15.

но видъ симметріи системы теперь уже не скаленоэдрическій, а ромбоэдрическій, что и дѣйствительно констатировано на кристаллахъ доломита. Система элементовъ симметріи изображена на фиг. 15.

Чтобы отъ системы, изображенной на фиг. 13, перейти къ изображенію системы даннаго случая, нужно только отбросить двойныя оси совмѣщенія и плоскости скольженія, почему и нѣтъ надобности отдѣльно изображать новую систему, но во всякомъ случаѣ эта система новая, отличная отъ предыдущей; она была выведена подъ означеніемъ (13*a*). Такимъ образомъ мы получаемъ въ концѣ концовъ для доломита систему параллелоэдровъ, имѣющую обозначеніе 13*a* (13 VI), а для кальцита и остальныхъ разсмотрѣнныхъ кристалловъ 16α 1 (16 VI), гдѣ 13 VI означаетъ гексапараллелоэдръ, обладающій только тройною осью симметріи, то есть тригонально-пирамидальнаго, а 16 VI тригонально-трапецоэдрическаго вида симметріи.

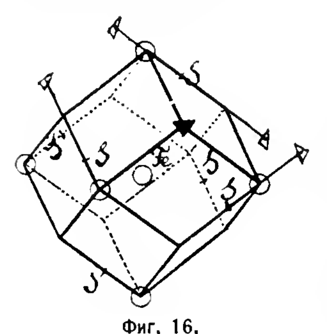
Тотъ фактъ, что къ этой изоморфной группѣ примыкаетъ и натріева селитра NO_3Na даетъ ясное объясненіе сущности эквивалентнаго изоморфизма.

При одинаковомъ соотношеніи въ двухъ случаяхъ хотя бы и весьма различныхъ атомовъ расположеніе ихъ можетъ оставаться тождественнымъ; а такъ какъ въ изоморфизмѣ выражается согласіе ряда различныхъ кристаллографическихъ свойствъ и прежде всего такихъ какъ комбинаціи и спайности, то значитъ *эти свойства зависятъ не отъ индивидуальности атомовъ, а отъ ихъ расположенія*[1].

---

[1] При сложности состава частицы, выражающейся въ большомъ числѣ атомовъ въ параллелоэдрѣ ясно можно отдѣлять атомы внутренніе (ядро) и периферическіе. Имѣется рядъ фактовъ, напередъ подсказывающихъ, что на образованіе кристаллическихъ комби-

Переходя къ группѣ *пирита*, изъ которой Брагги изслѣдовали также *гауеритъ* и *кобальтинъ*, мы замѣтимъ болѣе сложное расположеніе атомовъ, которое однако все-таки получаетъ сравнительно простое выраженіе при помощи ромбическаго додекаэдра какъ параллелоэдра системы. Въ центрѣ находится атомъ Fe, а шесть атомовъ S расположены на ребрахъ, показанныхъ на фиг. 16 какъ тройныя оси симметріи на разстояніи $^3/_5$ соотвѣтственнаго ребра, считая отъ тригональной вершины.



Фиг. 16.

Примемъ длину ребра ромбическаго додекаэдра за 1-цу. Тогда плоскость трехъ атомовъ Fe, перпендикулярная къ тройной оси симметріи, пересѣкаетъ эту ось, то есть ребро на $^1/_3$, а отъ атома S на $^3/_5 - ^1/_3 = ^4/_{15}$, а отъ слѣдующаго атома S на той же оси на $1 + ^2/_5 - ^1/_3 = ^{16}/_{15}$ (считая отъ тригональной вершины); итакъ, если второй атомъ S примемъ за четвертую вершину четырехгранника, три первыя вершины котораго есть упомянутыя атомы Fe, то найдемъ, что *второй атомъ S занимаетъ положеніе центра тяжести четырехгранника.*

Симметрія параллелоэдра ромбоэдрическая, а именно въ центрѣ находится центръ обращенія, а чрезъ него проходитъ одна тройная ось симметріи. Отсюда слѣдуетъ (такъ какъ видъ симметріи пирита діакисъ-додекаэдрическій[1] и слѣдовательно величина симметріи 24), что эта система параллелоэдровъ IV порядка, то есть въ системѣ параллелоэдры имѣютъ 4 различныя оріентировки.

Чтобы понять, какъ отъ даннаго параллелоэдра перейти къ смежнымъ по гранямъ, мы должны принять во вниманіе, что нѣкоторыя изъ реберъ параллелоэдра являются тройными осями симметріи: это показано на фигурѣ 16 продолженіемъ этихъ реберъ и условною отмѣткою. Ни одна изъ тройныхъ осей симметріи не пересѣкается ни съ какою другою, такъ что система является типично асимморфною[2]. Центры обращенія занимаютъ также

націй вліяютъ только внѣ лежащіе атомы, а ядро можетъ весьма измѣняться при сохраненіи тождественной комбинаціи. О такомъ структурномъ изоморфизмѣ авторомъ было доложено И. Минералог. Общ. въ 1915 г. (замѣтка въ 1-мъ вып., VI тома Записокъ Горнаго Института).

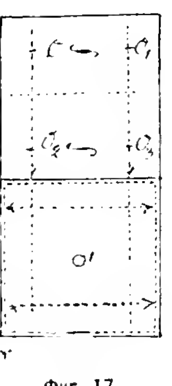
[1] Нѣкоторыя (термоэлектрическія) свойства пирита побуждаютъ приписать ему тетартоэдрическій видъ симметріи. Въ такомъ случаѣ центры обращенія пришлось бы отбросить.

[2] На что и было указано въ Запискахъ Горнаго Института V, стр. 54, гдѣ показано расположеніе атомовъ по Браггу, но векторіальными кругами и воспроизведены элементы симметріи этой системы (25)$\overline{\,}$ 1.

положеніе тетрагональныхъ вершинъ. Не только тройныя оси симметріи, но и вообще всѣ оси совмѣщенія расположены такъ, какъ показано на фиг. 22 и 23 для хлората Na, но расположенія этихъ двухъ фигуръ относятся къ смежнымъ параллелоэдрамъ.

Какъ правильная система точекъ она была предусмотрѣна подъ обозначеніемъ (25) (χ 1) и воспроизведена на фиг. 17. Такимъ образомъ, обозначеніемъ системы параллелоэдровъ служитъ выраженіе (25) (χ 1) (13α VI).

Собственно изложеннымъ рядомъ кристалловъ кубическаго типа и заканчиваются исчерпывающія изслѣдованія Брагговъ. Не мало изслѣдовано и иныхъ, но для нихъ не получено окончательныхъ результатовъ по отношенію къ расположенію всѣхъ атомовъ.


Фиг. 17.

Но есть одинъ законченный примѣръ изслѣдованія кристалла гипогексагональнаго типа, а именно *цинкита*. примѣръ высокопоучительный въ кристаллографическомъ отношеніи. Про него говорится очень кратко въ дополнительныхъ примѣчаніяхъ (стр. 227): «The zinc atoms considered separately from the oxygen atoms are in hexagonal close packing: so also are the oxygen atoms, considered separately from the zinc. The two lattices are of exactly the same form, and can be brought to coincidence by relative movement along the hexagonal axes».

Строго говоря, это краткое описаніе почти исчерпываетъ задачу, но съ перваго раза вызываетъ недоумѣніе, такъ какъ извѣстно, что цинкитъ обладаетъ дигексагонально-пирамидальной симметріею. Между тѣмъ, изъ приведеннаго описанія, казалось бы, слѣдуетъ, что должны присутствовать плоскости симметріи, перпендикулярныя къ шестернымъ осямъ симметріи; но такъ какъ въ полнотѣ и точности описанія сомнѣваться нѣтъ основанія, то приходится по отношенію къ свойствамъ атомовъ, по крайней мѣрѣ Zn сдѣлать важныя заключенія. Я здѣсь говорю про атомы Zn, потому что такое же строеніе имѣетъ и SZn въ видѣ *вуртцита* (также какъ и Cd въ видѣ *гренокита*).

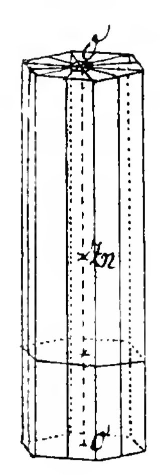
Мы стоимъ передъ тѣмъ фактомъ, что на прямыхъ, параллельныхъ шестерной оси симметріи, расположенъ чередующійся конгруентный рядъ атомовъ Zn и O и между тѣмъ ни черезъ атомъ Zn, ни черезъ атомъ O плоскости симметріи, перпендикулярной къ ряду, не имѣется. Я полагаю, что этотъ фактъ служитъ непререкаемымъ доказательствомъ не только асимметричности, но и полярности этихъ атомовъ, или по крайней мѣрѣ

атомовъ Zn; другими словами, геометрически принять атомъ Zn за шаръ абсолютно не допустимо. Если допустить для него фигуру вращенія, то развѣ только формы конуса (въ смыслѣ геометріи древнихъ), коего ось совпадаетъ съ направленіемъ ряда, и при томъ въ одну сторону этотъ конусъ обращенъ своей вершиною, а въ противоположную — своимъ основаніемъ.

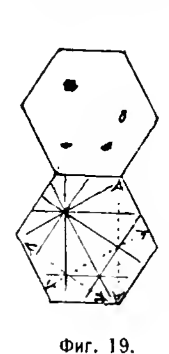
Физическое объясненіе съ современной точки зрѣнія теоріи электроновъ сводится къ тому, что когда атомъ Zn выбрасываетъ къ смежнымъ атомамъ O по электрону, то оставшаяся положительно заряженная его часть проявляетъ асимметричность въ своемъ движеніи при колебаніи по направленію оси, которое въ одномъ направленіи отъ точки равновѣсія встрѣчаетъ большее, а въ противоположномъ — меньшее сопротивленіе. Мнѣ кажется, что это единственно допустимый взглядъ для объясненій гемиморфизма цинкита (полярность по его главной оси).

Но отсюда конечно не слѣдуетъ, что полярность во всѣхъ случаяхъ имѣетъ только подобное объясненіе. Какъ разъ на слѣдующемъ примѣрѣ мы увидимъ случай полярности формы, основанной не на гемиморфизмѣ атомовъ, а на расположеніи атомовъ въ кристаллѣ.

Во всякомъ случаѣ фактъ дигексагонально-пирамидальной симметріи въ связи съ найденнымъ расположеніемъ атомовъ вполнѣ строго устанавливаетъ систему цинкита, изображенную на фиг. 19[1] и отмѣчаемую 17ф IV. Эта система типично симморфная и представлена гексагональною призмою (тетрапараллелоэдромъ), ось которой есть шестерная ось симметріи, вертикальныя ребра — тройныя оси симметріи; посрединѣ между ними находятся двойныя оси симметріи, а чрезъ всѣ эти оси проходятъ вертикальныя плоскости симметріи и параллельныя имъ плоскости симметричнаго скольженія съ горизонтальнымъ направленіемъ скольженія.



Фиг. 18.



Фиг. 19.

Изображеніе параллелоэдра съ расположеніемъ атомовъ, непосредственно яснымъ изъ вышеприведеннаго описанія, сдѣлано на фиг. 18.

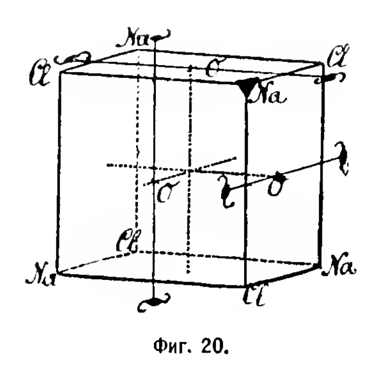
Между кристаллами, въ которыхъ Браггамъ не удалось въ полнотѣ

[1] Въ виду упомянутой краткости описанія остается неяснымъ, находится ли атомъ Zn посрединѣ между двумя атомами O какъ показано на фиг. или можетъ быть съ одной стороны онъ вдвое ближе, какъ намѣчено добавочною плоскостью. Оба разстоянія взяты въ согласіи съ двумя главными наблюдаемыми пирамидами.

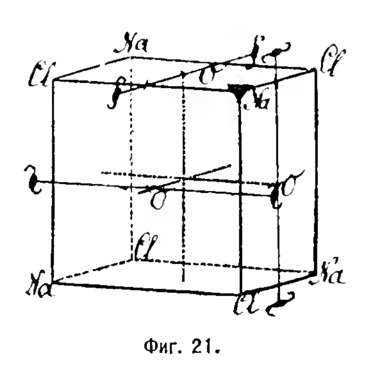
вывести расположеніе атомовъ встрѣтился такой, гдѣ это можно было сдѣлать на теоретическомъ основаніи, а именно хлоратъ натрія ClO_3Na, кристаллы котораго имѣютъ тетартоэдрическую симметрію.

Про него говорится только (стр. 173): Sodium and chlorine atoms approximaxely as in sodium chloride. Но этого вполнѣ достаточно и для опредѣленія положенія атомовъ O, зная число этихъ атомовъ въ частицѣ.

Расположеніе атомовъ показано на фиг. 20 и 21. Для атомовъ O остается только мѣсто въ центрѣ граней куба. Ихъ нельзя передвинуть внутрь куба, потому что тогда бы ихъ число удвоилось; ихъ нельзя и сдви-



Фиг. 20.



Фиг. 21.

нуть съ положенія на горизонтальныхъ двойныхъ осяхъ симметріи по той-же причинѣ. Другого выбора нѣтъ и слѣдовательно иное положеніе теоретически не возможно.

Внутри параллелоэдра проходитъ только одна тройная ось симметріи; двойныя же винтовыя оси, отмѣченныя условными знаками, лежатъ на граняхъ и не пересѣкаются ни между собою, ни съ одной изъ тройныхъ осей. Такъ какъ тройныя оси симметріи имѣютъ четыре различныя положенія въ пространствѣ, то значитъ и параллелоэдры имѣютъ 4 различныя оріентировки, и значитъ это система параллелоэдровъ IV порядка.

Но, сравнивая фиг. 20 и 21, мы замѣтимъ, что это двѣ несовмѣстимыя системы, по существу отличающіяся другъ отъ друга, почему ихъ и нельзя изобразить на одномъ чертежѣ. Но эта несовмѣстимость вытекаетъ изъ самого расположенія атомовъ и вовсе не требуетъ особаго объясненія въ свойствахъ атомовъ. Также и полярность въ направленіи тройныхъ осей симметріи вытекаетъ сама собою изъ расположенія атомовъ.

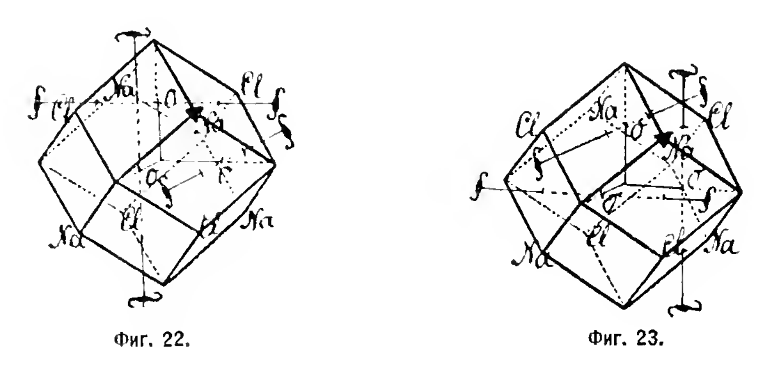
Но, если для объясненія не требуется полярности атомовъ, то все-таки и въ данномъ случаѣ необходимо принять ассиметричность атома Na (или O), по крайней мѣрѣ для этого расположенія; иначе остается непонятнымъ,

почему чрезъ тройную ось симметріи не проходятъ плоскости симметріи, какъ это по геометрическому расположенію атомовъ вполнѣ допустимо.

Но, даже и зная расположеніе атомовъ въ этихъ двухъ системахъ, нельзя предвидѣть, которая будетъ правою и которая лѣвою (считая по вращенію плоскости поляризаціи).

Этимъ двумъ системамъ атомовъ соотвѣтствуетъ только одна система точекъ, а различіе системъ точекъ приводится къ различію положенія атомовъ. Она была изображена какъ верхняя половина фиг. 17 (стр. 377). Кромѣ тройныхъ осей и двойныхъ винтовыхъ осей ничего больше не имѣется: ни одна ось не пересѣкается ни съ какою другою.

Параллелоэдромъ системы является ромбическій додекаэдръ (а кубъ показанъ только для облегченія пониманія положенія атомовъ O); въ окончательномъ видѣ эти параллелоэдры изображены на фиг. 22 и 23. Обозначеніе этой системы параллелоэдровъ IV порядка (25) 13 VI[1].



Фиг. 22. Фиг. 23.

Какъ уже было упомянуто выше, оси совмѣщенія въ этомъ случаѣ расположены одинаково съ пиритомъ (фиг. 17); но то, что тамъ соединено въ одной системѣ и принадлежитъ двумъ смежнымъ параллелоэдрамъ, здѣсь раздѣляется между правою и лѣвою системами.

Въ связи съ только-что разсмотрѣннымъ случаемъ умѣстно поставить вопросъ о разъясненіи отношенія между активными (полярными) веществами и свойствами ихъ кристалловъ.

Строго установлено какъ теоретически, такъ и опытнымъ путемъ, что кристаллы активныхъ веществъ не могутъ обладать элементами симметріч-

[1] Считаю небезинтереснымъ отмѣтить слѣдующее обстоятельство. Удѣльный вѣсъ ClNa 2.17, хлората натрія 2,49; между тѣмъ въ частицѣ перваго два атома, а въ частицѣ второго пять атомовъ, то есть въ газообразномъ состояніи послѣдній долженъ имѣть примѣрно въ 5/2 разъ больший объемъ; на дѣлѣ онъ имѣетъ объемъ только въ 8/7 разъ больше. Такимъ образомъ объемъ частицы ClO_3Na по сравненію съ объемомъ столь прочнаго соединенія какъ ClNa является сжатымъ болѣе чѣмъ въ два раза.

ности. Отсюда часто возникала идея обратнаго отношенія, то есть, если кристаллы лишены элементовъ симметричности (присутствуютъ только оси совмѣщенія), то они должны быть активны; и если опытъ опровергалъ это положеніе, то можно было еще думать о столь малой активности, какую трудно констатировать на опытѣ.

Связывали также активность съ присутствіемъ правыхъ или лѣвыхъ винтовыхъ осей, блестящимъ доводомъ для чего была Рейшевская комбинація слюдяныхъ пластинокъ. Но тогда очевидна невозможность активности въ случаѣ одновременнаго присутствія правыхъ и лѣвыхъ осей, что всегда имѣетъ мѣсто въ кристаллахъ кубической сингоніи. По этому воззрѣнію въ этихъ кристаллахъ никогда не должно быть проявленія активности, а это опять таки не согласно съ опытомъ.

Теперь мы видимъ, что въ этихъ кристаллахъ дѣйствительно можетъ проявляться активность, зависящая отъ кристаллической структуры, и въ такихъ тѣлахъ конечно не могутъ присутствовать элементы симметричности; но все-таки активность эта не обусловливается присутствіемъ правыхъ или лѣвыхъ винтовыхъ осей, такъ какъ въ тетартоэдрическихъ кристаллахъ четверныхъ осей совмѣщенія, все равно правыхъ или лѣвыхъ или наконецъ осей симметріи вообще не имѣется, а тройныя, какъ правыя такъ и лѣвыя, всегда и необходимо имѣются.

Такимъ образомъ для проявленія активности вовсе нѣтъ необходимости въ особыхъ винтовыхъ осяхъ, но все-таки есть необходимость въ нѣкоторой асимметричности атомовъ. Если бы атомъ Na въ ClO_3Na не проявлялъ такой асимметричности, то въ элементарномъ кубѣ напримѣръ фиг. 20 присутствовала не только тройная ось симметріи, но и три, проходящія чрезъ нее, плоскости симметріи; видъ симметріи системы былъ бы гексакисъ-тетраэдрическій, и никакой активности проявиться бы не могло.

Такую же асимметричность мы должны признать въ атомахъ N и Cu въ нашатырѣ и купритѣ, потому что по одному расположенію атомовъ нужно было бы принять присутствіе діагональныхъ плоскостей симметріи. Однако, несмотря на гироэдрическую симметрію этихъ тѣлъ, въ нихъ все-таки нѣтъ активности, такъ какъ само расположеніе атомовъ въ нихъ не обусловливаетъ присутствія двухъ несовмѣстимыхъ системъ, какъ это имѣетъ мѣсто въ ClO_3Na.

По замѣчательной теоріи Вантгофа органическія соединенія активны, если въ нихъ имѣется атомъ C, соединенный съ четырьмя различными радикалами. Хотя это и не связано съ допущеніемъ асимметричности какихъ-нибудь атомовъ, но выражаетъ особую асимметричность въ расположеніи

атомовъ системы и тоже совершенно не связано съ присутствіемъ особыхъ винтовыхъ осей и по видимости даже не связано съ кристаллическою структурою, то есть съ относительнымъ расположеніемъ частицъ; положеніе частицъ даже можетъ быть хаотично, такъ какъ активность проявляется и въ растворахъ.

Однако теперь, послѣ изслѣдованія Брагговъ структуры разныхъ кристалловъ, наше пониманіе частицъ совершенно измѣняется. Результаты, только-что изложенныя, ясно говорятъ намъ, что если есть частицы, то есть и кристаллы; одно отъ другого не отдѣлимо.

Въ этомъ новомъ представленіи какъ-будто замѣчается самопротиворѣчіе въ томъ, что частицы конечно имѣются и въ жидкости. Но полагаю, что это самопротиворѣчіе только кажущееся, если положить въ основу совокупность новѣйшихъ взглядовъ (Максвеля, Больтцмана, Аррепіуса, Планка и пр.).

Начать съ распредѣленія температуръ. Теперь мы не можемъ признать температуру одинаковою во всѣхъ точкахъ вещества. Распредѣленіе ея подчиняется законамъ Максвеля и Больтцмана, выражающимъ количество точекъ разной температуры при опредѣленной средней. Такъ какъ для большинства имѣющихся въ нашемъ распоряженіи жидкостей температуры замерзанія не очень низки (такъ-же какъ въ большинствѣ нашихъ твердыхъ тѣлъ, особенно органическихъ, температуры плавленія не очень высоки), то уже одно это обстоятельство свидѣтельствуетъ о разномъ состояніи жидкихъ и твердыхъ тѣлъ, то есть, что во множествѣ точекъ жидкихъ тѣлъ должны быть частички твердыхъ (такъ-же какъ въ твердыхъ тѣлахъ частички жидкости); если эти твердыя, то есть окристаллизованныя, частички проявляютъ активность, то должна проявлять активность и жидкость. Перемѣна этихъ фазъ наступаетъ въ тотъ моментъ, когда твердыя частички получаютъ непрерывную связь, а эта непрерывность связи можетъ еще не наступить даже въ тотъ моментъ, когда жидкость содержитъ ихъ достаточное количество, чтобы установить связь непрерывности, чему можетъ способствовать рѣзкій толчекъ или дѣйствіе какой-нибудь силы, способствующей оріентированности частичекъ [1].

---

[1] Я полагаю, что пересыщенные растворы должны выдѣлить кристаллическое вещество, если ихъ подвергнуть дѣйствію центробѣжной силы. Такого опыта мнѣ неизвѣстно. Поэтому я предложилъ своему ассистенту Г. М. Аншелесу поставить такой опытъ съ приблизительно насыщеннымъ растворомъ въ пробиркѣ, въ которой съ обоихъ концовъ помѣщено по взвѣшенному кристаллику. Рядъ такихъ опытовъ (особенно отчетливо съ мѣднымъ купоросомъ) удался вполнѣ не только для насыщенныхъ, но даже немного недосыщенныхъ

Ту же часть жидкости, въ которой не произошла кристаллизація, слѣдуетъ признать состоящею изъ газовыхъ частицъ или распавшеюся на іоны отдѣльныхъ атомовъ, что и выражается теоріей Аррениуса.

Если въ жидкость прибавимъ растворимой соли, имѣющей сравнительно высокую температуру плавленія, то въ точкахъ прикосновенія внесенныхъ частицъ съ частичками жидкости, то есть въ точкахъ, въ которыхъ происходитъ процессъ растворенія, твердое вещество переходитъ въ жидкій видъ, иначе сказать, расплавляется, а для этого нужна высокая температура; поэтому эти точки будутъ точками высокой температуры; соотвѣтственно этому частицы твердаго вещества, получающіеся при этомъ распаденіи должны обладать значительной энергіей, соотвѣтствующей этой температурѣ, то есть скорость ихъ движенія будетъ весьма велика по отношенію къ движенію іоновъ въ другихъ частяхъ жидкости.

Но если имѣются степени разбавленія, при которыхъ все твердое вещество распадается на іоны, то есть и предѣлъ, за которымъ часть вещества сохраняется и въ кристаллическомъ видѣ, и теперь, когда понятіе о частицѣ кристаллическаго вещества становится неопредѣленнымъ, приходится полагать, что степень дисперсности кристаллическихъ частицъ въ растворѣ можетъ быть весьма различна и въ общемъ уменьшается съ крѣпостью раствора.

Однако и при такомъ представленіи необходимо принять, что коагуляція атомовъ въ кристаллическія части имѣетъ въ жидкости весьма незначительный предѣлъ, связанный со способностью смѣси давать пересыщенный растворъ; извѣстно, что вещества, способныя давать наиболѣе пересыщенные растворы, быстро кристаллизуются отъ введенія весьма ничтожной величины кристаллическихъ частей; слѣдовательно, если бы такой величины части присутствовали въ пересыщенномъ растворѣ, онъ былъ бы весьма неустойчивъ и быстро выдѣлилъ бы избытокъ кристаллическаго вещества.

Хотя въ задачу этой статьи вовсе не входятъ такіе физико-химическіе вопросы какъ газовая фаза веществъ, однако потребность выпутаться изъ противорѣчій, возникающихъ между обычномъ представленіемъ о составѣ химическихъ частицъ и тѣмъ, къ чему привели сейчасъ опыты по строенію кристаллическихъ веществъ, побудила меня сказать нѣсколько словъ съ цѣлью

растворовъ, причемъ всегда центральный кристалликъ уменьшался (растворялся), а периферическій увеличивался (ростъ) въ вѣсѣ или же на пробиркѣ осѣдали новые кристаллики.

Послѣ удачнаго завершенія этихъ опытовъ Н. Н. Веймарнъ обратилъ мое вниманіе на аналогичные опыты Лобри де Брайна, Ванъ-Калкари (Rec. Trav. chim. Pays Bas **23** 218, 1904) и на свои (Журн. Физ. Хим. общ. 1909 стр. 323).

пояснить, въ чемъ можно усмотрѣть выходъ изъ такихъ противорѣчій. Такимъ образомъ и съ точки зрѣнія согласованія новыхъ результатовъ мы приходимъ къ представленію, впервые, насколько мнѣ извѣстно, развитому П. П. Веймарномъ.

Наконецъ, изслѣдованіе *кварца* привело къ выводу, что атомы Si расположены по винтовой линіи соотвѣтственно правой или лѣвой тройной оси симметріи[1], а изслѣдованіе *сѣры* показало, что въ единицу кристаллической структуры (пространственной рѣшетки) входитъ восемь атомовъ.

Теперь, имѣя уже довольно большой выборъ кристалловъ съ опредѣленнымъ расположеніемъ атомовъ, позволительно задаться вопросомъ о соотношеніяхъ, существующихъ между этимъ расположеніемъ и свойствами кристалловъ и прежде всего появленіемъ важнѣйшихъ формъ.

Въ простѣйшемъ случаѣ Cu (конечно также Ag и Au) мы имѣемъ какъ бы одноатомную частицу съ додекаэдрическою структурою. Какъ извѣстно, плотности сѣтокъ по $\{100\}$, $\{110\}$ и $\{111\}$ въ этомъ случаѣ соотвѣтственно $1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{2}{\sqrt{3}}$. Нужно было бы ожидать въ качествѣ важнѣйшей формы $\{111\}$, къ которой довольно близко примыкаетъ $\{100\}$, а $\{110\}$ имѣетъ уже значительно меньшую плотность.

Однако опытъ показываетъ въ этихъ кристаллахъ значительную неустойчивость кристаллизаціи; въ разныхъ случаяхъ появляются то тѣ, то другія формы или ихъ комбинаціи и конечно преобладающимъ образомъ представлены эти три формы какъ важнѣйшія; но едва ли можно сказать съ увѣренностью, что изъ этихъ трехъ рѣшительно преобладающею является $\{111\}$; это только кажется вѣроятнымъ.

Отсюда какъ бы вытекаетъ, что если факторъ плотности и есть важный факторъ кристаллизаціи, въ чемъ едва ли можно сомнѣваться, то въ сравненіи съ другими при измѣненіи плотности въ названныхъ предѣлахъ онъ не проявляетъ рѣшительнаго и подавляющаго вліянія.

На второмъ примѣрѣ хлоридовъ щелочныхъ металловъ мы имѣемъ, наоборотъ, ярко выраженное преобладаніе формы $\{100\}$, какъ такой, плоскости которой имѣютъ наиболѣе плотное расположеніе атомовъ и въ то же время нѣсколько рѣзче выраженное отношеніе плотностей главныхъ формъ, а именно нормальное (для гексаэдрической структуры) отношеніе: $1 : \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Переходя къ кристалламъ нашатыря (фиг. 4), мы увидимъ двѣ одинаковыя кубическія пространственныя рѣшетки атомовъ Cl и N и четыре рѣ-

[1] Точнѣе сказать, что въ единицу кристаллической структуры входятъ три атома.

шетки атомовъ H, расположенныхъ на обѣихъ діагоналяхъ предыдущихъ кубовъ въ неизвѣстныхъ точкахъ. По предыдущему примѣру мы можемъ видѣть, что главнѣйшія кристаллическія грани получаются при наиболѣе плотномъ распредѣленіи атомовъ, хотя бы и разнородныхъ.

Поэтому теперь получаются плотности, въ своемъ распредѣленіи весьма отличающіяся отъ плотностей въ плоскостяхъ пространственныхъ рѣшетокъ.

Плотности плоскостей $\{100\}$, заключающихъ Cl и N одинаковы и равны 1-цѣ, а заключающія H равны 2-мъ. Изъ плоскостей $\{110\}$ центральная имѣетъ плотность вчетверо большую, чѣмъ нормальная (такъ какъ въ ней находятся атомъ N и два атома H), то есть $\frac{4}{\sqrt{2}}$, а промежуточныя, параллельныя плоскости имѣютъ равную съ ними плотность. Плоскости $\{111\}$ наиболѣе густо сближены, но имѣютъ нормальную плотность, то есть $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Опытъ показываетъ, что плоскости $\{110\}$ часты, но плоскости $\{211\}$ самыя частыя. Теперь, основываясь на предыдущемъ мы должны во всякомъ случаѣ ожидать сравнительно большой плотности и для этихъ граней. Изъ фиг. 4 легко выведется, что наибольшая плотность получится, если атомы H помѣстятся какъ разъ на срединѣ между центромъ и вершинами куба. Поэтому *становится весьма вѣроятнымъ, что именно такъ и должны расположиться атомы H.* Такимъ образомъ, если не прямымъ, то косвеннымъ путемъ мы пришли къ расположенію этихъ атомовъ.

Теперь мы переходимъ къ замѣчательному примѣру куприта, въ которомъ расположеніе атомовъ тождественно съ нашатыремъ. Если-бы основныя кристаллографическія свойства зависѣли только отъ этого расположенія и имъ бы вполнѣ опредѣлялись, то мы для обоихъ кристалловъ должны были бы имѣть полное тождество комбинацій важнѣйшихъ формъ. На опытѣ наблюдается нѣкоторая близость, но не полное тождество.

Прежде всего бросается въ глаза, что въ купритѣ плоскости $\{211\}$ не имѣютъ того преобладающаго значенія какъ въ нашатырѣ и скорѣе отходятъ на второй планъ. Большее значеніе получаютъ грани $\{100\}$ и особенно $\{111\}$, которая получаетъ едва ли не преобладающее значеніе.

Первое не только не представляетъ ничего неожиданнаго, но скорѣе есть естественное слѣдствіе изъ присутствія тѣхъ плоскостей плотности 2, которыя въ нашатырѣ заняты атомами H, а въ купритѣ атомами Cu. То же относится и къ плоскостямъ $\{111\}$.

Отсюда приходится заключить, что *хотя плотность расположенія атомовъ и есть кристаллографически важнѣйшій факторъ, но нѣкоторое значеніе имѣетъ и индивидуальность атомовъ.* По этому примѣру можно

думать, что замѣна атомовъ H атомами Cu повышаетъ кристаллографическое значеніе плоскостей, въ которыхъ находятся эти атомы.

Въ нашатырѣ недостатокъ формы {100} въ комбинаціи отчасти возмѣщается спайностью по ея плоскостямъ, а въ купритѣ по {111} замѣчается отдѣльность.

Не менѣе интересное сопоставленіе мы имѣемъ въ сфалеритѣ и алмазѣ, также характеризующееся тождественнымъ расположеніемъ атомовъ. Для обоихъ имѣетъ преобладающее значеніе форма {111}, какъ это и должно быть по соображенію плотности. Но такое значеніе въ алмазѣ проявляется такъ сказать въ чистомъ видѣ и подчеркивается высокимъ совершенствомъ спайности по ней. Въ сфалеритѣ же не пропорціонально выдвигается роль {110}, отчасти по комбинаціямъ, но въ особенности по весьма совершенной спайности.

Различіе же сводится не столько къ замѣнѣ однихъ атомовъ другими, сколько къ присутствію плоскостей, содержащихъ атомы разнаго рода (по 110 въ сфалеритѣ) или послѣдовательно чередующихся плоскостей съ разными атомами (по 100 и 111 въ немъ же).

Сравненіе показываетъ, что первое обстоятельство усиливаетъ значеніе формы, а второе усиливаетъ связь чередующихся плоскостей (фиг. 9 и 7).

Приходится заключить, что между разнородными атомами, по крайней мѣрѣ такими, какъ Zn и S существуетъ не только химическая связь, но она выражается и механически. Въ сфалеритѣ исчезаетъ спайность по {111}, весьма совершенная въ алмазѣ, то есть безъ присутствія добавочной связи. Съ другой стороны въ немъ является совершенная спайность по {110}, которой не было въ алмазѣ, и вмѣстѣ съ тѣмъ грани формы получаютъ большее значеніе.

Такъ какъ эти добавочныя связи зависятъ отъ сочетанія разнородныхъ атомовъ, то при измѣненіи этихъ сочетаній нужно ожидать и измѣненія кристаллографическихъ свойствъ. Въ этомъ отношеніи интересно сопоставленіе сфалерита съ флюоритомъ (фиг. 11).

Дѣло въ томъ, что по плоскостямъ {111} въ обоихъ веществахъ расположеніе атомовъ или скорѣе ихъ плотность существенно одинакова; только въ сфалеритѣ не всѣ плоскости имѣютъ одну и ту же плотность, а болѣе плотныя попарно чередуются съ менѣе плотными, тогда какъ во флюоритѣ всѣ получаютъ одну и ту же плотность; и все таки по этой формѣ проявляется спайность, хотя и не столь совершенная, какъ въ алмазѣ.

Но все-таки примѣръ флюорита представляетъ замѣчательную аномалію, то есть противорѣчіе съ полученными изъ другихъ примѣровъ правилами.

Подавляющею по важности формою во флюоритѣ является $\{100\}$: между тѣмъ какъ наибольшую плотность имѣютъ плоскости $\{110\}$. Въ этомъ легко убѣдиться, сравнивая плоскости $\{100\}$ съ квадратнымъ расположеніемъ атомовъ F и грани формы $\{110\}$. Если первую примемъ за 1-цу, то величина площади второй есть $\frac{1}{\sqrt{2}}$, и на эту меньшую площадь приходится то же количество атомовъ и притомъ атомовъ разнородныхъ, то-есть и F, и Ca, что должно еще усиливать кристаллографическое значеніе этой грани; между тѣмъ — поразительный фактъ — проявленія этой важнѣйшей формы почти абсолютно не наблюдается [1].

Слѣдуетъ ли отсюда, что выведенныя правила не вѣрны, или же есть какая-нибудь особая причина непроявленія этой особой формы? Этотъ вопросъ оставимъ покамѣстъ открытымъ; но нельзя не вспомнить, что при извѣстныхъ условіяхъ важнѣйшія грани дѣйствительно могутъ не образоваться, какъ показываетъ прямой опытъ хотя бы съ солью ClNa.

Мнѣ казалось бы по отношенію къ природнымъ минераламъ, особенно столь часто встрѣчающимся какъ флюоритъ, такое допущеніе почти не возможнымъ, потому что природа вообще не подбираетъ условія образованія минераловъ; на различіи условій ихъ образованія въ разныхъ мѣсторожденіяхъ основывается фактъ разнообразія ихъ комбинацій по мѣстностямъ. Но можетъ быть спеціально условія образованія флюорита таковы, что въ нихъ всегда есть нѣчто, препятствующее образованію этой важнѣйшей формы. Знаменательно частое проявленіе формы $\{210\}$, которой соотвѣтствуетъ меньшая атомная плотность; чтобы судить о ней, можемъ, напр., провести вертикальную плоскость чрезъ два передніе атома F и самый задній атомъ Ca: получаемъ шестиугольникъ, въ которомъ три вершины замѣщены атомами, и такъ какъ площадь его меньше площади шестиугольника сѣченія плоскостью $\{1\bar{1}0\}$, въ которомъ всѣ вершины замѣщены атомами, то всетаки плотность по этой плоскости тоже относительно велика.

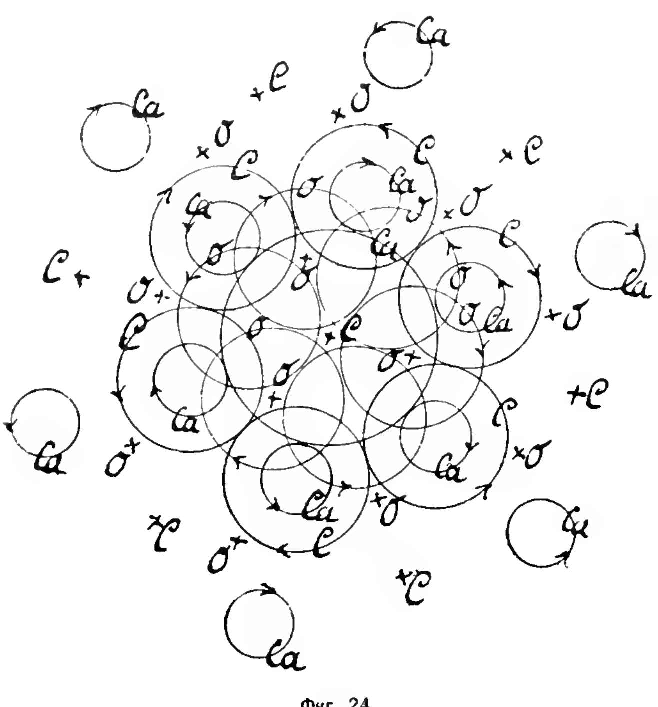
Въ кальцитѣ (фиг. 12) и конечно также въ доломитѣ (фиг. 14) мы явно имѣемъ форму особой плотности въ видѣ острѣйшаго ромбоэдра второго рода по отношенію къ ромбоэдру параллелоэдра. Чтобы сдѣлать это очевиднымъ, прилагается фиг. 24, составленная въ системѣ векторіальныхъ круговъ непосредственно по даннымъ Брагговъ. Какъ видимъ, въ каждой вершинѣ и центрѣ ромба расположены атомы Ca: въ срединахъ реберъ

---

[1] Изъ громаднаго количества кристалловъ музея Горнаго Института А. Э. Купфферъ по моей просьбѣ нашелъ только одинъ единственный кристаллъ изъ Стригау въ Силезіи, представляющій $\{111\}$ съ зачатками притупляющихъ граней $\{110\}$.

атомы C. а по горизонтальной діагонали еще и атомы O. Изъ вертикальныхъ плоскостей наиболѣе плотная укладка принадлежитъ гранямъ, параллельнымъ гранямъ параллелоэдра. Затѣмъ слѣдуютъ горизонтальныя плоскости, вмѣщающія атомы C и O.

Какъ видимъ, расположеніе атомовъ въ этой системѣ вполнѣ согласно съ наблюдаемой кристаллизаціей, равно какъ и съ плоскостями спайности высокаго совершенства, идущими параллельно гранямъ упомянутаго ромбоэдра.



Фиг. 24.

Въ пиритѣ (фиг. 16) расположеніе атомовъ настолько своеобразно, что по выведеннымъ правиламъ можно было бы ожидать появленія граней со сложными символами. На опытѣ явно преобладающее значеніе имѣютъ формы {100} и {210}.

Если бы мы приняли во вниманіе только расположеніе атомовъ Fe, то порядокъ плотности соотвѣтствовалъ додекаэдрической структурѣ, то есть {111}, {100}, {110} . . . . , а это конечно совершенно расходится съ опытомъ.

Но если примемъ во вниманіе атомы S и замѣтимъ ихъ сближенность съ тетрагональными вершинами параллелоэдра то-есть съ центрами обращенія и допустимъ, что въ отношеніи кристаллографическихъ свойствъ они являются связанными и могутъ быть замѣщены одною частицею въ центрѣ

обращенія, то тогда плотность граней {100} возросла бы вдвое и получила первенствующее значеніе, что дѣйствительно согласуется съ опытомъ, который даетъ даже несовершенную спайность по этой формѣ.

Про полярность цинкита было сказано выше. Въ остальномъ же полученное строеніе вполнѣ согласуется съ наблюденіями, такъ какъ порядокъ плотностей слѣдуетъ {1000}, {0110}, {1110}.

При опредѣленіи плотности хлората натрія (фиг. 22 и 23) мы можемъ исходить изъ извѣстныхъ уже намъ плотностей ClNa, такъ какъ расположеніе атомовъ O усиливаетъ относительныя плотности во всѣхъ главныхъ формахъ {100}, {110} и {111}, но въ разной степени, въ первыхъ въ 2 раза (но здѣсь они чередуются съ плоскостями неусиленной плотности), во вторыхъ только въ $^3/_2$ раза, а въ третьихъ въ *четыре* раза (хотя здѣсь также чередуются плоскости усиленной и неусиленной плотности). Полагаю, что это вполнѣ гармонируетъ съ опытомъ, также особенно подчеркивающимъ значеніе формы {111}.

Этимъ пока заканчивается въ высшей степени поучительный матеріалъ опыта.

Обобщая его, мы получаемъ, какъ выводъ, нѣсколько законовъ, изъ которыхъ одинъ носитъ характеръ строгаго закона природы, а другіе не отличаются этою строгостью, и потому скорѣе слѣдуетъ называть правилами. Это составляетъ предметъ слѣдующей статьи.

Примѣчаніе къ стр. 370. Для пониманія фиг. 6 нужно принять во вниманіе, что буквами z_2, z_3, z_4, z_5 отмѣчены двойныя оси симметріи, имѣющія (соотвѣтственно) направленія [011], [$\bar{1}$01], [0$\bar{1}$1], [101].

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ 1—15 марта 1916 года).

18) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 4, 1 марта. Стр. 201—266. Съ 1 портретомъ и 3 таблицами. 1916. lex. 8°.—1615 экз.

19) **Записки И. А. Н.** по Историко-Филологическому Отдѣленію. (Mémoires...... VIII Série. Classe Historico-Philologique). Томъ XII, № 8 и послѣдній. Отчетъ о пятьдесятъ пятомъ присужденіи наградъ графа Уварова (II+69 стр.+титулъ, оглавленіе и обложка къ XII тому). 1916. lex. 8°.—600 экз. Цѣна 65 коп.; 65 cop.

20) **Труды Особой Зоологической Лабораторіи и Севастопольской Біологической Станціи Императорской Академіи Наукъ.** (Travaux du Laboratoire Zoologique et de la Station Biologique de Sébastopol près l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd). Серія II, № 3. Надежда Гаевская. Измѣнчивость у Artemia salina. Съ 2 таблицами (I+39+II стр.). 1916. 8°.—616 экз. Цѣна 50 коп.; 50 cop.

21) **Отчеты о дѣятельности Комиссіи по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи** состоящей при Императорской Академіи Наукъ. 1916. № 2 (I+23—38 стр.). 1916. lex. 8°.—515 экз.

Въ продажу не поступаетъ.

22) **Сборникъ отчетовъ о преміяхъ и наградахъ**, присуждаемыхъ Императорскою Академіею Наукъ. VI. Отчеты за 1911 годъ (I+IV+260 стр.). 1916. 8°.—316 экз. Цѣна 2 руб. 75 коп.; 2 rbl. 75 cop.

23) **Сборникъ документовъ, касающихся исторіи Невы и Ніеншанца.** Приложеніе къ труду А. І. Гиппинга: «Нева и Ніеншанцъ», съ предварительной замѣткой А. С. Лаппо-Данилевскаго (I+XII+328 стр.). 1916. 8°.—255+15 вел. экз. Въ продажу не поступаетъ.

24) **Обозрѣніе трудовъ по славяновѣдѣнію.** Подъ редакціей В. Н. Бенешевича. 1913 г. Выпускъ II (до 1 января 1914 г.). 4) Литература, исторія и древности у южныхъ славянъ. 5) Русская литература (I+303—434 стр.). 1916. 8°.—816 экз. Цѣна 1 руб.; 1 rbl.

25) **Памяти Измаила Ивановича Срезневскаго.** Книга 1. Съ портретомъ (VIII+420+I стр.). 1916. 8°.—500 экз.

Цѣна 2 руб. 50 коп.: 2 rbl. 50 cop.

Оглавленіе.—Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.

Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Мартъ 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 6.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

1 АПРѢЛЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

1 AVRIL.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей.

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того,— 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Къ вопросу объ опредѣленіи эпицентровъ землетрясеній по наблюденіямъ одной сейсмической станціи.

Князя Б. Б. Голицына.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г.).

Въ 1909 году, на собраніи Постоянной Коммиссіи Международной Сейсмологической Ассоціаціи въ Церматѣ въ Швейцаріи, я прочиталъ впервые докладъ объ опредѣленіи азимута на эпицентръ землетрясенія по наблюденіямъ съ двумя горизонтальными маятниками, установленными въ двухъ взаимно перпендикулярныхъ азимутахъ.

Въ статьяхъ «Къ вопросу объ опредѣленіи азимута эпицентра землетрясенія» (ИАН. 1909 г., стр. 999) и «Sur la détermination de l'épicentre d'un tremblement de terre d'après les données d'une seule station sismique» (C. R. T. CL, 1910) я развилъ теорію этого способа и далъ соотвѣтствующія формулы для случая аперіодическихъ горизонтальныхъ маятниковъ съ гальванометрической регистраціей (см. также «Лекціи по сейсмометріи», гл. X, § 1).

Идея этого метода опредѣленія азимута на эпицентръ землетрясенія заключается въ слѣдующемъ.

Въ моментъ нарушенія равновѣсія въ подземныхъ горныхъ породахъ, изъ очага землетрясенія распространяются во всѣ стороны продольныя и поперечныя упругія сейсмическія волны. Первая категорія волнъ, какъ имѣющая бо́льшую поступательную скорость движенія, раньше всего достигаетъ мѣста наблюденія, распространяясь по брахистохроннымъ путямъ, и вызываетъ въ томъ мѣстѣ, гдѣ установлены сейсмографы, опредѣленный горизонтальный сдвигъ элемента поверхности почвы. Пусть проэкція этого максимальнаго истиннаго сдвига почвы отъ перваго импульса продольной волны, по отношенію къ неподвижной системѣ координатъ, въ направленіи меридіана будетъ x_N, а въ направленіи перваго вертикала x_E, причемъ на-

правленіямъ на N и E мы будемъ приписывать знакъ +, а направленіямъ на S и W знакъ —.

Учитывая знаки при этихъ сдвигахъ, мы найдемъ величину угла α по формулѣ

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

Въ случаѣ волны сжатія α будетъ отличаться отъ азимута на эпицентръ на 180°, а въ случаѣ волны разрѣженія α дастъ намъ прямо искомый азимутъ на эпицентръ.

Для избѣжанія всякой двойственности рѣшенія служитъ вертикальный сейсмографъ. Если послѣдній показываетъ, что первое движеніе почвы было направлено кверху, то пришедшая первая продольная волна соотвѣтствовала волнѣ сжатія, если-же книзу, то волнѣ разрѣженія.

Однако, апеによる аперіодическіе горизонтальные маятники съ гальванометрической регистраціей, установленные для регистраціи движеній, совершающихся въ направленіи меридіана и въ направленіи параллели, не даютъ намъ вовсе величинъ истиннаго смѣщенія почвы x_N и x_E. Съ соотвѣтствующихъ сейсмограммъ мы можемъ только снять величины максимальныхъ амплитудъ y_N и y_E сдвига свѣтовой точки отъ ея положенія равновѣсія, которыя соотвѣтствуютъ проэкціямъ сдвига почвы x_N и x_E.

Трудность задачи и заключается именно въ томъ, чтобы отъ измѣренныхъ амплитудъ на сейсмограммахъ перейти къ величинамъ истинныхъ сдвиговъ x_N и x_E.

Зависимость между этими величинами довольно сложная, такъ какъ она обусловливается не только вліяніемъ собственнаго движенія прибора, но и періодомъ падающей продольной волны. Для этой цѣли мною и были даны соотвѣтственныя формулы (l. c.).

Эта задача, однако, можетъ быть въ высшей степени упрощена, если оба маятника, установленные на границѣ аперіодичности, имѣютъ тотъ же самый нормальный періодъ колебаній (при отсутствіи затуханія) и, притомъ равный нормальному періоду колебаній соотвѣтствующихъ гальванометровъ.

Тогда можно, какъ это было мною раньше доказано, обозначая черезъ C_E и C_N характерную постоянную для каждаго изъ этихъ сейсмографовъ, значеніе которой легко заранѣе опредѣлить, замѣнить формулу (1) слѣдующимъ чрезвычайно простымъ выраженіемъ:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{C_E}{C_N} \cdot \frac{y_E}{y_N} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Постоянная C имѣетъ слѣдующее простое значеніе:

$$C = \frac{\pi l}{k A_1}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

гдѣ l есть приведенная длина горизонтальнаго маятника, k значеніе переводнаго множителя при гальванометрической регистраціи, опредѣляющій чувствительность записи сейсмографа, а A_1 длина оптическаго рычага при фотографической регистраціи движенія катушки гальванометра. Эти постоянныя легко можно опредѣлить изъ предварительныхъ наблюденій (см. мои «Лекціи по сейсмометріи». Гл. VII. Опредѣленіе постоянныхъ сейсмографа).

Такимъ образомъ, постоянныя C_E и C_N могутъ считаться величинами извѣстными, и весь вопросъ сводится, такимъ образомъ, только къ измѣренію соотвѣтствующихъ максимальныхъ амплитудъ y_E и y_N прямо на полученныхъ сейсмограммахъ.

При вышепоставленныхъ условіяхъ (равенство всѣхъ періодовъ и граница апеpіодичности для всѣхъ приборовъ) формула (2) является совершенно общей и не связанной вовсе съ какимъ-либо спеціальнымъ предположеніемъ о характерѣ движенія почвы при вступленіи первой продольной волны около фазы P.

Не требуется вовсе, чтобы это движеніе соотвѣтствовало гармоническимъ колебаніямъ, анализомъ которыхъ въ настоящее время обыкновенно и ограничиваются въ сейсмометріи; наоборотъ, это движеніе можетъ быть *совершенно произвольное*, что даетъ возможность для опредѣленія азимута на эпицентръ α использовать разные повторные толчки или максимумы, и изъ полученныхъ такимъ образомъ значеній α взять среднее.

Для болѣе надежнаго опредѣленія α надо, однако, чтобы соотвѣтствующіе сейсмографы обладали достаточной чувствительностью, такъ какъ для дальнихъ землетрясеній горизонтальные импульсы при первой фазѣ P бываютъ иногда довольно слабые, а вмѣстѣ съ тѣмъ всякая неточность въ измѣреніи максимальныхъ амплитудъ y_E и y_N на сейсмограммахъ можетъ значительно отразиться на величинѣ опредѣляемаго азимута α. Въ этомъ отношеніи чрезвычайно подходящими для данной цѣли инструментами являются апеpіодическіе горизонтальные маятники съ гальванометрической регистраціей Пулковскаго образца, чувствительность которыхъ, какъ извѣстно, чрезвычайно велика.

Снявъ съ сейсмограммы моменты перваго вступленія продольныхъ и поперечныхъ волнъ P и S, мы можемъ легко, по разности моментовъ $S-P$ и по таблицѣ Zeissig'a (изданіе Императорской Академіи Наукъ), опредѣлить

эпицентральное разстояніе Δ, а затѣмъ, зная Δ и азимутъ α, легко вычислить и географическія координаты самого эпицентра φ и λ.

Такимъ образомъ, существуетъ полная возможность, при наличіи подходящихъ сейсмографовъ, опредѣлять положеніе эпицентровъ землетрясеній по наблюденіямъ *одной только станціи.*

Этотъ способъ опредѣленія положенія эпицентровъ уже практикуется нѣсколько лѣтъ и притомъ съ полнымъ успѣхомъ на центральной сейсмической станціи въ Пулковѣ. Этотъ же пріемъ введенъ также и на сейсмической станціи въ Eskdalemuir въ Шотландіи, гдѣ имѣется полный комплектъ приборовъ Пулковскаго образца.

Въ статьѣ «Опредѣленіе положенія эпицентра землетрясенія по даннымъ одной сейсмической станціи» (ИАН. 1911 г., стр. 941) я показалъ на большомъ рядѣ примѣровъ, заимствованныхъ непосредственно изъ практики, что этотъ способъ разыскиванія эпицентровъ даетъ, когда первая фаза землетрясенія достаточно отчетливо выражена, въ общемъ весьма надежные результаты.

Конечно, здѣсь не можетъ быть рѣчи о вполнѣ точномъ опредѣленіи положенія эпицентра землетрясенія. Для этого существуетъ нѣсколько причинъ:

Во-первыхъ, эпицентръ землетрясенія не представляетъ собою вовсе какую-либо опредѣленную точку, такъ какъ эпицентръ обыкновенно охватываетъ бо́льшую или меньшую область, имѣющую иногда продолговатую форму, обусловленную наличіемъ какой-либо геотектонической линіи, вдоль которой и произошелъ внезапный сдвигъ горныхъ породъ. Подъ эпицентромъ подразумѣвается, такимъ образомъ, какъ бы середина эпицентральной области.

Во-вторыхъ, современные годографы, служащіе для опредѣленія эпицентральныхъ разстояній Δ по разности моментовъ $S-P$, не вполнѣ точны и требуютъ несомнѣнно дальнѣйшихъ поправокъ и усовершенствованій.

Въ третьихъ, тѣ физическія требованія, предъявляемыя къ данному комплексу приборовъ, а именно точная граница апеAfter ріодичности и равенство всѣхъ нормальныхъ періодовъ, не бываютъ никогда во всей строгости удовлетворены, что должно, конечно, нѣсколько отражаться на результатахъ вычисленія азимута α.

Въ четвертыхъ, малость амплитудъ, а подчасъ и нѣкоторая неясность фазы P, особенно при наличіи значительныхъ микросейсмическихъ колебаній I-го рода, крайне затрудняютъ точное опредѣленіе азимута α, а всякая неточность въ величинѣ этого угла можетъ, при значительныхъ эпицентраль-

ныхъ разстояніяхъ Δ, очень сильно отразиться на величинахъ вычисляемыхъ координатъ φ и λ. Въ этомъ отношеніи, для надежнаго опредѣленія α, въ особенно благопріятныхъ условіяхъ находятся сейсмическія станціи въ Иркутскѣ и Тифлисѣ, которыя отличаются чрезвычайной малостью микросейсмическихъ колебаній I-го рода.

Такимъ образомъ, въ силу вышеприведенныхъ соображеній здѣсь можетъ итти только рѣчь о *приближенномъ* опредѣленіи географическихъ координатъ эпицентра, тѣмъ болѣе, что для дальнихъ землетрясеній ошибка въ 1—2 градуса или даже нѣсколько больше въ величинахъ φ и λ не имѣетъ никакого существеннаго значенія. Мы увидимъ дальше, что точность этого метода, когда первая фаза на сейсмограммахъ достаточно отчетливо выражена, во всякомъ случаѣ совершенно достаточна и полученные этимъ способомъ результаты въ общемъ весьма удовлетворительны.

Удобство этого метода заключается въ томъ, что онъ даетъ возможность найти положеніе эпицентра землетрясенія тотчасъ-же, по наблюденіямъ одной только станціи, и не требуетъ вовсе, какъ въ другихъ примѣняемыхъ въ настоящее время методахъ, — 1) по нѣсколькимъ отдѣльнымъ Δ (сейсмическая тріангуляція) и 2) по методу Zeissig'a (по одному Δ и отдѣльнымъ абсолютнымъ моментамъ P), предварительнаго телеграфнаго сношенія между отдѣльными сейсмическими станціями.

Кромѣ достаточной чувствительности приборовъ и правильной ихъ оріентировки, необходимо еще выполнить условіе, чтобы каждая отдѣльная составляющая движенія почвы записывалась бы совершенно отдѣльнымъ приборомъ, чтобы полученныя записи были совершенно независимы другъ отъ друга. Въ этомъ отношеніи приборы, механически разлагающіе движеніе на двѣ составляющія, являются для данной цѣли значительно менѣе пригодными, такъ какъ, вслѣдствіе всякихъ неизбѣжныхъ конструктивныхъ недочетовъ, нельзя никогда поручиться за то, что записи обѣихъ составляющихъ будутъ совершенно независимы другъ отъ друга.

Хотя многолѣтняя практика Пулковской сейсмической станціи и опубликованные въ еженедѣльныхъ ея бюллетеняхъ результаты въ достаточной мѣрѣ показали, насколько описанный здѣсь методъ опредѣленія эпицентровъ землетрясеній простъ, удобенъ и надеженъ, тѣмъ не менѣе нѣкоторые итальянскіе и нѣмецкіе сейсмологи относятся и по сейчасъ къ этому способу нѣсколько скептически, полагая, что этотъ пріемъ можетъ найти себѣ примѣненіе только въ исключительныхъ случаяхъ и сравнительно рѣдко, когда первая фаза P особенно рѣзко выражена.

Мнѣ кажется, что неудача ихъ въ этомъ отношеніи объясняется исклю-

чительно только тѣмъ, что они не пользовались для данной цѣли подходящими приборами: или чувствительность ихъ была недостаточна, или каждая составляющая не регистрировалась отдѣльнымъ приборомъ.

Утвержденіе, что опредѣленіе эпицентра землетрясенія по наблюденіямъ одной только станціи возможно только въ совершенно исключительныхъ случаяхъ опровергается самымъ нагляднымъ образомъ слѣдующей табличкой, гдѣ для разныхъ годовъ отъ 1912 года по 1915 годъ включительно дано общее число (всякихъ, сильныхъ и слабыхъ) землетрясеній, зарегистрированныхъ на сейсмической станціи въ Пулковѣ, затѣмъ число случаевъ, когда удалось опредѣлить азимутъ α, а, слѣдовательно, зная Δ, найти и географическія координаты эпицентра по наблюденіямъ одной станціи, и, наконецъ, процентное отношеніе этого числа къ общему числу землетрясеній.

Пулково.

Годъ.	Общее число землетрясеній.	Число случаевъ когда опредѣлено α.	% отношеніе.
1912	671	137	20%
1913	576	103	18
1914	475	72	15
1915	454	88	19

Эта таблица показываетъ, что, въ среднемъ, для 18% всѣхъ зарегистрированныхъ землетрясеній, включая въ число послѣднихъ и самыя слабыя, гдѣ отдѣльныя фазы были совершенно неотчетливы, удалось опредѣлить азимуты α, а, слѣдовательно, и координаты эпицентра.

Мы видимъ, такимъ образомъ, что при наличіи подходящихъ приборовъ, опредѣленіе координатъ эпицентровъ по наблюденіямъ одной только станціи является дѣломъ далеко не исключительнымъ, а подчасъ даже совершенно зауряднымъ. Поражаетъ, конечно, и общее число зарегистрированныхъ въ Пулковѣ, вдали отъ всякихъ сейсмическихъ очаговъ, землетрясеній, показывающее наглядно высокую чувствительность установленныхъ тамъ сейсмографовъ.

Кстати можно замѣтить, что часто число случаевъ, когда въ Пулковѣ удавалось опредѣлять прямо положеніе эпицентровъ, превышаетъ даже *общее число* землетрясеній, зарегистрированныхъ нѣкоторыми заграничными станціями.

Изъ всего вышеизложеннаго ясно видно, насколько описанный здѣсь

методъ разыскиванія эпицентровъ землетрясеній является прочно обоснованнымъ.

Однако, важно было убѣдиться, что не только на Пулковской центральной сейсмической станціи, обладающей, какъ извѣстно, особо приспособленнымъ и прекрасно обставленнымъ подземнымъ павильономъ, но и на другихъ сейсмическихъ станціяхъ I-го разряда русской сейсмической сѣти, гдѣ также установлены апе『іодическіе сейсмографы съ гальванометрической регистраціей Пулковскаго образца, опредѣленіе координатъ эпицентра по наблюденіямъ одной только станціи не встрѣчаетъ никакихъ затрудненій.

Постепенная реорганизація сейсмической службы въ Россіи началась нѣсколько лѣтъ тому назадъ и теперь она, за малыми исключеніями, вполнѣ уже закончена. На первоклассныхъ станціяхъ установлены приборы Пулковскаго образца, персоналъ станцій достаточно обученъ и освоился съ практикой сейсмическихъ наблюденій, причемъ, когда первая фаза достаточно отчетлива и микросейсмическія колебанія I-го рода или какія-нибудь другія обстоятельства тому не препятствуютъ, каждая станція совершенно самостоятельно опредѣляетъ координаты эпицентровъ землетрясеній. Данныя эти публикуются въ еженедѣльныхъ бюллетеняхъ соотвѣтствующихъ станцій.

Для оцѣнки пригодности и точности этого новаго метода опредѣленія положенія эпицентровъ землетрясеній важно было сдѣлать сравнительное сопоставленіе результатовъ, даваемыхъ отдѣльными станціями для опредѣленныхъ землетрясеній.

Для этой цѣли я, при содѣйствіи моей ассистентки Н. К. Бобръ, сдѣлалъ выборку наиболѣе характерныхъ землетрясеній, съ отчетливо выраженной фазой P, зарегистрированныхъ различными станціями въ 1914 и 1915 г. г., и сопоставилъ въ нижеприведенной таблицѣ значенія географическихъ координатъ эпицентровъ, даваемыхъ отдѣльными станціями.

Первый столбецъ содержитъ годъ, мѣсяцъ и число, когда наблюдалось землетрясеніе, второй приближенное положеніе эпицентральной области, третій сокращенное названіе соотвѣтствующей сейсмической станціи: Пулково (П.), Екатеринбургъ (Е.), Иркутскъ (И.), Ташкентъ (Тш.), Тифлисъ (Тф.), Макѣевка (М.). Наконецъ, въ четвертомъ и пятомъ столбцахъ даны широта (φ) и долгота (λ) эпицентра землетрясенія.

Годъ, мѣсяцъ и число.	Эпицентральная область.	Станціи.	φ	λ
5 III 1914.	Арменія	П.	37° N	40° E
		Е.	39	42
		Тш.	38	41
		Тф	37	41
12 III 1914.	Фергана	П.	42° N	72° E
		Е.	38	73
		Тш.	40	74
14 III 1914.	Японія	П.	39° N	140° E
		Е.	40	141
		И.	39	138
		Тш.	40	141
		М.	40	140
18 III 1914.	Камчатка	П.	53° N	156° E
		Тш.	53	160
		Тф.	53	158
8 IV 1914.	Тянь-Шань	П.	43° N	75° E
		Е.	39	73
		Тш.	39	72
18—19 V 1914.	Меланезія	П.	1° S	154° E
		Е.	1	150
		И.	5	153
26 V 1914.	Около Новой Гвинеи	П.	0° S	139° E
		Е.	1	141
		И.	1	143
		Тш.	3	140
29 V 1914.	Суматра	П.	1° N	96° E
		Е.	2	100
		Тш.	1	99
25 VI 1914.	Суматра	П.	2° S	100° E
		Е.	2	101
		И.	0	104
		Тш.	3	101
4 VII 1914.	Море къ SE отъ Японіи	П.	20° N	138° E
		Е.	20	137
		Тш.	20	137
6 VII 1914.	Острова Ріу-Кіу	П.	26° N	123° E
		Е.	26	122
		И.	28	124
		Тш.	25	120
4 VIII 1914.	Тянь-Шань	П.	45° N	93° E
		Е.	45	93
		И.	43	91
		Тш.	45	93
		Тф.	43	92

Годъ, мѣсяцъ и число.	Эпицентральвая область.	Станціи.	φ	λ
11/VIII 1914.	Арменія.	П.	39° N	43° E
		Е.	40	41
		Тш.	38	42
14/VIII 1914.	Море къ E отъ Японіи.	П.	32° N	149° E
		Е.	32	147
		И.	33	146
		М.	34	149
9/X 1914.	Гималаи.	П.	36° N	77° E
		Е.	33	77
		И.	34	71
		Тш.	31	75
		Тф.	31	75
		М.	33	74
11/X 1914.	Бенгальскій заливъ.	П.	13° N	95° E
		Е.	13	95
		Тф.	13	93
17/X 1914.	Греція.	П.	39° N	23° E
		Е.	38	23
		Тш.	38	23
		Тф.	38	22
		М.	39	22
22/XII 1914.	Сѣверная Японія.	П.	45° N	143° E
		Е.	47	144
		И.	44	140
		Тш.	42	141
		М.	43	139
5/I 1915.	Къ N'у отъ Формозы.	П.	28° N	122° E
		Е.	28	122
		И.	28	122
13/I 1915.	Средняя Италія, около Авеццано. .	П.	42° N	14° E
		Е.	43	14
		И.	42	13
		Тф.	42	13
10/III 1915.	Целебесъ.	П.	0° S	120° E
		Е.	1 S	120
		И.	1 N	120
		Тш.	3 S	121
17/III 1915.	Около южной оконечности Сахалина.	П.	45° N	144° E
		Е.	46	144
		И.	46	142
		Тш.	43	140
		М.	44	142

Годъ, мѣсяцъ и число.	Эпицентральная область.	Станціи.	φ	λ
18/III 1915.	Абиссинія.	П.	16° N	37° E
		Е.	16	40
		Тш.	17	39
		М.	16	38
30/IV—1/V 1915.	Около береговъ Охотскаго моря. . .	П.	56° N	142° E
		Е.	54	139
		Тш.	57	140
1/V 1915.	Курильскіе острова.	П.	47° N	153° E
		Е.	48	153
		Тф.	43	153
4/VI 1915.	Японія.	П.	41° N	144° E
		Е.	42	144
		Тф.	40	147
22/VI 1915.	Филиппинскіе острова.	П.	11° N	120° E
		Е.	11	123
		Тш.	9	122
3/VIII 1915.	Новая Гвинея.	П.	1° S	131° E
		Е.	2	134
7/VIII 1915.	Іоническое море.	П.	40° N	19° E
		Е.	39	21
		Тф.	39	20
10/VIII 1915, около 1^h.	Іоническое море	П.	39° N	19° E
		Е.	41	20
		Тф.	39	19
11/VIII 1915.	Іоническое море.	П.	40° N	18 E°
		Е.	38	20
		Тф.	39	19
12/X 1915.	Японія.	П.	39° N	145° E
		Е.	38	143
		И.	41	144
		Тш.	43	146
		Тф.	40	146

Разсматривая подробно данныя, приведенныя въ предыдущей таблицѣ, мы видимъ, что согласіе между величинами φ и λ, опредѣленными различными станціями и притомъ совершенно независимо другъ друга, въ общемъ весьма удовлетворительно.

Несмотря на то, что соотвѣтствующія сейсмическія станціи широко раскинуты по территоріи Россійской имперіи и эпицентры изученныхъ зем-

летрясеній лежатъ въ самыхъ разнообразныхъ областяхъ земного шара, какъ то: Іоническое море, Италія, Арменія, Фергана, Абиссинія, Гималаи, Зондскіе острова, Японія, Курильскіе острова, Тихій океанъ и даже Новая Гвинея въ разстояніи, примѣрно, 12000 километровъ отъ Пулкова, отдѣльныя величины географическихъ координатъ этихъ эпицентровъ въ общемъ, за весьма малыми исключеніями, очень хорошо согласуются между собою. Въ иныхъ же случаяхъ согласіе между отдѣльными величинами φ и λ необычайно даже хорошее, напр.: 4/VII 1914 эп. въ морѣ къ SE отъ Японіи, 11/VIII 1914 эп. въ Арменіи, 11/X 1914 эп. Бенгальскій заливъ, 17/X 1914 эп. Греція, 5/I 1915 эп. около Формозы, 13/I 1915 эп. Средняя Италія, 7/VIII, 10/VIII и 11/VIII 1915 эп. Іоническое море и т. п.

Даже для Новой Гвинеи (землетрясеніе 3/VIII 1915 г.) въ такомъ громадномъ разстояніи отъ мѣстъ наблюденій, разница въ долготѣ, опредѣленной по Пулкову и Екатеринбургу, составляетъ всего только 3°, а по широтѣ даже еще меньше, а именно 1°.

Такое согласіе между отдѣльными величинами φ и λ можно разсматривать какъ прямое доказательство полной надежности вышеописаннаго метода опредѣленія положенія эпицентровъ землетрясеній. Разъ, что первая фаза землетрясенія достаточно отчетливо выражена, всякая сейсмическая станція, снабженная подходящими приборами, въ состояніи совершенно самостоятельно и независимо отъ другихъ станцій опредѣлять положеніе эпицентра землетрясенія. Всякія сомнѣнія въ примѣнимости этого метода должны послѣ вышеприведеннаго сопоставленія отпасть.

Несомнѣнно, что этотъ новый методъ въ практикѣ сейсмическихъ наблюденій вполнѣ оправдался и онъ можетъ служить весьма цѣннымъ пріемомъ для розысканія эпицентровъ землетрясеній по наблюденіямъ одной станціи.

Въ заключеніе можно упомянуть еще о слѣдующемъ любопытномъ фактѣ.

1/I 1916 г. было отмѣчено на Пулковской сейсмической станціи очень сильное землетрясеніе въ разстояніи 11610 километровъ. Опредѣливъ соотвѣтствующій азимутъ, координаты соотвѣтствующаго эпицентра получились: $\varphi = 0°$ и $\lambda = 151°$ E въ Меланезіи въ разстояніи 3760 километровъ отъ Sydney'я въ Австраліи. Полученныя впослѣдствіи данныя изъ Sydney'я опредѣляютъ разстояніе этого эпицентра отъ Sydney'я въ 3540 километровъ. Разница всего только 220 километровъ, что составляетъ сравнительно очень малую ошибку ($< 2\%$) по отношенію къ всему громадному разстоянію отъ Пулкова до острововъ Меланезіи.

Несомнѣнно вышеописанный методъ опредѣленія положенія эпицентровъ землетрясеній допускаетъ еще дальнѣйшія усовершенствованія, но это вопросъ будущаго; но и въ своемъ настоящемъ видѣ и при наличіи особо чувствительныхъ сейсмографовъ Пулковскаго образца онъ вполнѣ удовлетворяетъ своему назначенію и можетъ явиться цѣннымъ пособіемъ въ практикѣ сейсмическихъ наблюденій.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef.

Par W. Stekloff (V. Steklov).

(Présenté à l'Académie le 2/15 mars 1916).

1. Il y a presque quinze ans que j'ai attiré, pour la première fois, l'attention sur une propriété remarquable des polynomes de Tchébychef, qui consiste en ce que *toute suite de ces polynomes est fermée* (Voir, par exemple, mon Mémoire «Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébychef etc.», Journ. f. d. reine u. angew. Mathem., Bd. 125, 1902, p. 214).

Je me suis borné alors à l'étude détaillée du cas le plus simple où les limites de l'intervalle (a, b), auquel appartiennent les polynomes de Tchébychef, sont finies, mais j'ai remarqué, déjà dans mon premier travail sur ce sujet, que la même propriété s'étend aussi aux polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef correspondant à la fonction caractéristique

$$(\alpha) \qquad p(x) = Ce^{-\alpha(x+\beta)^2}, \quad \alpha > 0, a = -\infty, b = +\infty,$$

où les limites de l'intervalle (a, b) deviennent infinies.

Dans mes travaux ultérieurs je faisais plusieurs fois usage de cette propriété des polynomes dont il s'agit, ayant le but d'expliquer sa portée pour la solution de plusieurs questions d'Analyse, mais, jusqu'à présent, je n'avais pas l'occasion d'en publier une démonstration.

Cette démonstration est cependant nécessaire, par ce qu'il est impossible d'étendre, sans recherches complémentaires, les résultats, établis pour le cas d'un intervalle à limites finies, à celui où ces limites deviennent infinies.

Je vais compléter la lacune indiquée dans cette Note, en y exposant une démonstration, fondée sur les mêmes considérations élémentaires que je viens d'employer aux quatre premiers n^{os} de ma Note «Quelques remarques

complémentaires relatives à la théorie de fermeture», publiée dans le fascicule précédent de ce Bulletin (le 1 Mars, 1916).

2. Désignons par $\varphi(x)$ une fonction admettant la dérivée $\varphi'(x)$ pour toutes les valeurs réelles de x et satisfaisant à la condition

$$|\varphi(x)| < M, \tag{1}$$

M désignant un nombre fixe.

Désignons par A un nombre positif arbitraire et posons

$$A \cos y = x, \tag{2}$$

où x est une variable comprise entre $-A$ et $+A$, y étant compris entre 0 et π.

Considérons la fonction

$$\Phi(y) = \varphi(A \cos y) = \varphi(x). \tag{γ}$$

On a

$$\frac{d\,\Phi(y)}{dy} = -\frac{d\,\varphi(x)}{dx} A \sin x,$$

d'où

$$\left|\frac{d\,\Phi(y)}{dy}\right| < A M_1, \tag{3}$$

M_1 désignant le maximum de

$$\left|\frac{d\,\varphi(x)}{dx}\right|$$

dans l'intervalle $(-A, +A)$.

Envisageons la suite de fonctions

$$\varphi_0(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_k(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \cos k y \qquad (k = 1, 2, 3 \ldots \tag{4}$$

et posons

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos k y + \rho_n(y), \tag{5}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi(y)\, dy, \qquad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Phi(y) \cos k y\, dy. \tag{6}$$

L'équation (5) conduit tout de suite à l'inégalité

$$\left| \frac{1}{2h} \int\limits_{y-h}^{y+h} \Phi(z)\, dz - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos ky \right| < \frac{\sqrt{S_n(\Phi(y))}}{2\sqrt{h}},$$

où

$$S_n(\Phi(y)) = \int\limits_0^\pi \Phi^2(y)\, dy - \sum_{k=0}^{n} a_k^2.$$

En se rappelant que la suite (4) est fermée[1], c'est à dire

$$\lim_{n=\infty} S_n(\Phi(y)) = 0,$$

on peut écrire

$$(7) \qquad \frac{1}{2h} \int\limits_{y-h}^{y+h} \Phi(y)\, dy = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos ky + R_n(y),$$

où

$$R_n(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos ky.$$

Remarquant que

$$a_k = -\frac{2}{\pi k} \int\limits_0^\pi \frac{d\Phi(y)}{dy} \sin ky\, dy = \frac{b_k}{k},$$

on trouve

$$R_n^2(y) < \frac{1}{h^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{\sin^2 kh \cdot \cos^2 ky}{k^4} <$$

$$< \frac{1}{h} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} \cdot \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 < \frac{1}{hn^2} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 \ [2].$$

---

[1] Voir ma Note «Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture». Bulletin de l'Acad. des Sciences, № 4, le 1 mars 1916.

[2] On peut écrire aussi

$$R_n^2(y) < \frac{1}{h^2 n^3} \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2$$

mais l'inégalité ci-dessus est suffisante pour notre but.

Or,

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2 < \int_0^{\pi} \left(\frac{d\,\Phi(y)}{dy}\right)^2 dy.$$

Par conséquent, en vertu de (3),

$$R_n^2(y) < \frac{\pi A^2 M_1^2}{h n^2}.$$

On a donc, en ayant égard à (7),

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} \Phi(z)\,dz - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos ky\right| < M_1 \sqrt{\pi}\,\frac{A}{n\sqrt{h}}\,[1].$$

D'autre part, il est aisé de s'assurer que

$$\left|\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} \Phi(z)\,dz - \Phi(y)\right| < \frac{M_1}{2} Ah.$$

On en conclut que

$$\left|\Phi(y) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos ky\right| < AM_1\left(\frac{h}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{h}}\right).$$

Si nous introduisons maintenant la variable x, liée avec y par l'équation (2), nous obtiendrons

$$(8)\qquad |\varphi(x) - P_n(x)| < AM_1\left(\frac{h}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{h}}\right),$$

---

[1] On peut arriver au même résultat moyennant l'inégalité

$$S_n(\Phi(y)) < \frac{\int_0^{\pi} \left(\frac{d\,\Phi(y)}{dy}\right)^2 dy}{n^2}$$

qui découle du théorème général du n° 17 de mon Mémoire «Problème de refroidissement d'une barre hétérogène» (Annales de Toulouse, 1901), mais cette voie est très compliquée. La démonstration ci-dessus est, au contraire, fort simple et tout à fait indépendante de la théorie générale des fonctions de Sturm-Liouville.

où

$$(9)\qquad P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \cos \arccos \frac{x}{A}$$

est un polynome en x de degré n.

L'inégalité (8) a lieu pour toute fonction $\varphi(x)$ continue et admettant la dérivée du premier ordre dans l'intervalle $(-A, +A)$, quelle que soit la constante positive h.

3. Désignons maintenant par $f(x)$ une fonction continue pour toutes les valeurs réelles de x et telle que

$$(10)\qquad |f(x)| < M,$$

M désignant un nombre fixe.

Prenons pour $\varphi(x)$ une fonction définie par la formule

$$(11)\qquad \varphi(x) = \frac{1}{\delta} \int_x^{x+\delta} f(z)\, dz,$$

δ étant un nombre positif arbitraire.

D'après l'hypothèse faite au sujet de la fonction $f(x)$, on peut écrire

$$(12)\qquad |f(x+\delta) - f(x)| < \varepsilon(\delta),$$

où $\varepsilon(\delta)$ est une fonction positive de δ s'annulant pour $\delta = 0$.

La fonction $\varphi(x)$, définie par la formule (11), reste continue et admet la dérivée

$$\varphi'(x) = \frac{f(x+\delta) - f(x)}{\delta}$$

qui, en vertu de (12), satisfait à la condition

$$(13)\qquad |\varphi'(x)| < \frac{\varepsilon(\delta)}{\delta} = M_1.$$

On a, en outre,

$$(14)\qquad |\varphi(x) - f(x)| < \varepsilon(\delta).$$

Appliquant l'inégalité (8) à la fonction $\varphi(x)$, définie par l'équation (11), on trouve, en tenant compte de (13) et (14),

$$(15)\qquad |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon(\delta)\left(1 + \frac{A}{\delta}\left(\frac{h}{2} + \frac{\sqrt{\pi}}{n\sqrt{h}}\right)\right).$$ [1]

Cette inégalité a lieu pour toutes les valeurs de x comprises entre — A et + A et pour toute fonction continue f(x), quels que soient les nombres positifs A, δ, h et l'entier n.

4. Cela posé, considérons la suite de polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef correspondant à la fonction caractéristique $p(x)$, définie par l'équation (α).

Il est aisé de comprendre qu'on peut poser, sans restreindre la généralité,

$$C = 1, \quad \alpha = 1, \quad \beta = 0.$$

Considérons, de la sorte, la suite de polynomes

$$\varphi_0(x), \quad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_k(x), \ldots$$

définis par les conditions

$$(16)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi_k(x)\,P_{k-1}(x)\,dx = 0, \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\varphi_k^2(x)\,dx = 1, \end{cases} \qquad (k = 0, 1, 2\ldots)$$

$P_{k-1}(x)$ désignant un polynome arbitraire de degré $\leqq k-1$.

Désignons par

$$\varphi(x) \quad \text{et} \quad \psi(x)$$

---

[1] L'inégalité (15) peut être remplacée par une autre d'une forme un peu plus simple, à savoir:

$$(\delta)\qquad |f(x) - \Pi_n(x)| < \varepsilon(\delta)\left(1 + L\,\frac{A}{n\delta}\right),$$

L désignant une constante numérique, $\Pi_n(x)$ un autre polynome, différent du polynome $P_n(x)$.

L'inégalité (δ) se déduit d'un théorème de M. D. Jackson, établi dans sa Thèse de doctorat en 1911 (Voir aussi son Article «On approximation by trigonometric sums and polynomials», Transactions of the american mathemat. society, Vol. XIII. nº 4, 1912).

Mais il est inutile de recourir à ce théorème, parce que la démonstration seule de l'existence du polynome $\Pi_n(x)$, satisfaisant à l'inégalité (δ), est déjà plus compliquée que celle de l'inégalité (15).

Remarquons, en outre, que le polynome $P_n(x)$ de notre inégalité a une forme très simple, complétement déterminée par l'équation (9), tandis que la construction effective du polynome $\Pi_n(x)$ est très difficile.

deux fonctions quelconques et posons

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, \varphi_k(x) + \rho_n(x),$$

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n} B_k\, \varphi_k(x) + R_n(x),$$

où

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \varphi(x)\, \varphi_k(x)\, dx,$$

$$B_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, \psi(x)\, \varphi_k(x)\, dx. \qquad (k = 0, 1, 2\ldots)$$

Répétant textuellement les raisonnements du n° 6 de mon Mémoire «Sur la théorie de fermeture etc.» (Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg, Cl. Ph. M., VIII s., T. XXX, n° 4, 1911), on trouve

$$(17) \qquad \sqrt{S_n(\varphi(x))} \leqq \sqrt{S_n(\psi(x))} + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (\varphi(x) - \psi(x))^2\, dx},$$

où l'on a posé, en général,

$$S_n(F(x)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} C_k^2, \qquad C_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F(x)\, \varphi_k(x)\, dx.$$

L'inégalité (17) a lieu pour toutes les fonctions $\varphi(x)$ et $\psi(x)$, pourvu que les symboles, qui y figurent, aient un sens déterminé.

Appliquons cette inégalité aux fonctions

$$\varphi(x) = f(x), \quad \psi(x) = P_n(x),$$

où $f(x)$ et $P_n(x)$ sont précisément les fonctions qui entrent dans l'inégalité (15).

Dans ce cas, on trouve

$$(18) \qquad \sqrt{S_n(f(x))} \leqq \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} (f(x) - P_n(x))^2\, dx},$$

puisque, en vertu de (16),

$$S_n\,(P_n(x)) = 0.$$

5. Écrivons l'intégrale du second membre de l'inégalité (18) sous la forme

$$K^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,(f(x) - P_n(x))^2\,dx =$$

(19)

$$= \int_{-A}^{+A} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx + \int_{A}^{\infty} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx + \int_{-\infty}^{-A} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx,$$

où

$$F_n(x) = f(x) - P_n(x)$$

et A désigne une constante positive arbitraire.

On peut écrire, en ayant égard à (15),

$$\int_{-A}^{+A} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx < \sqrt{\pi}\,\varepsilon^2(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{n\delta\sqrt{h}}\right)^2. \tag{20}$$

D'autre part, il est évident que, en vertu de (10),

$$\int_{A}^{\infty} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx < 2\int_{A}^{\infty} e^{-x^2}(f^2(x) + P_n^2(x))\,dx <$$

$$< \frac{M^2}{A}\,e^{-A^2} + 2\int_{A}^{\infty} e^{-x^2} P_n^2(x)\,dx,$$

$$\int_{-\infty}^{-A} e^{-x^2} F_n^2(x)\,dx < 2\int_{A}^{\infty} e^{-x^2}\Big(f^2(-x) + P_n^2(-x)\Big)\,dx <$$

$$< \frac{M^2}{A}\,e^{-A^2} + 2\int_{A}^{\infty} e^{-x^2} P_n^2(-x)\,dx.$$

Ces inégalités, celle de (20) et la formule (19) conduisent à l'inégalité suivante

$$(21)\qquad K^2 < \frac{2M^2}{A} e^{-A^2} + \sqrt{\pi}\,\varepsilon^2(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{\sqrt{\pi}A}{n\delta\sqrt{h}}\right)^2 + K_1^2,$$

où l'on a posé

$$(22)\qquad K_1^2 = 2\int_A^\infty e^{-x^2}\left(P_n^2(x) + P_n^2(-x)\right)dx.$$

6. Cherchons une limite supérieure du polynome $P_n(x)$ pour les valeurs de x en dehors des limites $-A$ et $+A$[1].

L'équation (9) peut s'écrire

$$(23)\qquad P_n(x) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin kh}{kh} \frac{(x+\sqrt{x^2-A^2})^k + (x-\sqrt{x^2-A^2})^k}{A^k}.$$

On a

$$\left|(x+\sqrt{x^2-A^2})^k + (x-\sqrt{x^2-A^2})^k\right| < 2\,.\,2^k x^k$$

pour toute valeur positive de x plus grande ou égale à A.

D'autre part, en vertu de (6),

$$\frac{1}{2}\left|a_k \frac{\sin kh}{kh}\right| < M,$$

puisque, d'après (γ), (10) et (11), la fonction $\Phi(y)$ satisfait à la condition (1)

$$|\varphi(x)| = |\Phi(y)| < M.$$

---

[1] On pourrait employer, pour ce but, le théorème bien connu de Tchébychef, énoncé, en 1875, dans sa Note «Sur la limite du degré de la fonction entière qui satisfait à certaines conditions» (Oeuvres, T. II, St.-Pétersbourg, 1907. p. 701), mais dans le cas considéré il est plus simple de déduire le résultat cherché immédiatement de l'équation (9) (n⁰ 2), qui définit le polynome $P_n(x)$.

C'est une autre chose, si l'on veut prendre pour point de départ l'inégalité (δ) (Voir la remarque au n⁰ 3) au lieu de celle de (15). Dans ce cas l'emploi du théorème de Tchébychef serait indispensable, car le calcul immédiat de la limite supérieure du polynome $\Pi_n(x)$, pour les valeurs de x en dehors de l'intervalle $(-A, +A)$, offre des difficultés très grandes.

Par conséquent, en vertu de (23),

$$|P_n(x)| < 2M \sum_{k=0}^{n} \lambda^k, \qquad \lambda = \frac{2x}{A}.$$

Or

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda^k = \frac{\lambda^{n+1}-1}{\lambda-1} < \frac{\lambda}{\lambda-1}\lambda^n < 2\lambda^n,$$

car

$$\lambda = \frac{2x}{A} \geqq 2 \qquad \text{pour } x \geqq A.$$

On a donc

$$(\delta) \qquad |P_n(x)| < 4M\left(\frac{2x}{A}\right)^n \qquad \text{pour } x \geqq A.$$

On s'assurera de la même manière que

$$(\delta') \qquad |P_n(-x)| < 4M\left(\frac{2x}{A}\right)^n \qquad \text{pour } x \geqq A.$$

Ces inégalités conduisent, à l'aide de (22), à l'inégalité suivante

$$(24) \qquad K_1^2 < 64\,\frac{M^2\,2^{2n}}{A^{2n}} \int_A^\infty e^{-x^2} x^{2n}\,dx.$$

7. Considérons l'intégrale

$$I = \int_A^\infty e^{-x^2} x^{2n}\,dx = \frac{e^{-A^2}}{2A} \int_0^\infty e^{-t}\,(t+A^2)^n\,dt.$$

On trouve

$$I = \frac{e^{-A^2}}{2A} \sum_{s=0}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{s!} A^{2s} \int_0^\infty e^{-t}\,t^{n-s}\,dt =$$

$$= \frac{e^{-A^2}\,\Gamma(n+1)}{2A} \sum_{s=0}^{n} \frac{A^{2s}}{s!} < \frac{\Gamma(n+1)}{2A}.$$

Par conséquent, en vertu de (24),

$$K_1^2 < 32 M^2 \frac{4^n \Gamma(n+1)}{A^{2n+1}} < 32 M^2 e^{\frac{1}{12n}} \sqrt{2\pi}\, \frac{4^n n \sqrt{n}}{e^n A^{2n+1}} <$$

$$< L \frac{4^n n \sqrt{n}}{e^n A^{2n+1}},$$

où l'on peut poser

$$L = 32 e M^2 \sqrt{2\pi}.$$

Moyennant cette inégalité ainsi que celle de (21) *on arrive à l'inégalité suivante*

$$(25) \qquad K^2 < \frac{2M^2}{A} e^{-A^2} + \sqrt{\pi}\, \varepsilon^2(\delta) \left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{n\delta\sqrt{h}}\right)^2 + L \frac{4^n n^n \sqrt{n}}{e^n A^{2n+1}},$$

ayant lieu pour toutes les valeurs positives des constantes A, h, δ et de l'entier n.

8. Disposons maintenant les constantes A, h et δ de la manière suivante.

Faisons, par exemple,

$$\delta = Ah, \quad nh^{3/2} = 1, \quad A = 2\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{2}{3}},$$

c'est à dire

$$A = 2\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{2}{3}}, \quad h = \frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}, \quad \delta = \frac{2}{(\log n)^{\frac{1}{3}}}.$$

Les constantes A, h et δ, ainsi choisies, jouissent les propriétés suivantes: A croît indéfiniment, tandis que h et δ tendent vers zéro, lorsque n tend vers l'infini.

Substitutions ces expressions de A, h et δ dans (25).

On trouve

$$\omega(n) = \frac{4^n n^n \sqrt{n}}{e^n A^{2n+1}} = \frac{1}{2} \frac{(\log n)^{\frac{2}{3}(2n+1)}}{e^n n^{\frac{2n+1}{6}}} = \frac{1}{2e^n} \left(\frac{\log^2 n}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{2n+1}{3}}$$

Il est évident que $\omega(n)$ tend vers zéro, lorsque n croît indéfiniment.

Il existe donc un entier $n = n_0$, assez grand, tel que

$$L\omega(n) < \frac{\varepsilon^2}{3^2} \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

ε désignant un nombre positif donné à l'avance.

Il est évident ensuite qu'on peut prendre pour n_0 un entier tel qu'on ait, en même temps,

$$\sqrt{\pi}\,\varepsilon^2(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{n\delta\sqrt{h}}\right)^2 < 20\varepsilon^2(\delta) < \frac{\varepsilon^2}{3^2} \qquad \text{pour } n \geqq n_0$$

et

$$\frac{2M^2}{A} e^{-A^2} < \frac{\varepsilon^2}{3^2} \qquad \text{pour } n \geqq n_0.$$

Le nombre n_0 étant choisi de la manière indiquée, on trouve, en tenant compte de (25),

$$K^2 < \varepsilon^2 \quad \text{pour } n \geqq n_0$$

et, par suite, en vertu de (18) et (19),

$$S_n(f(x)) < \varepsilon^2 \quad \text{pour } n \geqq n_0.$$

En d'autres termes, *l'équation de fermeture*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty} A_k^2,$$

où

$$A_k = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f(x)\,\varphi_k(x)\,dx,$$

a toujours lieu pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef, quelle que soit la fonction $f(x)$, continue pour toutes les valeurs réelles de x, si son module ne surpasse pas un nombre fixe M.

9. Il est aisé de comprendre que cette dernière restriction n'a rien d'essentiel et que *l'équation de fermeture subsiste pour toute fonction continue $f(x)$, pourvu que l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} f^2(x)\,dx \tag{26}$$

ait un sens déterminé.

Désignons, comme précédemment, par A un nombre positif arbitraire, par M le maximum de

$$|f(x)|$$

dans l'intervalle $(-A, +A)$.

Prenons une autre fonction continue $\varphi(x)$ satisfaisant aux conditions

$$\varphi(x) = f(x) \quad \text{pour } -A \leqq x \leqq A,$$
$$|\varphi(x)| < M \quad \text{pour } A < x < -A$$

et faisons dans l'inégalité (17)

$$\varphi(x) = f(x), \qquad \psi(x) = \varphi(x).$$

On trouve

$$\sqrt{S_n(f(x))} \leqq \sqrt{S_n(\varphi(x))} + \sqrt{\int_{-\infty}^{-A} e^{-x^2} F^2(x)\, dx + \int_{A}^{+\infty} e^{-x^2} F^2(x)\, dx.}$$

On peut toujours choisir le nombre A si grand qu'on ait

$$\int_{-\infty}^{-A} e^{-x^2} F^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}, \qquad \int_{A}^{+\infty} e^{-x^2} F^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Le nombre A étant ainsi fixé, on peut ensuite choisir le nombre n de façon qu'on ait

$$S_n(\varphi(x)) < \frac{\varepsilon^2}{4},$$

car la fonction $\varphi(x)$ satisfait à toutes les conditions du théorème du n^0 précédent.

De cette manière on arrive à l'inégalité

$$S_n(f(x)) < \varepsilon^2 \quad \text{pour } n \geqq n_0,$$

ayant lieu pour toute fonction satisfaisant aux conditions indiquées au début de ce n^0.

10. L'inégalité (27) étant établie pour toute fonction continue, *il est aisé d'étendre le résultat obtenu à toute fonction $f(x)$, assujettie à la seule condition d'être intégrable entre les limites $-\infty$ et $+\infty$.*

Soit maintenant $f(x)$ une telle fonction.

Reprenons la fonction auxiliaire

$$\varphi(x) = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(x)\, dx.$$

Appliquant l'inégalité (17) aux fonctions

$$\varphi(x) = f(x), \qquad \psi(x) = \varphi(x),$$

on peut écrire

(28) $$\sqrt{S_n(f(x))} \leqq \sqrt{S_n(\varphi(x))} + \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} F^2(x)\, dx},$$

où, comme précédemment,

$$F(x) = f(x) - \varphi(x).$$

Il est évident qu'on peut toujours choisir un nombre positif A de façon qu'on ait

$$\int_{-\infty}^{-A} e^{-x^2} F^2(x)\, dx + \int_{A}^{\infty} e^{-x^2} F^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Le nombre A étant fixé de la manière indiquée, l'inégalité (28) devient

(29) $$\sqrt{S_n(f(x))} \leqq \sqrt{S_n(\varphi(x))} + \sqrt{\int_{-A}^{+A} e^{-x^2} F^2(x)\, dx + \frac{\varepsilon^2}{8}}.$$

Cela posé, il ne nous reste qu'à répéter textuellement les raisonnements du n^0 7 de mon Mémoire «Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales etc.», cité plus haut, pour s'assurer qu'on peut choisir le nombre h, indépendant de A, de manière qu'on ait

$$\int_{-A}^{+A} e^{-x^2} F^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Remarquant, enfin, que la fonction $\varphi(x)$ reste continue, on peut écrire, d'après le théorème du n^0 précédent (l'inégalité (27)),

$$S_n(\varphi(x)) \leqq \frac{\varepsilon^2}{4} \qquad \text{pour } n \geqq n_0.$$

Moyennant ces inégalités on tire de (29)

(30) $$S_n(f(x)) < \varepsilon^2 \quad \text{pour } n \geqq n_0,$$

l'inégalité ayant lieu pour toute fonction $f(x)$, intégrable entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, et, comme cela découle de la nature même du problème, telle que l'intégrale (26) ait un sens déterminé.

L'inégalité (30) montre que *la suite de polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef est une suite fermée.* C. Q. F. D.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О Маржелановскомъ „пахучемъ“ доломитѣ.

Н. Шадлуна.

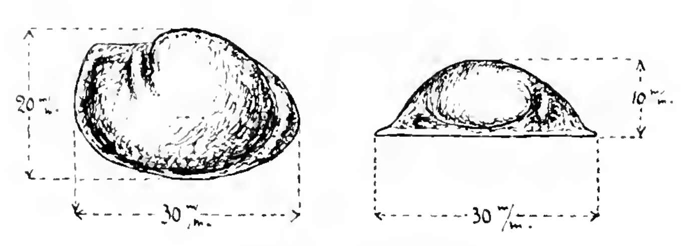
(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 27 января 1916 г.).

Лѣтомъ 1914 года, во время производства геологическихъ работъ въ дачахъ Уфалейскихъ заводовъ на Уралѣ, мною были между прочими посѣщены ломки Маржелановскаго доломита. Два довольно большихъ искусственныхъ обнаженія саженяхъ въ 20 одно отъ другого находятся на лѣвомъ берегу рѣки Мерзелы близъ впаденія ея въ р. Уфу, и отстоятъ отъ Нижне-Уфалейскаго завода въ 6 верстахъ къ западу. Добыча доломита производится для нуждъ мѣстныхъ металлургическихъ заводовъ. Карьеръ представляетъ собою сравнительно большое углубленіе, открытое для въѣзда къ западу и обрывистое по сѣверному, восточному и южному бортамъ. Здѣсь вскрыты темно-сѣрые, порой почти черные слои «пахучаго» доломита, измятые въ слабыя мелкія складки. Въ совокупности эти складки производятъ впечатлѣніе волнистаго залеганія съ довольно выдержаннымъ общимъ простираніемъ и паденіемъ пластовъ. Измѣренія дали азимутъ паденія NO отъ 0° до — 15° и уголъ паденія отъ 20° до 30°. Слоеватость рѣзко выражена и порода представляетъ пачку болѣе плотныхъ пропластковъ мощностью отъ полувершка до 4 вершковъ каждый, разъединенныхъ сравнительно слабыми прослойками въ 0,5—2 см. толщиною.

Доломитъ перекристаллизовался нацѣло и слѣды переполнявшей его фауны слабо сохраняются въ видѣ неясныхъ бѣловатыхъ контуровъ. Несмотря на осторожную препарировку, порода обычно колется по произвольнымъ направленіямъ и не позволяетъ точно уловить форму этихъ бѣловатыхъ

поверхностей бывшихъ окаменѣлостей. Все же намѣчаются два типа организмовъ участвовавшихъ въ образованіи даннаго пласта.

Во-первыхъ видны многочисленныя раковины, изъ которыхъ нѣкоторыя относятся къ ракообразнымъ, причемъ размѣры индивидовъ послѣднихъ порой доходятъ до $1-1\frac{1}{4}$ дюйма. Такимъ, напримѣръ, оказался одинъ экземпляръ *Leperditia*, расчищенный съ большимъ трудомъ настолько, что поддается сличенію съ описанными въ литературѣ образцами.



Leperditia Cf. Lindstroemi.

Размѣры раковины: $30 \times 20 \cdot 10$ миллиметровъ. Складка на лѣвой сторонѣ створки и выражена весьма отчетливо. На прилагаемомъ рисункѣ (въ натуральную величину) видны общая форма и размѣры створки.

Изъ приводимаго въ монографіи Ѳ. Шмидта[1] ряда *Leperditia*, работами О. И. Чернышева[2], А. Штукенберга[3], Барботъ-де-Марни[4], Меллера и др., для западнаго склона Урала констатированы собственно двѣ болѣе или менѣе крупныя формы: *Leperditia Barbotana* и *Lep. Moelleri.* Кромѣ того А. Штукенбергъ упоминаетъ о находкѣ *Lep. sp.*, опредѣленіе которой онъ не производилъ и матеріалъ передалъ академику Ѳ. Шмидту.

Сравнивая настоящій экземпляръ съ соотвѣтственными фотографіями Ѳ. Шмидта, нужно сказать, что онъ значительно отличается отъ упомяну-

---

[1] Schmidt F. *Miscellanea silurica.* III. Nachtrag zur Monographie der Russischen Silurischen Leperditien. ЗАН., VII Серія. Т. XXXI. № 5. стр. 22 — *Leperditia Barbotana*, стр. 23 — *Leperditia Mollerei.*

[2] О. И. Чернышевъ. Общая геологическая карта Россіи. Листъ 139. Труды Геологическаго Комитета. Т. III. № 4.

[3] А. Штукенбергъ. Общая геологическая карта Россіи. Листъ 138. Труды Геологическаго Комитета. Т. IV. № 2, стр. 65 — *Lep. Barbotana*, стр. 66 — *Lep. Moelleri*, стр. 67 — *Lep. sp.* (найдена Б.-де-Марни) — устье р. Кубы. Обнаженіе это по О. Чернышеву — D_1^2, а по Штукенбергу D_2^1.

[4] Барботъ-де-Марни. Геогностическія наблюденія въ округѣ Сергинскихъ горн. зав. на Уралѣ. «Горн. Журн.» 1862 г. Ч. I, стр. 53—80, на стр. 66 упоминается о *Cytherinae* (*Leperditia*) до 1 дюйма размѣрами.

тыхъ двухъ *Leperditia* и скорѣе приближается къ виду *Leperditia Lindstroemi*.

Близкія къ ней формы Урала *Lep. Barbotana* и *Lep. Moelleri*, Ѳ. Шмидтъ относилъ къ силуру, но О. Чернышевъ доказалъ принадлежность ихъ къ нижнему девону (D_1^2). А. Штукенбергъ упоминаетъ еще о *Lep. sep.* относимый къ среднему девону (D_2^1).

Второй типъ остатковъ — довольно густая щетка трубчатыхъ индивидовъ, представляющихъ собою повидимому мшанокъ (*Amphipora Cf. ramosa*).

На основаніи вышеприведенныхъ данныхъ можно съ увѣренностью сказать, что возрастъ породы не моложе средняго девона (D^1_2).

На приготовленномъ тонкомъ препаратѣ (толщина шлифа около 0,025 mm.), если его разсматривать безъ увеличенія или въ лупу съ увеличеніемъ въ 5—6 разъ, ясно видны контуры мелкихъ окаменѣлостей размѣрами около 1—1½ mm. въ поперечномъ сѣченіи. Вдоль разрѣзанные остатки имѣютъ до 6 mm. Вещество ихъ выдѣляется своимъ свѣтлымъ цвѣтомъ среди темно-сѣраго промежуточнаго пространства.

Подъ микроскопомъ шлифъ представляетъ полно-кристаллическую породу, состоящую почти исключительно изъ карбоната (весьма высокое двупреломленіе, одноосность, сильный рельефъ). Причемъ, въ мѣстахъ отвѣчающихъ упомянутымъ свѣтлымъ пятнамъ бывшихъ организмовъ, карбонатъ обладаетъ лучшей прозрачностью и бо́льшими размѣрами зеренъ, до 1 mm., тогда какъ въ промежуточномъ пространствѣ — около 0,2 mm. и менѣе. Изрѣдка наиболѣе крупныя зерна несутъ на себѣ двойниковую полосчатость. Вообще же какъ на нихъ, такъ и на мелкихъ кристаллахъ двойники отсутствуютъ. Спайность по ромбоэдру и выражена рѣзко; сильная псевдоабсорбція.

Въ то время какъ мѣста бывшихъ окаменѣлостей т. е. крупныя зерна карбоната имѣютъ въ простомъ свѣтѣ только небольшую буроватую окраску, тѣло мелкихъ кристалловъ и промежутки между ними затянуты густой пеленой пылеобразнаго красящаго вещества, доводящей порой зерна до темнобурыхъ пятенъ. Однородность погасанія кристалловъ въ скрещенныхъ николяхъ не нарушается однако и въ этомъ случаѣ [1].

По внѣшнему виду доломитъ представляетъ темносѣрую средне-зернистую кристаллическую массу. Изрѣдка попадаются полости бывшихъ ра-

---

[1] При нагрѣваніи препарата во время склеиванія канадскимъ бальзамомъ возможно нѣкоторое выдѣленіе породой газообразныхъ веществъ.

ковинъ, выполненныя прозрачнымъ доломитомъ въ крупныхъ ромбоэдрахъ. Интересно, что упоминаемыя А. Штукенбергомъ, а также встрѣченныя въ текущемъ 1915 году нашими работами въ Сергинскомъ округѣ, обнаженія съ болѣе или менѣе крупными *Leperditia* всѣ находились въ темносѣрыхъ и черныхъ «известнякахъ» (доломитахъ? Н. Ш.), напоминающихъ Маржелановскій доломитъ «В.-Уф. III. 96».

Мощность свиты трудно указать съ точностью, такъ какъ кругомъ наблюдается сглаженный легко-увалистый рельефъ и коренныя породы скрыты подъ наносами. Въ карьерахъ обнажена толща около 2 саженъ.

Изъ геологическихъ факторовъ необходимо отмѣтить сильное отклоненіе простиранія пластовъ по сравненію съ немного сѣвернѣе (2—3 версты) отсюда лежащими известняками Маржелановскихъ бурожелѣзняковыхъ рудниковъ гдѣ азимутъ паденія NO — 66°—80°; ∠ 19°. Такое измѣненіе элементовъ залеганія вызываетъ мысль о возможности прохожденія гдѣ-нибудь по близости большого дислокаціоннаго направленія. Тѣмъ болѣе что къ NW отсюда въ Нязя-Петровской дачѣ изслѣдованія О. И. Чернышева въ 1884 году и В. В. Никитина въ 1909 году констатировали геологическіе признаки большого сброса O — W-аго направленія.

Кромѣ того недалеко (верстахъ въ 2-хъ) къ востоку отъ доломитовыхъ разработокъ выступаетъ уже массивъ изверженной породы (гранитъ).

Въ свѣжемъ изломѣ доломитъ издаетъ ясный запахъ сѣроводорода (H_2S)[1]. Химическое изслѣдованіе одного болѣе или менѣе средняго образца (В.-Уф. III 96) дало слѣдующіе результаты.

SiO_2	0,14%	
SO_3	0,17 »	
CO_2	47,29 »	
CaO	31,02 »	
MgO	21,08 »	99,70%
H_2S	0,29 »	

Анализъ исполненъ при Химической Лабораторіи Горнаго Института горнымъ инженеромъ П. Я. Салдау. При раствореніи анализируемаго порошка на поверхности раствора всплываетъ слой чернаго смолистаго ве-

[1] Очень хорошо улавливается запахъ H_2S при шлифованіи. Для этого достаточно хорошо потереть небольшимъ кусочкомъ породы по орошенному водой обыкновенному точильному бруску.

щества. Качественная проба на сѣроводородъ (H_2S) производилась разложеніемъ породы соляной кислотой (HCl), причемъ кромѣ характернаго запаха. H_2S пробовался свинцовой бумажкой въ парахъ раствора. Бумажка чернѣла отъ образующагося PbS.

Количественное содержаніе H_2S пропорціонально исчислено по разности между количествомъ всей сѣры (S) и сѣры, связанной въ видѣ ангидрида (SO_3). Общее содержаніе сѣры опредѣлялось по способу Fresenius'a [1]. Навѣска 0,5 грамма. Сѣрный ангидридъ осаждался въ видѣ $BaSO_4$ изъ солянокислаго раствора послѣ удаленія сѣроводорода кипяченіемъ. Навѣска 2,00 грамма.

Хотя въ приведенномъ анализѣ доломита эта сѣра указана въ видѣ H_2S, все же трудно съ опредѣленностью сказать въ какомъ именно видѣ находится сѣроводородъ въ самой породѣ. Возможно, что присутствуетъ здѣсь CaS, MgS или FeS. Но нельзя отрицать и нѣкоторой доли его въ абсорбированномъ состояніи. Если предположить сѣру какъ CaS, то получимъ такое соотношеніе частей:

	Нормальный доломитъ.	Испытуемое вещество.	Эквивалентныя количества.	
SiO_2	—	0.11%	0,002	0.004
SO_3	—	0.17 »	0,002	0.001
CO_2	47,83%	47,29 »	1,087	2,000
CaO	30.43 »	30,51 »	0.546	1,001
MgO	21.74 »	21,08 »	0,527	0,970
CaS	—	0.61 »	0.008	0,015
—	100,00%	99,83%	—	—
S	—	0.34 »	—	—

Что касается минеральнаго состава всей породы, то прежде всего несомнѣнно, что кальцій, магній и угольный ангидридъ главными своими количествами объединены въ доломитъ. Параллельно съ анализомъ испытуемаго вещества выше приведенъ процентный составъ теоретическаго доломита по формулѣ $CaMg(CO_3)_2$. Сопоставленіе этихъ двухъ столбцовъ свидѣтельствуетъ, что наша порода отвѣчаетъ нормальному доломиту, причемъ составъ ея выразится:

[1] Tredwell, стр. 253.

$Ca.Mg.[CO_3]_2$	98,6%
Примѣси	1,4%
	100,00%

Составъ и количество минераловъ-примѣсей поддается различнымъ толкованіямъ. Необходимо лишь упомянуть, что глиноземъ (Al_2O_3) равно какъ и окислы желѣза (FeO, Fe_2O_3), не опредѣлялись, но присутствіе ихъ въ небольшихъ количествахъ вполнѣ допустимо. Кромѣ того въ число примѣсей вошли — 0,45% CaO и 0,20 CO_2.

Наконецъ природа и количество органическихъ веществъ, входящихъ въ составъ данной породы, остаются не установленными и требуютъ самостоятельной обработки.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Изслѣдованія надъ созрѣваніемъ сѣмянъ.

I.

А. Благовѣщенскаго.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Созрѣваніе сѣмянъ изучено въ настоящее время еще чрезвычайно недостаточно и вся литература вопроса сводится къ сравнительно очень небольшому числу работъ, посвященныхъ превращенію той или другой отдѣльной группы химическихъ соединеній[1]. Между тѣмъ процессъ созрѣванія, безусловно, весьма интересенъ, въ особенности благодаря тому, что при немъ громадное значеніе имѣютъ синтетическія реакціи, проявляющіяся

---

[1] Зольныя вещества. Arendt. Landw. Vers.-St. **1**. 50, 1860; Amthor. Zeitschr. Physiol. Ch. **6**, 227. 1882; Portele. Landw. Vers.-St. **32**, 211, 1885; André. Comptes Rendus **139**, 805, 1904; Wolff. Aschenanalyse, т. 1, стр. 27. 55, 117.

Азотистыя соединенія. Brimmer и Kellermann. Landw. Jahrbüch. 1876; Emmerling. Landw. Vers.-St. **24**, 1880; **34**, 1887; **54**, 1900; Hornberger, тамъ же, **31**, 1885; Недокучаевъ. Land. Vers.-St. **56**, 1902; **58**, 1904; Изв. Моск. С.-Х. Инст. 1899; Журн. Оп. Агр. **3**, 1902; Н. Н. Васильевъ. Изв. Кіевс. Полит. Инст. Отд. Хим.-Агр. 1910 (Здѣсь же списокъ прежнихъ работъ автора); В. Залѣсскій. Ber. Bot. Ges. **23**, 1905; Beih. Bot. Centralbl. I, **27**, 1911; E. Schulze. Landw. Jahrbüch. **35**, 1906; Zeitschr. physiol. Ch. **71**, 1911; Schulze и Winterstein. Тамъ же **65**, 1910; Pfenninger. Ber. Bot. Ges. **27**, 1909.

Углеводы. Lucanus. Landw. Vers.-St. **4**, 1862; Storer и Lewis. Centrlbl. Agrik.-Ch. 1879; A. Müntz. Ann. Sc.-nat. [7] Bot. **3**. 1886; Jessen-Hansen. Centralbl. Agrik.-Ch. **26**, 1897; Portele. Landw. Vers.-St. **32**, 1885; Tanret. Comptes Rendus **112**, 293, 1891.

Жиры. Meyen. Neues System d. Pflanzen phys. **2**, 293, 1838; Leclerc du Sablon. Comp. Ren. **123**, 1084, 1896; С. Иванов. Ber. Bot. Ges. **29**, 1911; Beih. bot. Centr. **28**, I, 1912; M. Korsakow. Comptes Rend. **155**, 1162, 1912.

въ связи съ накопленіемъ запасныхъ питательныхъ веществъ. Детальное изслѣдованіе этихъ реакцій имѣетъ особенное значеніе съ точки зрѣнія ученія объ обратимости дѣйствія ферментовъ. Эта, сравнительно еще очень молодая, отрасль энзимологіи основывается уже на большомъ количествѣ блестящаго экспериментальнаго матеріала, но, до сихъ поръ, остается почти исключительно на чисто химической почвѣ, не переходя въ область физіологіи. О синтетическихъ процессахъ въ организмахъ и факторахъ ими управляющихъ все еще приходится заключать только по аналогіи съ тѣмъ, что наблюдается in vitro, часто въ совершенно искусственныхъ условіяхъ. Конечно, эти аналогіи имѣютъ за себя часто очень многое и могутъ быть приняты безъ особыхъ затрудненій, но все же необходимы прямыя доказательства. Послѣднія же могутъ быть доставлены только тщательнымъ изученіемъ тѣхъ явленій въ жизни организмовъ, въ которыхъ синтетическая дѣятельность преобладаетъ надъ разрушительной. Опредѣленія измѣняющагося во времени химическаго состава и установленіе закономѣрныхъ связей между этими измѣненіями и присутствіемъ соотвѣтствующихъ ферментовъ— вѣрнѣйшій путь такого изученія.

Въ растительномъ мірѣ синтетическіе процессы яснѣе всего (не говоря объ усвоеніи углекислоты зелеными листьями) проявляются въ созрѣвающихъ сѣменахъ, отлагающихъ запасы различныхъ сложныхъ соединеній (бѣлки, крахмалъ, резервная клѣтчатка) за счетъ болѣе простыхъ, притекающихъ изъ листьевъ.

Въ настоящей работѣ изложены результаты количественнаго изслѣдованія измѣненій въ содержаніи нѣкоторыхъ веществъ при созрѣваніи сѣмянъ обыкновеннаго конскаго боба (*Vicia Faba minor*). При этомъ я ограничился только соединеніями, имѣющими характеръ либо запасныхъ питательныхъ (бѣлки, крахмалъ, запасная клѣтчатка), либо промежуточныхъ (глюкоза, сахароза, азотистыя небѣлковыя соединенія) и не разсматривалъ остальныхъ категорій, играющихъ въ жизни растеній иную роль, напримѣръ, входящихъ въ составъ механическихъ тканей. Только для золы и жировъ были сдѣланы предварительныя опредѣленія.

Сѣмена обыкновеннаго конскаго боба были выбраны объектомъ для изслѣдованія съ цѣлью нѣкотораго упрощенія задачи, такъ какъ они содержатъ бѣлки и углеводы приблизительно въ одинаковыхъ количествахъ, жиры же — въ весьма малыхъ. Сѣмена были посѣяны (въ маѣ 1913 и 1914 годовъ) на грядкахъ въ ботаническомъ саду Московскаго Университета. Во второй половинѣ іюля начиналось обильное цвѣтеніе, продолжавшееся нѣсколько недѣль. Созрѣваніе шло очень медленно и получить

вполнѣ зрѣлыя сѣмена въ условіяхъ московскаго климата не удалось, благодаря наступившимъ въ серединѣ сентября утренникамъ.

Собранныя сѣмена немедленно освобождались отъ створокъ бобовъ, высушивались и взвѣшивались. Критеріемъ для раздѣленія по различнымъ стадіямъ зрѣлости служили время сбора, наружный видъ сѣмянъ и, главное, ихъ средній вѣсъ. Очевидно, благодаря неодинаковому посѣвному матеріалу и разнымъ метеорологическимъ условіямъ 1913 и 1914 годовъ, сѣмена обоихъ сборовъ отличались другъ отъ друга и результаты анализовъ отдѣльныхъ годовъ непосредственно сравнивать нельзя.

Сборъ 1913 года.

100 сѣмянъ посѣвнаго матеріала вѣсили 42·5590 гр.[1].

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V
Вѣсъ 100 сѣмянъ	3·2280	10·4780	14·7010	36·9630	41·7820

Сборъ 1914 года.

100 сѣмянъ посѣвнаго матеріала вѣсили 53·4080 гр.

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Вѣсъ 100 сѣмянъ.	2·3230	3·9644	4·3609	9·6489	12·1720	14·7960	18·1720	23·5750	35·0550

Зола.

Изслѣдованіе содержанія золы было произведено только для сбора 1913 года и свелось къ опредѣленію общаго количества «сырой золы». Полученные результаты не отличались отъ того, что было найдено прежними авторами: относительныя количества золы по мѣрѣ созрѣванія уменьшались, абсолютныя возрастали. Опредѣленія отдѣльныхъ элементовъ золы произведено не было.

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V
Золы въ %-ахъ абс. сух. вѣса.	6·55	5·15	4·59	4·13	4·30
Золы въ гр. на 100 сѣмянъ	0·2199	0·5612	0·7561	1·6140	2·0270

[1] Всѣ данныя приведены на абсолютно-сухое вещество.

Эфирная вытяжка.

Также и для жирныхъ веществъ, переходящихъ въ эфирную вытяжку, опредѣленія ограничились сѣменами сборовъ 1913 года, въ виду того, что количества ихъ оказались очень малыми и, къ тому же, приблизительно одинаковыми (по отношенію къ сухому вѣсу сѣмянъ) за все время созрѣванія. Накопленіе запасныхъ веществъ здѣсь, слѣдовательно, не имѣло мѣста и жироподобныя вещества въ данномъ случаѣ, очевидно, нужны клѣткамъ сѣмянъ не въ качествѣ питательныхъ.

Стадіи созрѣванія.		I	II	III	IV	V
Жиры.	%%	1·23	1·12	1·15	1·21	1·35
	Граммы на 100 сѣмянъ . . .	0·0113	0·1221	0·1809	0·4875	0·6219

Азотистыя вещества.

Изслѣдованіями Васильева и Залѣсскаго было установлено, что, по мѣрѣ созрѣванія, количества какъ общаго, такъ и бѣлковаго азота возрастаютъ абсолютно и относительно, содержаніе же азота небѣлковаго падаетъ. Однако разсмотрѣніе анализовъ Недокучаева, Пфеннингера, Шульце и Винтерштейна показывало, что выраженное въ такой категорической формѣ утвержденіе врядъ-ли справедливо, такъ какъ въ началѣ созрѣванія иногда происходитъ не увеличеніе содержанія азота, а уменьшеніе. Изслѣдуя сѣмена 1913 года, я натолкнулся на то же самое явленіе:

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V
Средній вѣсъ 100 сѣмянъ	3·2280	10·4780	14·7010	36·9630	41·7820
Общій N въ % сух. вѣса	6·90	6·76	5·21	5·75	5·86
Общій N въ гр. на 100 сѣмянъ . .	0·2227	0·7083	0·7661	2·1254	2·4482
Бѣлковый N въ %-ахъ	4·92	5·57	4·56	5·12	5·56
Бѣлковый N на 100 сѣмянъ . . .	0·1538	0·5836	0·6702	1·8926	2·3236
Небѣлковый N въ %-ахъ	1·98	1·19	0·65	0.63	0·30
Небѣлковый N на 100 сѣмянъ . .	0·0689	0·1247	0·0959	0·2328	0·1246
Бѣлковый N въ %-ахъ отъ общаго .	71·33	82·40	87·49	89·20	94·91

Примѣчаніе. Опредѣленіе азота производилось по Кьельдалю, сжиганіемъ съ сѣрной кислотой, въ присутствіи окиси мѣди и сѣрнокислаго калія. Бѣлковый азотъ опредѣлялся по Барнштейну.

Относительныя количества общаго азота, слѣдовательно, въ началѣ созрѣванія падаютъ даже сильнѣе, чѣмъ возрастаютъ впослѣдствіи. Измѣ-

ненія процентнаго содержанія бѣлковаго азота оказались въ первыхъ стадіяхъ еще болѣе неправильными, чѣмъ общаго. Абсолютныя же количества того и другого азота, отношенія бѣлковаго азота къ общему и содержаніе азота небѣлковаго измѣнялись довольно правильно. Обстоятельства эти заставили въ 1914 году обратить особенное вниманіе на первыя стадіи созрѣванія. При этомъ обнаружилось, что въ самомъ началѣ изучаемаго процесса относительное содержаніе азота велико, затѣмъ оно падаетъ и снова быстро увеличивается. Потомъ наступаетъ медленное значительное паденіе, смѣняющееся еще болѣе медленнымъ и уже небольшимъ наростаніемъ. Получается впечатлѣніе какихъ-то постепенно затухающихъ волнообразныхъ колебаній. Сказанное относится какъ къ общему, такъ и къ бѣлковому азоту. Причина явленія лежитъ, повидимому, въ неравномѣрномъ притокѣ изъ листьевъ азотистыхъ и безазотистыхъ веществъ, причемъ то одинъ, то другой процессъ подавляется сосѣднимъ. По мѣрѣ созрѣванія сѣмянъ разницы въ притокѣ становятся менѣе ощутительны и ходъ накопленія азотистыхъ веществъ болѣе правильнымъ.

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Вѣсъ 100 сѣмянъ. . .	2·3230	3·9644	4·3609	9·6489	12·1720	14·7960	18·1720	23·5750	35·0550
Общій N въ % сух. в. .	6·46	5·74	6·55	6·04	5·02	4·87	5·04	5·18	5·10
Общій N въ 100 сѣм. .	0·1512	0·2268	0·2856	0·5828	0·6110	0·7206	0·9329	1·2213	1·8895
Бѣлковый N въ % с. в.	3·42	3·19	4·04	4·07	3·76	3·81	4·02	4·21	4·41
Бѣлк. N въ 100 сѣм. .	0·0805	0·1265	0·1754	0·3927	0·4570	0·5637	0·7441	0·9924	1·6342
Небѣлковый N въ % .	2·99	2·55	2·51	1·97	1·26	1·06	1·02	0·97	0·69
Небѣлк. N въ 100 сѣм. .	0·0707	0·1003	0·1102	0·1901	0·1540	0·1569	0·1888	0·2289	0·2553
Бѣлк. N въ % общаго .	53·72	55·58	61·77	67·43	74·83	78·23	79·79	81·28	86·38

Для азотистыхъ веществъ небѣлковаго характера, опредѣляемыхъ по разности между количествами общаго и бѣлковаго азота, неправильности наблюдались, какъ и для сборовъ 1913 года, въ абсолютныхъ величинахъ, а не въ относительныхъ. Процентное содержаніе небѣлковаго азота падаетъ по мѣрѣ созрѣванія очень правильно, количества же его въ 100 сѣменахъ увеличиваются, но не непрерывно, а съ моментами довольно значительнаго пониженія. Послѣдніе, очевидно, обусловливаются энергичнымъ синтезомъ бѣлковыхъ веществъ за счетъ уже ранѣе находившихся въ сѣменахъ азотистыхъ соединеній, т. е. различныхъ аминокислотъ и органическихъ основаній.

Растворимые возстановляющіе сахара и сахароза.

При изученіи количественнаго содержанія растворимыхъ возстановляющихъ сахаровъ (глюкозъ), навѣски мелко-измельченныхъ сѣмянъ извлекались кипящимъ 70%-ымъ спиртомъ. По отгонкѣ послѣдняго въ вакуумѣ при температурѣ 35—40°, растворъ доводился водой до опредѣленнаго объема и производилось опредѣленіе глюкозы по Бертрану[1]. Къ отдѣльной порціи прибавлялась инвертаза, приготовленная по методу О'Сюлливана и Томпсона[2] продолжительнымъ самопевариваніемъ дрожжей нижняго броженія и осажденіемъ фермента спиртомъ. Инверсія продолжалась 24 часа при температурѣ 35°. Послѣ новаго опредѣленія возстановляющаго сахара, содержаніе сахарозы вычислялось изъ разности между вторымъ и первымъ наблюденіями возстановленія. Этотъ методъ оказался очень точнымъ и разницы между основнымъ и параллельнымъ контрольнымъ опредѣленіями выражались ничтожными величинами. Результаты анализовъ показали, что количества возстановляющихъ сахаровъ относительно все время созрѣванія падаютъ, абсолютно же, хотя и уменьшаются, но это уменьшеніе идетъ неравномѣрно и прерывается моментами, иногда, довольно значительнаго подъема. Причина послѣдняго, очевидно, лежитъ въ усиленномъ притокѣ глюкозъ изъ листьевъ. Что же касается тростниковаго сахара, то его количества, падая относительно, абсолютно увеличиваются, показывая временами сильныя уклоненія отъ правильнаго хода процесса. Уклоненія эти не могутъ быть объяснены ошибкой опредѣленія и, повидимому, находятся въ нѣкоторой связи съ неправильностями въ ходѣ накопленія азотистыхъ веществъ.

Сборъ 1913 года.

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V
Глюкоза въ % сух. вещ.	3·07	1·34	0·57	0·21	0·23
» на 100 сѣм. (гр.)	0·1030	0·1460	0·0858	0·0846	0·1051
Сахароза въ %	2·23	2·69	2·21	1·76	1·52
» на 100 сѣм. (гр.)	0·0749	0·2931	0·3249	0·6890	0·6986

Въ сборахъ 1913 года абсолютное содержаніе глюкозы въ 100 сѣменахъ въ концѣ созрѣванія было, слѣдовательно, такое же, какъ и въ началѣ и съ полной отчетливостью паденіе содержанія глюкозы относительно первой стадіи выступаетъ только въ анализахъ сѣмянъ 1914 года. Самой первой

---

[1] Bertrand. Bull. Soc. Chim. 35, 1285, 1906.
[2] O'Sullivan и Tompson. Journ. Chem. Soc. Trans. 57, 834, 1890.

стадіи, къ сожалѣнію, анализировать на углеводы не пришлось, благодаря малому количеству матеріала.

Сборъ 1914 года.

Стадіи созрѣванія.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Глюкоза въ % сух. вѣса . .	5·80	2·55	2·28	0·91	0·96	0·48	0·37	0·39
» на 100 сѣм. (гр.). . .	0·2299	0·1112	0·2150	0·1108	0·1420	0·0872	0·0872	0·1367
Сахароза %	5·74	1·99	2·78	3·10	3·18	2·62	2·01	2·02
» на 100 сѣм. (гр.). . .	0·2276	0·0868	0·2682	0·3765	0·4705	0·4761	0·4378	0·7081

Растворимый полисахаридъ.

Часть раствора сахаровъ, не подвергавшаяся дѣйствію инвертазы была гидролизована слабой соляной кислотой и обнаружила дальнѣйшее увеличеніе возстановляющей способности, обязанное, очевидно, расщепленію какого то полисахарида, на который инвертаза не дѣйствуетъ. По всей вѣроятности онъ относится къ производнымъ галактозы, такъ какъ при окисленіи азотной кислотой сиропа, полученнаго сгущеніемъ спиртовой вытяжки, образовалась нерастворимая въ водѣ и плавящаяся при 212—214° слизевая кислота. Получить этотъ полисахаридъ въ болѣе или менѣе чистомъ видѣ не удалось, такъ какъ кристаллизаціи мѣшали находившіяся въ растворѣ аминокислоты. Опредѣленія его производились только для сѣмянъ сбора 1914 года. Согласно даннымъ анализовъ абсолютныя количества растворимаго полисахарида къ концу созрѣванія увеличиваются, относительныя же остаются почти неизмѣнными. Но во время созрѣванія и для этого углевода наблюдаются періоды энергичнаго накопленія, смѣняющіеся періодами сильной траты.

Стадіи созрѣванія.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Растворимый полисахаридъ (%)	2·68	4·08	4·17	1·92	2·19	3·10	1·34	2·84
Растворимый полисахаридъ на 100 сѣм. (гр.) .	0·1063	0·1779	0·4023	0·2337	0·3240	0·5633	0·3159	0·9956

Крахмалъ.

Опредѣленіе крахмала совершалось при помощи амилазы (Мерковскій препаратъ діастазы). Результаты отличаются отъ данныхъ другихъ авторовъ лишь въ началѣ и передъ концомъ созрѣванія, когда замѣчаются тѣ же явленія, какъ и въ случаѣ остальныхъ изслѣдованныхъ углеводовъ: энер-

гичное накопленіе крахмала прерывается моментами, въ которые перевѣсъ получаетъ его трата.

Сборъ 1913 года.

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V
Крахмалъ (%)	8·53	21·24	48·08	47·87	47·91
» на 100 сѣм.(гр.) .	0·2864	2·3146	4·7532	19·2875	22·0195

Сборъ 1914 года.

Стадіи созрѣванія.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Крахмалъ (%)	19·41	11·92	19·79	30·62	33·03	33·62	29·96	39·87
» на 100 сѣм.(гр.).	0·7695	0·5198	1·9090	3·6422	4·8871	6·1093	7·0630	13·9765

Запасная клѣтчатка.

Послѣ опредѣленія крахмала, клѣточныя стѣнки обработывались слабой щелочью и гидролизовались разведенной сѣрной кислотой. Послѣ фильтрованія и тщательной промывки, фильтратъ соединялся съ промывными водами, нейтрализовался и доводился до опредѣленнаго объема. Количество возстановляющаго сахара, опредѣленное по Бертрану, считалось соотвѣтствующимъ количеству запасной клѣтчатки. Природа глюкозы, входящей въ ея составъ, не была установлена. Опредѣленія производились только съ сѣменами сборовъ 1914 года. Въ полученныхъ результатахъ наблюдаются тѣ же характерныя черты, какъ и для остальныхъ углеводовъ.

Стадіи созрѣванія.	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Запасная клѣтчатка (%) . . .	2·60	2·05	4·23	7·48	6·27	7·53	9·56	4·47
» » на 100 сѣм. .	0·1008	0·0899	0·4081	0·8897	0·9277	1·3683	2·2538	1·5669

Къ концу созрѣванія, слѣдовательно, наблюдается сильный относительный и абсолютный ростъ содержанія запасной клѣтчатки, въ самой послѣдней стадіи смѣнившійся рѣзкимъ паденіемъ.

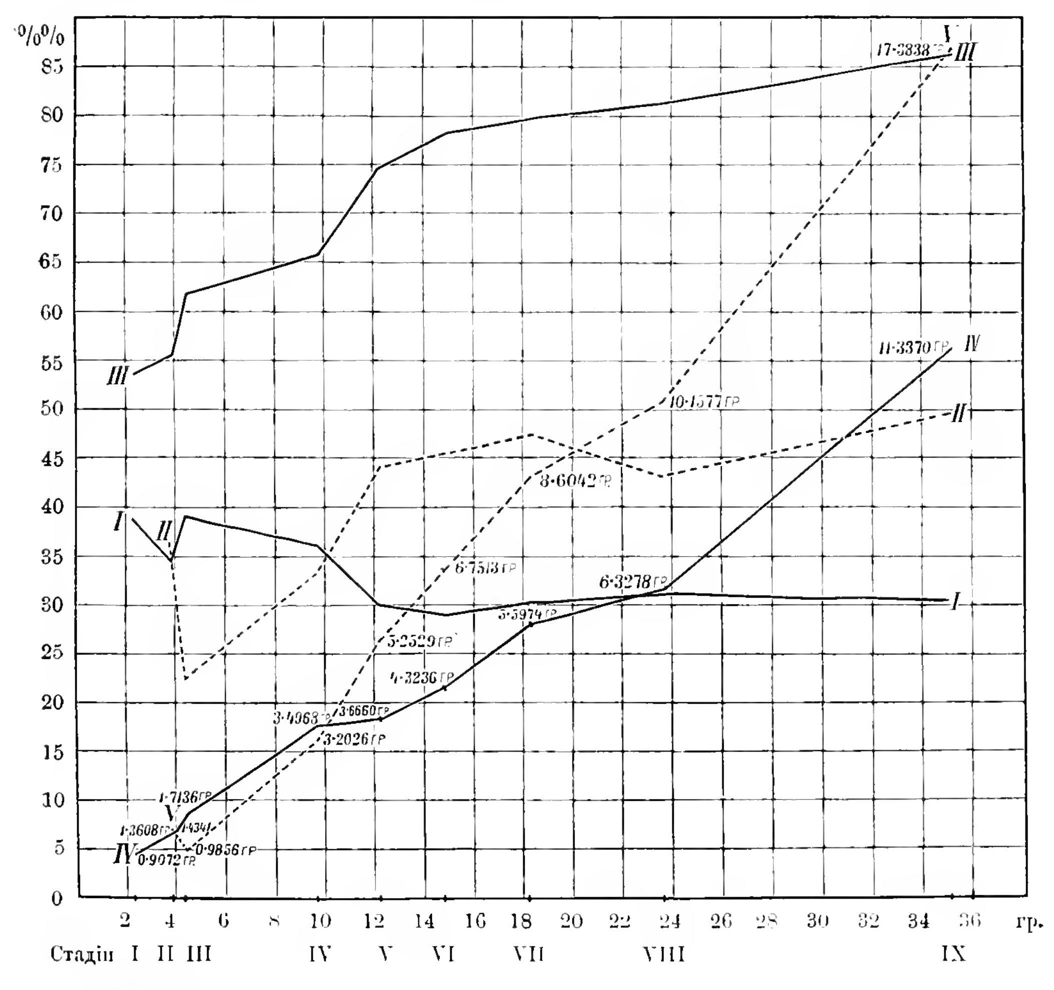
Если принять въ качествѣ множителя для перехода отъ азота къ бѣлковымъ веществамъ число 6 вмѣсто обычныхъ 6·25 (по даннымъ Осборна[1] бѣлки конскаго боба содержатъ около 18% азота), допустить затѣмъ, что небѣлковыя азотистыя вещества отличаются такимъ же содержаніемъ азота, какъ и бѣлки изъ нихъ возникающіе и сопоставить полученныя данныя съ содержаніемъ углеводовъ и отношеніемъ въ различныя стадіи созрѣванія бѣлковаго азота къ общему, то результаты произведеннаго количественнаго

[1] Osborne. The vegetable proteins, стр. 57, 1909.

изслѣдованія созрѣвающихъ сѣмянъ (сборъ 1914 года) сведутся къ слѣдующей табличкѣ:

Стадіи созрѣванія.	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
Азотистыя вещества %.	38·76	34·44	39·30	36·24	30·12	29·22	30·24	31·08	30·60
Азотистыя вещества на 100 сѣм. (гр.)	0·9072	1·3608	1·7136	3·4968	3·6660	4·3236	5·5974	6·3278	11·3370
Углеводы %	—	36·28	22·59	33·25	41·03	45·63	47·35	43·24	49·59
» на 100 сѣм. (гр.) .	—	1·4341	0·9856	3·2026	5·2529	6·7513	8·6042	10·1577	17·3838
$\frac{\text{Бѣлковый азотъ}}{\text{Общій азотъ}}$ (%) .	53·72	55·58	61·77	67·47	71·83	78·23	79·79	81·28	86·38

Яснѣе эти соотношенія выступаютъ на приложенныхъ кривыхъ, гдѣ на линіи абсциссъ отложены средніе сухіе вѣса 100 сѣмянъ, а на ордина-



тахъ — относительныя (въ процентахъ) количества азотистыхъ веществъ (I) и углеводовъ (II), отношенія бѣлковаго азота къ общему (III) и абсолютныя количества (въ граммахъ) азотистыхъ веществъ (IV) и углеводовъ (V).

Приведенныя данныя позволяютъ заключить, что въ моментъ наибольшаго паденія содержанія углеводовъ (стадія III) происходитъ наиболѣе энергично и накопленіе азотистыхъ веществъ вообще и переходъ небѣлковыхъ соединеній въ бѣлки въ частности. Пока еще нельзя рѣшить простое ли это совпаденіе или между обоими явленіями существуетъ причинная связь. Присутствіе второго паденія количества углеводовъ, совпадающаго съ нѣкоторымъ повышеніемъ содержанія азотистыхъ веществъ, говоритъ, скорѣе, въ пользу второго предположенія. Возможно, конечно, что притокъ углеводовъ и азотистыхъ веществъ изъ листьевъ идетъ какъ бы чередующимися волнами, съ преобладаніемъ то одной, то другой группы. Весьма вѣроятно значеніе въ образованіи этихъ волнъ метеорологическихъ факторовъ (вліяніе атмосферныхъ осадковъ, продолжительности солнечнаго сіянія, большей или меньшей влажности и т. д.), такъ какъ созрѣваніе идетъ весьма медленно и погода, въ продолженіе его, неоднократно мѣняется. Вопросъ этотъ, однако, еще совершенно не изученъ. Кромѣ такого объясненія возможенъ и другой случай: усиленный синтезъ бѣлка требуетъ для своего осуществленія, какъ и всякая эндотермическая реакція, притока свободной энергіи. Послѣдняя же, очевидно, черпается въ дыхательныхъ процессахъ, при которыхъ и происходитъ потребленіе углеводовъ. Это предположеніе требуетъ, конечно, опытной провѣрки, каковой я пока не имѣлъ возможности сдѣлать.

Дозрѣваніе сорванныхъ сѣмянъ.

Кромѣ изслѣдованія сѣмянъ, созрѣвавшихъ въ естественныхъ условіяхъ, мною былъ поставленъ опытъ и съ дозрѣваніемъ бобовъ, отдѣленныхъ отъ материнскаго растенія, съ цѣлью изолировать сѣмена отъ вліянія притекающихъ изъ листьевъ веществъ. Опытъ носилъ чисто оріентировочный характеръ и, къ сожалѣнію, не могъ быть повторенъ лѣтомъ 1915 года. Между тѣмъ уже изъ полученныхъ данныхъ видны, во-первыхъ, важность подобныхъ опытовъ[1] для познанія синтетическихъ процессовъ при дозрѣваніи, а во-вторыхъ, невозможность получить точныя данныя, сохраняя сѣмена въ створкахъ. Вещества, притекающія изъ послѣднихъ сильно мѣшаютъ

[1] Впервые подобные опыты были произведены еще Луканусомъ въ 1860 году, а затѣмъ, для азотистыхъ веществъ, Васильевымъ и Залѣсскимъ.

ясности получающейся картины. Выяснилась также необходимость помѣщать сѣмена въ условія минимальнаго испаренія и производить учетъ выдѣляющейся при дыханіи углекислоты.

Опытъ былъ произведенъ съ бобами, собранными 31-го іюля 1914 года. Всѣ плоды были раздѣлены на двѣ порціи, изъ которыхъ одна была немедленно освобождена отъ створокъ и сѣмена высушены при 60 — 70°, а другая положена на 10 дней въ прохладномъ темномъ мѣстѣ между листами влажной пропускной бумаги. Средній вѣсъ боба въ началѣ опыта былъ 3·9313 гр., въ концѣ—2·3350 гр. Стѣнки створокъ довольно сильно сморщились, но все-таки имѣли свѣжій видъ. Средній вѣсъ 100 сѣмянъ (перечисленный на абсолютно-сухое вещество) въ началѣ опыта былъ 3·9644 гр., въ концѣ — 4·9950 гр. Содержаніе азота, общаго и бѣлковаго, значительно увеличилось, причемъ послѣдняго прибыло больше, чѣмъ перваго на 0·0083 гр., что соотвѣтствуетъ 0·0498 гр. бѣлка, безусловно образовавшагося внутри сѣмени за счетъ небѣлковыхъ азотистыхъ запасовъ, а не притекшаго сюда въ готовомъ видѣ изъ створокъ. Съ несомнѣнностью можно говорить и о синтезѣ при дозрѣваніи запасной клѣтчатки, содержаніе которой почти удвоилось и которая, безусловно, не могла перейти изъ створокъ въ готовомъ видѣ въ силу своей нерастворимости. Довольно значительно увеличились и количества растворимаго полисахарида, но чему обязано это увеличеніе — сказать невозможно: могъ быть и притокъ изъ створокъ и синтезъ изъ другихъ углеводовъ. Изъ числа послѣднихъ, крахмалъ испыталъ лишь незначительное измѣненіе, глюкоза же и тростниковый сахаръ испытали сильное уменьшеніе, обусловленное, очевидно, съ одной стороны тратой на дыханіе, а съ другой — на синтезъ запасной клѣтчатки и, возможно, растворимаго полисахарида.

		Начало опыта.		Конецъ опыта.
	%	Граммы на 100 сѣм.	%	Граммы на 100 сѣм.
Вѣсъ 100 сѣм.	—	3·9644	—	4·9950
Общій азотъ	5·74	0·2268	6·45	0·3189
Бѣлковый азотъ	3·19	0·1265	4·59	0·2269
$\frac{\text{Бѣлковый азотъ}}{\text{Общій азотъ}}$	55·58	—	71·15	—
Глюкоза	5·80	0·2299	3·78	0·1870
Сахароза	5·74	0·2268	3·42	0·1691
Растворимый полисах.	2·68	0·1063	3·42	0·1691
Крахмалъ	19·41	0·7695	16·07	0·7946
Запасная клѣтчатка	2·60	0·1008	4·74	0·2344

Синтетическіе процессы, слѣдовательно, ясно обнаруживаются какъ при созрѣваніи сѣмянъ на растеніи, такъ и при дозрѣваніи ихъ въ искусственныхъ условіяхъ. Что же касается связи этихъ процессовъ съ дѣятельностью ферментовъ, то имѣющихся въ моемъ распоряженіи данныхъ пока еще слишкомъ недостаточно, чтобы помѣстить ихъ въ настоящей работѣ.

Лабораторія физіологіи растеній
Московскаго Университета.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Основной законъ кристаллохиміи.

Е. С. Федорова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г.).

Матеріалъ, собранный въ предъидущей статьѣ [1], приводитъ къ общимъ выводамъ весьма большого значенія и прежде всего къ установленію основного закона кристаллохиміи, представляющаго чрезвычайное расширеніе закона Гаюи, то есть основного закона кристаллографіи. Этотъ законъ требуетъ для своего выраженія нѣкоторыхъ трехъ кристаллографическихъ осей, по которымъ, также какъ въ законѣ Гаюи, мы должны опредѣлить нѣкоторые единичные отрѣзки, и тогда можемъ сказать, что *точки, занимаемыя атомами, есть точки раціональныя по отношенію къ этимъ осямъ*, то есть ихъ три координаты раціональны или, иначе, выражаются отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ въ единицахъ длины, представленныхъ въ единичныхъ отрѣзкахъ.

Выведенныя правила гласятъ:

Значеніе плоскостей въ комплексъ прежде всего зависитъ отъ наибольшей плотности расположенія атомовъ въ параллельныхъ плоскостяхъ. Чѣмъ выше плотность, тѣмъ кристаллографическое значеніе плоскостей выше (для количественнаго выраженія мы пока опытныхъ основаній не имѣемъ).

Кристаллографическое значеніе плоскостей усиливается, если въ нихъ расположены разнородные атомы, способные химически притягивать другъ друга. Мы не имѣемъ въ химіи количественнаго выраженія такого взаимнаго притяженія, но оно очевидно различно, и нужно думать, что усиленіе значенія такихъ плоскостей находится въ прямой связи съ усиленіемъ химическаго притяженія.

---

[1] См. ИАН. 1916 г., стр. 359.

Связь сосѣднихъ параллельныхъ плоскостей усиливается отъ того же химическаго притяженія.

Эти законы можно положить въ основу кристаллохиміи, какъ новаго отдѣла точной науки, въ которой рѣшительно нельзя раздѣлить задачи кристаллографіи и задачи химіи.

Въ особенности это относится къ первому закону, который по существу одинаково входитъ какъ въ область кристаллографіи, такъ и въ область химіи, но имѣетъ и здѣсь, и тамъ одинаково важное значеніе, почему его будемъ называть основнымъ закономъ кристаллохиміи.

Въ самомъ дѣлѣ, нѣтъ, кажется, болѣе типичной для химіи задачи, какъ задачи о выясненіи взаимнаго расположенія и связи атомовъ, а именно объ этомъ и говоритъ основной законъ.

Съ другой стороны, мы считали до сихъ поръ основнымъ закономъ кристаллографіи законъ Гаюи, а нашъ основной законъ есть въ сущности лишь расширеніе закона Гаюи, въ которомъ послѣдній растворяется какъ его составная часть.

Признаніе этого закона заставляетъ детализироваться и существующую теорію структуры кристалловъ. Это ярче всего выражается въ уравненіяхъ правильныхъ системъ точекъ, которыя были впервые установлены въ сочиненіи «Симметрія правильныхъ системъ фигуръ»; въ нихъ существующая теорія структуры допускала и ирраціональныя координаты, а основной законъ требуетъ ихъ раціональности, то-есть выраженія въ дробяхъ, числители и знаменатели которыхъ есть цѣлыя числа (раціональныхъ, то-есть ариѳметическихъ, а не алгебраическихъ вообще).

Разсмотримъ нѣсколько простѣйшихъ примѣровъ. Возьмемъ сначала соль ClNa (фиг. 1 стр. 362).

По полученнымъ результатамъ мы должны выразить расположеніе атомовъ двумя системами уравненій, изъ которыхъ одна относится къ атомамъ Na, а другая къ атомамъ хлора.

Если въ началѣ координатъ мы расположимъ атомъ Na, то получимъ систему атомовъ Na[1]:

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f^{\lambda}/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n'''} + g^{\lambda}/_2;\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n'''} + (f+g)^{\lambda}/_2 \qquad (1)$$

---

[1] Подробности вывода первыхъ членовъ этихъ уравненій заключаются въ «Симметріи конечныхъ фигуръ» (Записки И. Минералог. Общ. XXV). Въ полномъ же видѣ уравненія прежде всего даны въ «Симметріи правильныхъ системъ фигуръ» (напр. разсматриваемое подъ названіемъ 73 на стр. 68; тамъ же XXVIII, съ таблицей исправленій въ концѣ тома).

Здѣсь a_i, которое можетъ принять три значенія (какъ показываетъ верхняя цифра), соотвѣтствующія поворотамъ около тройной оси симметріи, выражаетъ для этихъ трехъ точекъ координаты по оси X_0. Тѣ же значенія имѣютъ координаты и на осяхъ X_1 и X_2. Если отмѣтимъ эти значенія буквами a_0, a_1, a_2, то прежде всего для трехъ точекъ получаемъ координаты: 1) $(a_0a_1a_2)$, 2) $(a_1a_2a_0)$ и 3) $(a_2a_0a_1)$. Буква n замѣняетъ число (-1), а остальныя буквы могутъ выражать какія-угодно цѣлыя числа, но достаточно придать имъ значеніе 0 или 1. Мѣняя значеніе буквы m, изъ первыхъ трехъ координатъ получимъ три другія, а именно: 4) $(a_0a_2a_1)$, 5) $(a_1a_0a_2)$ и 6) $(a_2a_1a_0)$. Мѣняя затѣмъ значенія трехъ остальныхъ буквъ, мы каждый разъ получаемъ вдвое большее число координатъ; напр. мѣняя значеніе j, получаемъ: 7) $(-a_0a_1a_2)$, 8) $(-a_1a_2a_0)$, 9) $(-a_2a_0a_1)$, 10) $(-a_0a_2a_1)$, 11) $(-a_1a_0a_2)$, 12) $(-a_2a_1a_0)$. Изъ этихъ 12-ти получаемъ другія 12, если измѣнимъ значеніе k; получимъ 13) $(a_0-a_1a_2)$. . . 18) $(a_2-a_1a_0)$, 19) $(-a_0-a_1a_2)$. . . 24) $(-a_2-a_1a_0)$ и т. д.

Итакъ всего получимъ координаты 48-ми точекъ соотвѣтственно данному гексакисъ-октаэдрическому виду симметріи.

Но въ данномъ частномъ случаѣ въ этой части равенствъ находимъ во всѣхъ случаяхъ одну и ту же координату 0.

Значеніе λ выражаетъ ближайшее разстояніе совмѣщенія системы по одной изъ главныхъ осей[1]. Оно извѣстно въ абсолютной мѣрѣ, а именно, выражаемое въ сантиметрахъ равно $5{,}59 \times 10^{-8}$ (для ClK $6{,}31 \times 10^{-8}$). Придавая буквамъ f и g всевозможныя значенія цѣлыхъ чиселъ, получаемъ координаты всѣхъ точекъ системы Na. Если система состоитъ изъ нѣсколькихъ атомовъ (какъ въ данномъ случаѣ изъ двухъ), то λ сохраняетъ такое значеніе во всѣхъ уравненіяхъ, почему этой абсолютной длинѣ и придаемъ значеніе единичнаго отрѣзка по всѣмъ тремъ кристаллографическимъ осямъ.

И вотъ, сдѣлавъ это, то есть принявъ λ за единицу по оси, найдемъ для атомовъ хлора координаты въ видѣ раціональныхъ чиселъ, а именно $(a_0a_1a_2) = (\frac{1}{2}00)$, $(a_2a_0a_1) = (0\frac{1}{2}0)$ и $(a_1a_2a_0) = (00\frac{1}{2})$.

Коротко можемъ выразить систему точекъ Na (000), а систему точекъ Cl $(\frac{1}{2}00)$.

Системѣ точекъ Na принадлежатъ и $(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}0)$, $(\frac{1}{2}\,0\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}0)$ и т. д., а также и точки (100), (010), $(\bar{1}00)$. . . Напротивъ того, точки (110), $(1\bar{1}0)$, (101) и т. д., а также $(\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{2})$ принадлежатъ системѣ Cl.

---

[1] Въ разсматриваемомъ случаѣ оно вдвое болѣе ближайшихъ разстояній плоскихъ сѣтокъ, отмѣчаемыхъ Браггами буквою d_{100}.

Система точекъ мѣди въ точности совпадаетъ съ системою Na, а потому для выраженія ея имѣемъ тѣ же уравненія и символъ (000).

Для сфалерита (фиг. 7 стр. 370) имѣемъ уравненія:

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f^\lambda/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^l} + g^\lambda/_2;\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^l} + (f+g)^\lambda/_2 \quad (2)$$

и координаты для Zn ($^1/_2 00$) и для S ($^1/_4\ ^1/_4\ ^1/_4$).

Этимъ вполнѣ опредѣляется сфалеритъ нетолько кристаллографически, но и химически, подобно тому, какъ по аналогичнымъ даннымъ были опредѣлены предыдущія системы.

Изъ этихъ данныхъ мы выведемъ для координатъ S также ($^1/_4\ ^1/_4\ ^{\bar{1}}/_4$) или ($^{\bar{1}}/_4\ ^1/_4\ ^{\bar{1}}/_4$)... но никакъ не выведемъ ($^{\bar{1}}/_4\ ^1/_4\ ^1/_4$) или ($^{\bar{1}}/_4\ ^{\bar{1}}/_4\ ^{\bar{1}}/_4$)...

Для флюорита же мы для атомовъ F выведемъ всѣ эти координаты, но уравненіе (2) придется замѣнить уравненіемъ (1).

Въ алмазѣ мы имѣемъ то же расположеніе атомовъ, а слѣдовательно и тѣ же координаты, что и въ сфалеритѣ, но атомы образуютъ не двѣ различныя, а только одну единственную систему точекъ и потому уравненіе (1) приходится замѣнить другимъ, а именно:

$$x_0 = n^{j+l} \overset{3}{a}_i + (2f+l)^\lambda/_4;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + (2f+2g+l)^\lambda/_4;$$
$$x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^m} + (2g+l)^\lambda/_4 \quad (3)$$

Мы видимъ, что уравненіе (2) входитъ въ это уравненіе какъ его часть, именно половинная; но теперь для полученія атомовъ алмаза намъ не нужно соединять двѣ системы, а достаточно одной напр. съ координатой ($^1/_4\ ^1/_4\ ^1/_4$), ($^1/_4\ ^1/_4\ ^1/_4$)...

Напр. изъ послѣдней отмѣченной точки мы, придавая l значеніе — 1, найдемъ $x_0 = +\,^1/_4 - \,^1/_4 = 0$; $x_0 = -\,^1/_4 - \,^1/_4 = -\,^1/_2$; $x_2 = +\,^1/_4 - \,^1/_4 = 0$, то есть получаемъ одну изъ точекъ, которая въ уравненіи (2) выводилась изъ координаты ($^1/_2 00$); а такъ какъ изъ одной точки выводятся и всѣ шесть точекъ (тетрагональныхъ вершинъ ромбическаго додекаэдра), то этимъ доказывается, что изъ уравненія (3) выводятся всѣ точки, которыя были замѣщены въ сфалеритѣ какъ атомами Zn, такъ и атомами S, то есть всѣ точки алмаза.

Итакъ, сущность основного закона кристаллохиміи сводится къ тому, что по тремъ кристаллографическимъ осямъ и даннымъ на нихъ единичнымъ отрѣзкамъ пространственное положеніе атомовъ выражается раціонально.

Съ этимъ закономъ, аналогичнымъ закону Гаюи, мы можемъ связать и аналогичные выводы.

Число раціональныхъ точекъ въ пространствѣ (при данной системѣ осей) безконечно (и притомъ въ третьей степени). Конечно, изъ этого числа *возможныхъ точекъ* на самомъ дѣлѣ атомами заняты лишь весьма немногія; но все-таки мы можемъ отличить точки *возможныя* отъ *невозможныхъ*. Чѣмъ точнѣе мы могли бы отличать другъ отъ друга близкія точки, тѣмъ шире раскрылась бы область возможныхъ точекъ.

Но какъ законъ Гаюи въ кристаллографіи главное значеніе свое получилъ отъ того, что по нему символы граней вообще не только могутъ быть выражены отношеніемъ цѣлыхъ чиселъ вообще, но именно чиселъ простѣйшихъ, такъ значеніе новаго закона проявляется въ сравнительной простотѣ координатъ точекъ, занятыхъ атомами. Въ этомъ убѣждаютъ всѣ надежныя опредѣленія, сдѣланныя Браггами.

Какъ въ кристаллографіи, благодаря неточности ея опредѣленій, мы по непосредственному вычисленію получаемъ отношенія, не вполнѣ удовлетворяющія, но только очень близкія къ простымъ раціональнымъ, такъ въ кристаллохиміи, получивъ для атомовъ положенія, очень близкія къ раціональнымъ точкамъ, мы замѣняемъ ихъ, и имѣемъ право на это, дѣйствительно раціональными точками, выражаемыми простѣйшими числами.

Вообще атомы образуютъ пространственныя рѣшетки. Даже этотъ фактъ выяснился только изъ работъ Брагговъ, потому что раньше мы скорѣе представляли себѣ отдѣльныя группы атомовъ соединенными въ частицы, и такимъ группамъ пожалуй могли приписывать отдѣльное движеніе.

Правда, не всѣ одинаковые атомы образуютъ отдѣльныя пространственныя рѣшетки, но вообще въ параллелоэдрѣ, какъ правильномъ выразителѣ пространственной рѣшетки имѣется атомъ, представленный въ единственномъ числѣ; и такихъ разнородныхъ атомовъ можетъ быть не одинъ; но всѣ такіе атомы въ выраженіи химической формулы представлены въ равномъ числѣ.

Если бы мы опредѣлили хотя бы расположеніе атомовъ одного изъ этихъ разрядовъ, то этимъ опредѣлилась бы пространственная рѣшетка, а вмѣстѣ съ нею и кристаллографическія константы, то есть система всѣхъ возможныхъ точекъ, представляющихъ возможное расположеніе атомовъ, а если притомъ извѣстно отношеніе числа атомовъ и кристаллографическія свойства вещества, то иногда это бываетъ достаточно, чтобы опредѣлить положеніе и атомовъ другого рода. Примѣръ такого опредѣленія былъ показанъ на хлоратѣ натрія.

Положеніе каждой возможной точки, а слѣдовательно и каждаго атома, опредѣляется символомъ изъ трехъ раціональныхъ чиселъ; но, въ противо-

положность кристаллографическому комплексу, другой символъ, выводимый изъ перваго введенiемъ кратныхъ множителей, выражаетъ отнюдь не положенiе того же атома, а можетъ быть совсѣмъ другого, а вообще не выражаетъ никакого атома, а только возможное положенiе для какого-нибудь новаго атома, но притомъ конечно такую точку, которая лежитъ на центральной прямой, проходящей чрезъ первый атомъ. Въ самомъ центрѣ атомъ можетъ быть представленъ или нѣтъ, но онъ всегда относится къ рацiональнымъ точкамъ и положенiе атома въ такой точкѣ всегда возможно. Ради простоты представленiя возьмемъ кубическую пространственную рѣшетку и координаты $\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}$. Пока намъ не важно было положенiе точки, опредѣляемой этими координатами, а только положенiе центральной прямой, на которой находится эта точка, мы могли произвольно измѣнять эти числа, вводя общiе множители и подбирая ихъ такъ, чтобы получилось отношенiе трехъ цѣлыхъ чиселъ.

Мы очевидно можемъ кубъ раздѣлить на такiе маленькiе кубики, чтобы всѣ атомы оказались въ числѣ вершинъ послѣднихъ, и потому *всякiй кристаллъ представляетъ изъ себя одну пространственную рѣшетку, нѣкоторыя изъ точекъ которой заняты всѣми имѣющимися въ кристаллѣ атомами.*

Это выраженiе основного закона есть прямое слѣдствiе изъ общаго факта диффракцiи, которой подвергаются X лучи при прохожденiи или отраженiя въ кристаллической средѣ.

Теперь представимъ себѣ, что кромѣ упомянутой, находящейся внутри куба, дана другая точка по координатамъ $\frac{a_0'}{b_0'}, \frac{a_1'}{b_1'}, \frac{a_2'}{b_2'}$. Составимъ произведенiе $b_0 . b_1 . b_2 . b_0' . b_1' . b_2' = B$ и раздѣлимъ кубъ на B^3 равныхъ кубиковъ. Въ такомъ случаѣ обѣ возможныя точки займутъ положенiе двухъ вершинъ этой системы кубиковъ и слѣдовательно прямая, ихъ соединяющая, съ кристаллографической точки зрѣнiя есть возможное ребро кристалла, причемъ въ самомъ кристаллѣ имѣется въ виду только ребро, параллельное этому направленiю.

Отсюда весьма важный выводъ: *прямыя, соединяющiя два произвольные атома, есть возможныя кристаллографическiя ребра.*

Отсюда переходъ и къ возможнымъ плоскостямъ кристалла, такъ какъ отсюда непосредственно вытекаетъ, что *плоскости трехъ атомовъ есть возможныя кристаллическiя грани.*

Если къ этому присоединить первое изъ выведенныхъ выше правилъ, мы само собою приходимъ къ неменѣе важному выводу: *если въ кристаллѣ*

имѣются формы, отличающіяся особою важностью (постоянствомъ проявленія), *а положеніе какихъ-нибудь атомовъ остается еще неопредѣленнымъ, то весьма вѣроятно, что они съ какими-нибудь другими атомами помѣстятся въ плоскостяхъ, параллельныхъ гранямъ этихъ формъ.*

Примѣненіе этого правила будетъ сдѣлано ниже на рядѣ дополнительныхъ примѣровъ.

Замѣчу еще, что изъ приведенныхъ законовъ вытекаетъ: *три возможныя грани пересѣкаются въ возможныхъ точкахъ; въ нихъ же пересѣкаются и два возможныя ребра*, если вообще пересѣкаются.

Раціональный комплексъ атомовъ опредѣляется положеніемъ четырехъ изъ нихъ.

Въ числѣ возможныхъ (и притомъ простѣйшихъ) *положеній атомовъ всегда находится центръ тяжести четырехгранника.* Рядъ приложеній этого закона мы видѣли въ предъидущей статьѣ. При этомъ атомы въ вершинахъ четырехгранника могутъ быть и разные. Тетраэдръ есть только частный случай четырехгранниковъ вообще.

Къ числу возможныхъ (и простѣйшихъ) *положеній атомовъ относятся также положенія въ средней точкѣ между двумя другими или въ центрѣ тяжести трехугольника* (въ группѣ кальцита и корунда).

Кромѣ *точекъ общаго положенія* мы можемъ отличать и *точки спеціальнаго положенія* въ связи съ элементами симметріи (на осяхъ сим. и пр.) и особенно въ центрахъ симметріи (въ коихъ пересѣкаются элементы симметріи).

Къ точкамъ спеціальнаго положенія мы можемъ отнести также центръ и вершины элементарнаго параллелоэдра. Также къ спеціальнымъ прямымъ, кромѣ осей симметріи, можемъ отнести и ребра параллелоэдровъ, а къ спеціальнымъ плоскостямъ, кромѣ плоскостей симметріи (также плоскостей сложной симметріи и симметричнаго скольженія) отнести еще грани параллелоэдра.

При этихъ опредѣленіяхъ мы можемъ формулировать теорему: *всѣ спеціальныя точки, прямыя и плоскости есть возможные элементы кристалла.*

Въ комплексѣ кубической сингоніи, какъ единичномъ, и напередъ опредѣленномъ, положеніе возможныхъ точекъ (а слѣдовательно и атомовъ) *опредѣлено разъ навсегда.*

Отдавая себѣ отчетъ въ существенномъ смыслѣ основного закона кристаллохиміи, мы легко поймемъ, что онъ есть выраженіе равновѣсія атомовъ твердаго тѣла, обусловливаемаго равными отрицательными и поло-

жительными электрическими зарядами (электронами) — единственными факторами этого равновѣсія, при которомъ одинаково наэлектризованные атомы отталкиваются, а разнонаэлектризованныя притягиваются. При этомъ вѣсъ атома роли не играетъ; въ изоморфныхъ группахъ равную роль играютъ атомы, одинаково заряженные и аналогичные, но менѣе всего сходные по вѣсу.

Къ системѣ атомнаго равновѣсія законъ Ньютона не приложимъ. Если же въ изоморфныхъ рядахъ и замѣчаются небольшія уклоненія въ углахъ, то это можно отнести лишь къ различію въ движеніи электроновъ въ соотвѣтственныхъ атомахъ. Мы видѣли примѣръ расположенія атомовъ въ центрѣ тяжести четырехгранниковъ, вершины коихъ заняты разными атомами, а этотъ фактъ несовмѣстимъ съ закономъ Ньютона (шриттъ стр. 376).

Теперь приложимъ выведенный законъ и правила къ тѣмъ случаямъ, когда Брагги установили положеніе однихъ атомовъ и не могли установить положенія другихъ или по крайней мѣрѣ остановились на невполнѣ опредѣленномъ положеніи.

Изъ такихъ кристалловъ съ неокончательно опредѣленнымъ расположеніемъ атомовъ можно выдѣлить одну такую группу, въ которой собственно расположеніе это можно все-таки установить; сюда относятся *гематитъ* Fe_2O_3 и *корундъ* Al_2O_3. Уже удалось установить, что въ этомъ случаѣ атомы O расположены въ гексапараллелоэдрѣ совершенно такъ-же какъ въ кальцитѣ[1], что два атома Fe (или Al) расположены по главной оси и наконецъ «it is probable that the distance Al... Al is somewhat smaller than the distance Al... O_3» (подразумѣваются на стр. 170 горизонтальныя плоскости, проходящія чрезъ эти атомы). Въ данномъ случаѣ (вмѣсто Al на фиг. 1 стоитъ Fe) разстояніе $O_3 \ldots O_3$ (то есть проекцій ближайшихъ центровъ на вертикальную ось) есть $^4/_6$ вертикальной діагонали; слѣдовательно, средина между ними, такъ-же какъ и плоскостями Fe... Fe есть $^2/_6$. Если примемъ вертикальную полудіагональ параллелоэдра за 1-цу и придадимъ атому Fe на этой оси внутри параллелоэдра *положеніе центра тяжести четырехгранника*, коего три вершины есть атомы O, а четвертая — атомъ Fe на той же оси, но внѣ параллелоэдра, то получимъ $^4/_5$, потому что внѣшній атомъ окажется на разстояніи $3 + {}^1/_5 = {}^{16}/_5$. Въ такомъ случаѣ разстояніе Fe...Fe есть $^4/_{15}$, а разстояніе Fe...O_3 есть $^8/_{15}$ то есть дѣйствительно большее, почему это рѣшеніе можно признать за соотвѣтствующее

[1] Теперь мы можемъ смотрѣть на это расположеніе какъ на выраженіе закона наибольшаго возможнаго удаленія атомовъ O другъ отъ друга (стр. 372).

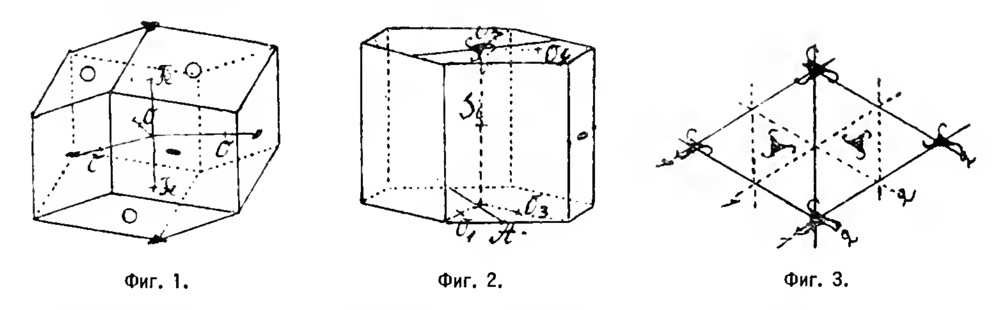
дѣйствительности[1]; оно основано уже на многократно подтвержденномъ законѣ (центра тяжести четырехгранника).

Интересно замѣтить, что послѣ столь длиннаго ряда примѣровъ мы въ первый разъ натыкаемся на повторенiе, хотя и неодинаковаго расположенiя атомовъ, но одинаковой системы параллелоэдровъ, а именно системы 16α 1, изображенной на фиг. 13 (стр. 373), которая относится и къ данному случаю.

Еще интереснѣе отмѣтить, что мы имѣемъ здѣсь даже вѣроятное двойное повторенiе, такъ какъ нужно полагать, что если одинъ изъ атомовъ Fe мы замѣнимъ атомомъ Ti, то получимъ *ильменитъ* TiO_3Fe, который также относится къ гематиту, какъ доломитъ къ кальциту; по крайней мѣрѣ мы знаемъ, что ильменитъ при тѣхъ же углахъ проявляетъ ромбоэдрическую симметрiю, какъ и доломитъ.

Параллелоэдръ системы *кварца* мы строимъ слѣдующимъ образомъ (фиг. 2).

Беремъ атомъ Si по Браггу на двойной оси симметрiи, а тройныя винтовыя оси (правыя или лѣвыя) беремъ внѣ атома Si; но въ гексагональной



Фиг. 1. Фиг. 2. Фиг. 3.

призмѣ эти оси не могутъ имѣть иного положенiя кромѣ какъ въ ребрахъ призмы, а тогда равнодѣйствующая ось должна совпадать съ осью призмы, то есть проходить чрезъ атомъ Si. Изъ этого атома проводимъ прямую, параллельную одной грани ромбоэдра кварца; это мы дѣлаемъ въ виду постоянства этихъ граней, указывающаго на сравнительно большую ихъ плотность.

Правильную систему точекъ мы знали и до изслѣдованiй положенiя атомовъ, а именно по двумъ фактамъ: трапецоэдрическому виду симметрiи и присутствiю винтовыхъ осей одного рода (правыхъ или лѣвыхъ), а также по принадлежности къ гипогексагональному типу (необходимость чего отмѣчена выше). Эта система можетъ быть только отмѣченная числомъ (12)

[1] На фиг. 1 атомы Fe должны быть ближе къ вершинамъ параллелоэдра.

(или (13) для лѣвой системы (фиг. 3)). Мы ограничиваемся только изображеніемъ правой, такъ какъ лѣвая выводится изъ него сама собою. Система параллелоэдровъ получаетъ поэтому обозначеніе (12) 3 IV.

Такъ какъ теперь мы имѣемъ систему съ тройными винтовыми осями одного рода (правыми или лѣвыми), то, какъ объяснено выше, параллелоэдръ системы долженъ быть тетрапараллелоэдромъ, то есть система должна относиться къ гипогексагональному типу; это подчеркиваетъ и Браггъ.

Оріентировка гексагональной призмы должна быть такова, чтобы наиболѣе плотныя грани призмъ кварца были параллельны двойнымъ осямъ симметріи. Изъ этого слѣдуетъ, что призма параллелоэдра по отношенію къ комплексу кварца должна быть призмою 2-го рода. При этомъ условіи нетолько пространственная рѣшетка атомовъ Si, но рѣшетки всѣхъ другихъ атомовъ дадутъ для призмъ кварца наибольшую плотность.

Положеніе атома O нужно выбрать такъ, чтобы линія, соединяющая его съ атомомъ Si, была параллельна грани ромбоэдра кварца, какъ наиболѣе важной косой его грани. Кромѣ этихъ главныхъ изъ косыхъ граней въ кварцѣ наблюдается еще тригональная бипирамида, горизонтальный слѣдъ которой даетъ прямая, перпендикулярная къ осямъ симметріи. Гдѣ бы ни была взята точка O_1 для атома кислорода, мы вообще по ней и нижней двойной оси симметріи получимъ такую точку O_3[1], что три точки O_1, Si и O_3 опредѣлятъ нѣкоторый трапецоэдръ; тригональная бипирамида опредѣлится только въ томъ случаѣ, если точку O_1 возьмемъ на срединѣ между двумя горизонтальными плоскостями, проходящими чрезъ точки Si. Но для того, чтобы O_1, Si, O_3 были параллельны грани бипирамиды, нашу образующую прямую нужно взять не только параллельно грани ромбоэдра, но также и грани бипирамиды, то есть ребру пересѣченія этихъ граней. Этимъ же оріентировка ея въ параллелоэдрѣ (по отношенію къ двойнымъ осямъ симметріи) вполнѣ опредѣляется, а съ нею и положеніе точки O_1, а именно на нижней грани пинакоида и притомъ на срединѣ радіуса, проведеннаго къ вершинѣ шестиугольника.

При этомъ ребро пересѣченія двухъ ромбоэдровъ кварца параллельно прямой, соединяющей A съ центромъ Si.

Конечно, полученное положеніе атомовъ O нельзя считать окончательно доказаннымъ, но лишь весьма вѣроятнымъ, такъ какъ построеніе

---

[1] Изъ O_1 и центральной двойной оси симметріи получимъ O_2, а изъ послѣдней, сдѣлавъ элементарное винтовое движеніе, найдемъ точку O_3; эти два движенія складываются въ равнодѣйствующую двойную ось симметріи, показанную на нижней грани сплошною чертою (другая показана на верхней грани).

основано нетолько на точномъ законѣ, но и на правилахъ, могущихъ имѣть исключенія.

Изъ разсмотрѣнныхъ кристалловъ кварцъ (послѣ пирита) представляетъ второй примѣръ кристалловъ съ замѣчательнымъ постоянствомъ проявленія осциллаторно развитыхъ граней. Мнѣ кажется, что это находится въ связи съ выясненными структурами этихъ кристалловъ.

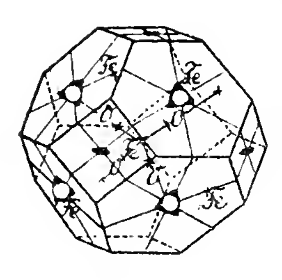
На кристаллахъ пирита (фиг. 16 стр. 376), какъ извѣстно, осцилляторное образованіе выражается въ ребрахъ, параллельныхъ главнымъ осямъ. Выше мы замѣтили, что при данной структурѣ грани куба получатъ преобладающую плотность, если пары атомовъ S (связанныхъ центромъ обращенія) принимать какъ бы за одну частицу. На дѣлѣ мы имѣемъ здѣсь около центральной грани куба двѣ другія, очень близкія къ ней параллельныя плоскости съ атомами S.

Мы конечно не имѣемъ понятія о величинѣ амплитуды колебаній атомовъ вообще и атомовъ S въ пиритѣ въ частности. Но повидимому не представляется невозможнымъ допустить для нея такіе размѣры, что въ извѣстные моменты эти атомы попадаютъ въ плоскость, параллельную грани куба, или даже переходятъ ее. Въ эти моменты плотность плоскостей удваивается и такимъ образомъ становится понятнымъ особое стремленіе къ образованію граней куба. Но въ среднемъ положеніи атомовъ чрезъ одну изъ главныхъ осей и какой-нибудь атомъ S проходитъ плоскость, не совпадающая, но близкая къ плоскости куба. Какъ относящіяся къ гранямъ ничтожной плотности, плоскости эти не могутъ получать значительнаго развитія и проявляются большею частью въ микроскопически узкихъ полоскахъ.

Нѣчто аналогичное мы можемъ подмѣтить и въ структурѣ кварца (фиг. 2). Для пониманія этого достаточно взять напримѣръ нижнюю двойную ось симметріи и провести чрезъ нее и напримѣръ точку O_2 плоскость. Эта плоскость будетъ принадлежать очень острому ромбоэдру, который также не можетъ получить значительнаго развитія вслѣдствіе ничтожной плотности.

Изъ всѣхъ изслѣдованныхъ кристалловъ хуже всего стоитъ дѣло съ кристаллами группы *шпинели* (изъ этой группы были изслѣдованы *благородная шпинель, магнетитъ* и *ганитъ*). Хотя изъ приводимыхъ численныхъ значеній и нельзя было сдѣлать опредѣленнаго заключенія о расположеніи атомовъ, но все-таки Браггъ считаетъ возможнымъ заключить, что «the planes $\{110\}$ are apparently the most widely spaced, of all those in the crystal» (стр. 172). Но это заключеніе очень близко сходится съ заключеніемъ о гептапараллелоэдрѣ какъ параллелоэдрѣ системы.

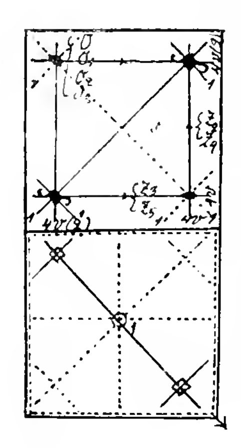
И дѣйствительно, если примемъ таковой, то получимъ вполнѣ отвѣчающую относительному числу атомовъ систему, изображенную на фиг. 4. Для атомовъ Fe (въ магнетитѣ) мы имѣемъ даже два различныя положенія: одно въ центрѣ, отвѣчающее Fe″ и другое въ центрахъ четырехъ граней на тройныхъ осяхъ симметріи, отвѣчающее Fe‴. Едва ли такое совпаденіе можно отнести къ случайности, а потому и не имѣя строгихъ непосредственныхъ указаній можно съ большою вѣроятностью принять, что это расположеніе соотвѣтствуетъ дѣйствительности.



Фиг. 4.

Мало того, пользуясь указаніемъ обширнаго опыта, показывающаго преобладающее значеніе формы {111} для этой группы, мы можемъ найти и точное положеніе атомовъ кислорода, а именно на четырехъ тройныхъ осяхъ симметріи въ разстояніи $^1/_3$ отъ центра до октаэдрической грани параллелоэдра; при такомъ допущеніи въ плоскостяхъ {111} окажутся нетолько атомы Fe‴, но и атомы O при условіяхъ наибольшой плотности расположенія.

Но при такомъ расположеніи атомовъ мы имѣемъ гексакисъ-тетраэдрическую симметрію, а это показываетъ, что система асимморфна и состоитъ изъ параллелоэдровъ двухъ различныхъ положеній, которыя выводятся одно изъ другого, если въ центрѣ октаэдрическихъ граней помѣстимъ центръ обращенія, какъ и показано на фигурѣ; чрезъ это тройныя оси симметріи становятся шестерными осями сложной симметріи.



Фиг. 5.

Соотвѣтствующая правильная система точекъ изображена на фиг. 5. Она отмѣчается (9) ⁒ 2, а потому означеніе для системы параллелоэдровъ получается (9)⁒ 2.20 δ VII.

Этимъ и завершается циклъ изслѣдованныхъ кристалловъ, потому что изслѣдованіе кристалловъ S показало такое усложненіе въ строеніи, раскрытіе котораго требуетъ новыхъ путей.

Въ заключеніе упомяну, что настоящія, а особенно сложныя органическія соединенія въ кристаллахъ кубической сингоніи почти не встрѣчаются[1], а въ имѣющихся нѣсколькихъ исключеніяхъ дѣйствительно про-

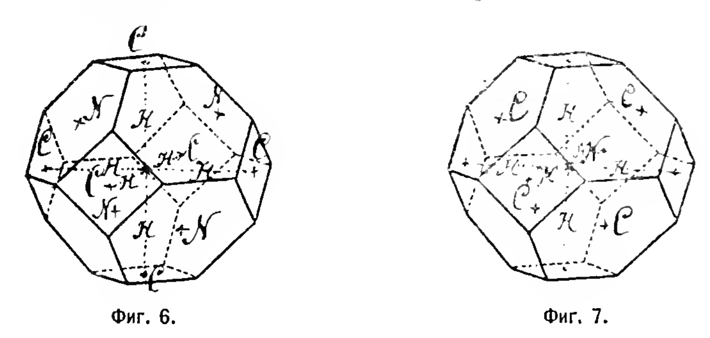
[1] Ср. «Кристаллы кубической сингоніи» Записки Горн. Инст. IV, 318.

является такая исключительная симметрія внутренняго строенія, что само собою напрашивается для догадокъ о расположеніи атомовъ. Такъ, *гексаметиленъ-тетрамину* приписывается строеніе

$$CH_2\begin{matrix} \diagup N - & CH_2 & - N \diagdown \\ & >CH_2\ CH_2< & \\ \diagdown N - & CH_2 & - N \diagup \end{matrix}CH_2,$$

почему можно представить себѣ расположеніе его атомовъ, какъ показано на фиг. 6. Здѣсь совершенно ясно, какъ четыре атома N связываютъ шесть группъ CH_2.

Въ другомъ соединеніи *тетраметилпиразинѣ*, которому приписывается строеніе $N\lessgtr\begin{matrix} C(CH_3).C(CH_3) \\ C(CH_3).C(CH_3) \end{matrix}\gtrless N$, почему его расположеніе можно представить такимъ, какъ показано на фиг. 7. Здѣсь къ каждой парѣ атомовъ азота примыкаетъ четыре группы CH_3[1].



Фиг. 6. Фиг. 7.

Но я принимаю это пока лишь какъ за вѣроятную догадку. Во всякомъ случаѣ изображеніе расположенія атомовъ есть лучшая структурная и стереохимическая формула.

Въ приложенной таблицѣ уравненій расположенія атомовъ изслѣдованныхъ кристалловъ значенія буквъ были пояснены съ достаточною подробностью выше.

Таблица уравненій расположенія атомовъ въ кристаллахъ.

Кристаллы кубическаго типа и сингоніи.

1. *Система атомовъ мѣди* (золота, серебра).

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f^\lambda/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + g^\lambda/_2;\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2n^m} + (f+g)^\lambda/_2 \quad (1)$$

[1] На фиг. 7 пропущены атомы C въ центрахъ четырехъ остальныхъ октоэдрическихъ граней параллелоэдра.

Координаты атомовъ Cu (000); символъ (0001)[1].

Система трипараллелоэдровъ II порядка. Частица Cu.

2. *Система атомовъ каменной соли* (сильвина и пр.).

Уравненія тождественны съ (1).
Координаты атомовъ Na (000); символъ (0001)
» » Cl ($^1/_2$ 00); » (1002).

Система трапараллелоэдровъ II порядка. Частица ClNa.

3. *Система атомовъ нашатыря.*

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f^\lambda/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+2n^m} + g^\lambda/_2;\ x_2 = n^{j+k+m} \overset{3}{a}_{i+2n^m} + (f+g)^\lambda/_2 \quad (2)$$

Координаты атомовъ Cl (000); символъ (0001)
» » N ($^1/_2$, $^1/_2$, $^1/_2$); символъ (1112)
» » H ($^1/_4$, $^1/_4$, $^1/_4$); » (1114).

Система трипараллелоэдровъ II порядка. Частица $(ClNH_4)_2$.

4. *Система атомовъ куприта.*

$$x_0 = n^{j+m} \overset{3}{a}_i + m^\lambda/_2;\ x_1 = n^{k+m} \overset{3}{a}_{i+n^m} + m^\lambda/_2;\ x_2 = n^{j+k+m} \overset{3}{a}_{i+2n^m} + m^\lambda/_2 \quad (3)$$

Координаты атомовъ Cu ($^1/_4$, $^1/_4$, $^1/_4$); символъ (1114)
» » O (000); символъ (0001).

Система гептапараллелоэдровъ II порядка. Частица Cu_2O.

5. *Система атомовъ сфалерита.*

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + f^\lambda/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + g^\lambda/_2;\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2n^m} + (f+g)^\lambda/_2 \quad (4)$$

Координаты атомовъ Zn ($^1/_2$ 00); символъ (1002)
» » S ($^1/_4$, $^1/_4$, $^1/_4$); символъ (1114).

Система гексапараллелоэдровъ I порядка. Частица SZn.

---

[1] Символъ (четырехзначный) выводится изъ трехъ дробныхъ индексовъ, если ихъ привести къ общему знаменателю, который и составитъ четвертый индексъ.

6. *Система атомовъ алмаза.*

$$x_0 = n^{j+l}\overset{3}{a}_i + (2f + l)^{\lambda}/_4;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + (2f + 2g + l)^{\lambda}/_4; \quad x_2 = n^{j+k}\overset{3}{a}_{i+2n^m} + (2g + l)^{\lambda}/_4 \qquad (5)$$

Въ видѣ единственнаго исключенія параллелоэдровъ системы нѣтъ.
Координаты атомовъ C (¹/₂ 00); символъ (1002).

7. *Система атомовъ флюорита.*

Уравненія тождественны съ (1).
Координаты атомовъ Ca (¹/₂ 00); символъ (1002)
» » F (¹/₄, ¹/₄, ¹/₄); символъ (1114).

Система трипараллелоэдровъ II порядка. Частица CaF_2.

8. *Система атомовъ пирита* (гауерита, кобальтина).

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + l^{\lambda}/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + j^{\lambda}/_2;\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+2} + k^{\lambda}/_2 \qquad (6)$$

Координаты атомовъ Fe (000); символъ (0001)
» » S (¹/₁₀, ¹/₁₀, ⁴/₁₀); символъ (114.10).

Система гексапараллелоэдровъ IV порядка. Частица $(FeS_2)_4$.

9. *Система атомовъ хлората натрія.*

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (j + k)^{\lambda}/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + j^{\lambda}/_2;\ x_2 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+2} + k^{\lambda}/_2 \qquad (7)$$

Если эти уравненія относятся къ правымъ кристалламъ, то къ лѣвымъ слѣдуетъ отнести уравненія

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (j + k)^{\lambda}/_2;\ x_1 = n^{j+k} \overset{3}{a}_{i+1} + k^{\lambda}/_2;\ x_2 = n^k \overset{3}{a}_{i+2} + j^{\lambda}/_2 \qquad (7a)$$

Координаты атомовъ Na (¹/₄, ¹/₄, ¹/₄); символъ (1114)
» » Cl ($\bar{1}$/₄, ¹/₄, ¹/₄); » ($\bar{1}$114)
» » O (¹/₄ 00); символъ (1004).

Система гексапараллелоэдровъ IV порядка. Частица $(ClO_3Na)_2$.

10. *Система атомовъ магнетита* (бл. шпинели, ганита).

$$x_0 = n^j \overset{3}{a}_i + (j + k + l)^{\lambda}/_2;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + (j + k + l)^{\lambda}/_2;\ x_2 = n^l \overset{3}{a}_{i+n^m} + (j + k + l)^{\lambda}/_2 \qquad (8)$$

Координаты атомовъ Fe″ (000); символъ (0001)

» » Fe‴ ($^1/_4$, $^1/_4$, $^1/_4$); символъ (1114)

» » O ($^1/_{12}$, $^1/_{12}$, $^{\bar{1}}/_{12}$); » ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.12).

Система гептапараллелоэдровъ II порядка. Частица $(Fe_2'''O_4Fe'')_2$.

Изъ десяти изоморфныхъ группъ веществъ такимъ образомъ выведено восемь различныхъ правильныхъ системъ точекъ. Если принять во вниманіе, что такихъ теоретически возможныхъ системъ кубической сингоніи всего 36, то становится весьма вѣроятнымъ, что со временемъ найдутся почти всѣ теоретически возможныя.

Пока сомнѣнія вызываютъ только системы (40) и (41) (правая или лѣвая), такъ какъ, насколько мнѣ извѣстно, кристалловъ, оптически активныхъ и имѣющихъ гироэдрическую симметрію, не найдено.

Выходя изъ предѣловъ кристалловъ кубической сингоніи, но оставаясь въ предѣлахъ кубическаго типа, мы для выбора осей и разсчета координатъ будемъ предполагать параллелоэдръ системы однородно деформированнымъ въ параллелоэдръ кубической сингоніи.

Кристаллы кубическаго типа и гексагональной сингоніи.

11. *Система атомовъ кальцита* (сидерита, родохрозита).

$$x_0 = n^k \overset{3}{a}_i + (j + k)^{\lambda}/_4;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+n^m} + (j + m)^{\lambda}/_4;\ x_2 = n^k \overset{3}{a}_{i+2n^m} + (k + m - f - g)^{\lambda}/_4 {}^{*} \qquad (9)$$

Координаты атомовъ C (000); символъ (0001)

» » Ca ($^1/_4$ 00); символъ (1004)

» » O ($^1/_{12}$, $^{\bar{1}}/_{12}$ 0); символъ (1$\bar{1}$0.12).

Система гептапараллелоэдровъ IV порядка. Частица $(CO_3Ca)_2$.

* Такъ какъ въ то время, когда составлялись формулы въ «Симметріи правильныхъ системъ фигуръ» раздѣленія на кубическій и гипогексагональный типы еще не были извѣстны, то онѣ были въ случаѣ гексагональной сингоніи приноровлены къ тому, что теперь мы относимъ къ гипогексагональному типу. Поэтому теперь пришлось измѣнить ихъ форму. Напримѣръ формулою (9) замѣнена тогдашняя форм. 47*h*.

12. *Система атомовъ доломита.*

$$x_0 = n^k \overset{3}{a}_i + (j+k)^\lambda/_4;\ x_1 = n^k \overset{3}{a}_{i+1} + (j+k)^\lambda/_4;\ x_2 = n^k \overset{3}{a}_{i+2} - (f+g)^\lambda/_4 \quad (10)$$

Координаты атомовъ C (000); символъ (0001)

» » Ca (1/4 00); символъ (1004)

» » Mg (1/4 00); » ($\bar{1}$004)

» » O (1/12, 1/12 0); символъ (1$\bar{1}$0.12).

Система гексапараллелоэдровъ II порядка. Частица (CO_3Ca) (CO_3Mg).

13. *Система атомовъ гематита* (корунда).

Уравненія тождественны съ (9).

Координаты атомовъ Fe (1/10, 1/10, 1/10); символъ (111.10)

» » O (1/12, 1/12 0); символъ (1$\bar{1}$0.12).

Система гептапараллелоэдровъ IV порядка. Частица $(FeO_3Fe)_2$.

14. *Система атомовъ ильменита.*

Уравненія тождественны съ (10).

Координаты атомовъ Fe (1/10, 1/10, 1/10); символъ (111.10)

» » Ti (1/10, 1/10, 1/10); » ($\bar{1}\bar{1}\bar{1}$.10)

» » O (1/12, 1/12 0); » (1$\bar{1}$0.12).

Система гексапараллелоэдровъ II порядка. Частица $(TiO_3Fe)_2$.

Кристаллы гипогексагональнаго типа.

15. *Система атомовъ кварца.*

$$y = n^k b - i^\lambda/_3;\ y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} + \lambda_0$$

и

$$y = n^k b + i^\lambda/_3;\ y_0 = \overset{3}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{3}{b}_{i+n^k} \lambda_0$$

(Здѣсь оси координатъ b_i приняты параллельными двойнымъ осямъ симметріи).

Координаты атомовъ Si (000); символъ (0001)

» » O (1/6, 1/4 0); символъ (230.12).

Система тетрапараллелоэдровъ III порядка. Частица $(SiO_2)_3$.

16. *Система атомовъ цинкита* (вуртцита, гренокита).

$$y = b + \lambda;\ y_0 = \overset{6}{b}_i + \lambda_0;\ y_1 = \overset{6}{b}_{i+1} + \lambda_0$$

Координаты атомовъ Zn ?[1]

» » O (1/2 00); символъ (1002).

Система тетрапараллелоэдровъ I порядка. Частица ZnO.

Резюмируя изложенное, мы видимъ, что въ кристаллографическомъ отношеніи все остается по старому: тѣ же два типа, тѣ же виды сингоніи и симметріи, тѣ же основные законы, тѣ же параллелоэдры какъ основы структуры кристалловъ; соотвѣтственно съ этимъ остаются тѣ же правильныя системы точекъ и ихъ выраженія, какъ геометрическія — посредствомъ параллелоэдровъ и элементовъ симметріи связи, такъ и аналитическія — посредствомъ уравненій[2].

Но въ химическомъ отношеніи приходится констатировать полный переворотъ. Приходится именно отбросить понятіе о химической частицѣ твердаго тѣла какъ обособленной группѣ атомовъ; приходится вообще видоизмѣнить понятія о твердомъ и жидкомъ тѣлѣ съ предполагаемыми въ нихъ двоякаго рода дѣйствующими силами: притягательными и отталкивательными.

Теперь твердое тѣло въ однородномъ состояніи (единый кристаллъ) представилось въ видѣ единой пространственной рѣшетки атомовъ, въ которой однако занята послѣдними лишь небольшая часть точекъ; въ однихъ атомахъ находится одинъ или нѣсколько добавочныхъ электроновъ, вызывающихъ притяженіе къ тѣмъ, которые лишены ихъ, и отталкиваніе отъ однородныхъ съ ними, и конечно, какъ притяженіе, такъ и отталкиваніе дѣйствуютъ по одному и тому же закону. Само расположеніе атомовъ въ точкахъ пространственной рѣшетки есть результатъ дѣйствія одинаковыхъ силъ притяженія и отталкиванія, приложенныхъ въ разныхъ направленіяхъ и останавливающихъ каждый атомъ около опредѣленнаго пункта равновѣсія.

---

[1] Изъ описанія Брагговъ положеніе атомовъ Zв въ параллелоэдрѣ и на шестерной оси симметріи выражено недостаточно ясно. Естественнѣе, въ согласіи со свойствами кристалла, допустить (1/6 00).

[2] Заслуживаетъ упоминанія тотъ фактъ, что всѣ эти основы и ихъ выраженія впервые были даны въ «Симметріи правильныхъ системъ фигуръ», которую ПАН. забраковала (1891) какъ совершенно незаслуживающую вниманія, а Баварская Академія за нее же причислила автора къ своимъ сочленамъ.

Примѣчаніе редактора: Указанное сочиненіе профессора Е. С. Федорова было представлено на соисканіе преміи Митрополита Макарія въ 1891 г. въ числѣ 30 работъ, и премія ему присуждена не была. *Непремѣнный Секретарь Императорской Академіи Наукъ Сергѣй Ольденбургъ.*

Такое пространство можетъ быть раздѣлено на равныя и параллельныя, опредѣленно разграниченныя части, то есть параллелоэдры, и содержимое всѣхъ параллелоэдровъ связано равенствомъ совмѣщенія или симметричности. Вотъ почему теперь особенно выдвигается значеніе основныхъ параллелоэдровъ, какъ такихъ ячеекъ или строительныхъ элементовъ кристаллическаго зданія, которое не можетъ быть раздѣлено на еще меньшія части. Все строеніе опредѣляется одною такою ячейкою, содержащимися въ ея предѣлахъ атомами и законами симметрическаго совмѣщенія одной такой ячейки со смежными. Открылась новая область научнаго вѣдѣнія—кристаллохимія, въ которой методы химіи и кристаллографіи слились неразрывными узами и которая выдвинула уже свои методы и свой основной законъ. Со временемъ ея методы получатъ конечно большое разнообразіе.

Для многихъ хорошо изученныхъ кристалловъ кубической сингоніи можно съ большою вѣроятностью принять совершенно опредѣленное расположеніе атомовъ, которое теперь безъ чертежа можно описать посредствомъ символовъ.

Для граната Al_2 ($Si_3O_{12}Ca_3$) нужно принять параллелоэдръ VI и комбинаціи атомовъ Si ($1\bar{1}04$)

» Ca (1104)

» O (1004) и ($1\bar{1}18$)

» Al (1118).

При этомъ симметрія параллелоэдра дитригонально-скаленоэдрическая; но три непересѣкающіяся пары реберъ (какъ въ пиритѣ) есть тройныя оси симметріи, а потому симметрія системы гексакисъ-октаэдрическая. Атомы Al составляютъ ядро, а наиболѣе плотное расположеніе атомовъ принадлежитъ плоскостямъ формы {110}.

Еще проще должно быть строеніе солей типа SiF_6K_2[1]. Параллелоэдръ есть также VI.

Символъ атомовъ Si (0001) (ядро)

» » K (1114)

» » F (1004)

---

[1] Для того, чтобы объяснить изоморфизмъ этой соли K съ солью NH_4, достаточно принять для N (1114), а для H (111.12).

Соль тетраметиламмонія получится изъ послѣдней замѣщеніемъ въ ней атомовъ H атомами C съ присоединеніемъ къ послѣднимъ въ плоскостяхъ октаэдра по три атома H.

Всѣ атомы (кромѣ ядра) располагаются въ плоскостяхъ формы $\{111\}$ наибольшей плотности.

Оставляю подъ вопросомъ возможность другихъ расположеній атомовъ, удовлетворяющихъ всѣмъ наблюденнымъ фактамъ.

Если даны символы $(a_0 a_1 a_2 a_3)$, $(b_0 b_1 b_2 b_3)$, $(c_0 c_1 c_2 c_3)$ трехъ атомовъ, по нимъ легко опредѣлить символъ проходящей чрезъ нихъ плоскости по формулѣ:

$$p_0 : p_1 : p_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & a_2 \\ b_3 & b_1 & b_2 \\ c_3 & c_1 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_3 & a_2 \\ b_0 & b_3 & b_2 \\ c_0 & c_3 & c_2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Эта формула выведена въ замѣткѣ въ Зап. Горн. Инст. VI, вып. 1.

Дополнительное примѣчаніе. Хотя тщательный пересмотръ и подтвердилъ правильность по существу всѣхъ приведенныхъ въ этой статьѣ (и предъидущей) изображеній параллелоэдровъ съ атомами, но оказалось, что въ нѣсколькихъ случаяхъ построеніе не согласовано съ основнымъ условіемъ *наименьшаго* пространства (стр. 361). Это относится къ мѣди (стр. 371), гдѣ нужно принять кубъ съ атомами въ четырехъ вершинахъ, къ флюориту (фиг. 11 стр. 371), гдѣ также нужно принять кубъ съ атомомъ F въ центрѣ и атомами Ca какъ въ мѣди, къ кальциту, гдѣ нужно принять гептапараллелоэдръ съ атомами C и Ca по одному въ центрахъ пинакоидовъ и атомами O въ трехъ вершинахъ того пинакоида, въ которомъ находятся атомы C. Три другія вершины съ атомами O выведутся изъ предъидущихъ, если принять во вниманіе, что въ центрахъ четырехугольныхъ граней помѣщаются центры обращенія. Совершенно то же самое относится и къ гематиту, но въ его параллелоэдрѣ одинъ единственный атомъ Fe находится на тройной оси симметріи въ разстояніи $^4/_5$ отъ грани, представляющей плоскость атомовъ O, то есть $^1/_5$ отъ центра.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Комета 1916a.

М. Вильева.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г.).

Элементы, полученные изъ наблюденій 24 и 27 февраля и 1-го марта.

$$\left.\begin{array}{r}\omega = 190^\circ 20'.57 \\ \Omega = 325\ 18.53 \\ i = \ 16\ 38.92\end{array}\right\}\ 1916.0$$

$$\log q = 0.19554$$

$T =$ 1916 Марта 8.5402 ср. Грин. вр.

Эфемерида для 12^h ср. Гринвичскаго времени.

		α vera.	δ vera.	log r.	log Δ.
1916	Марта 3	$8^h 59^m 13^s$	$+12^\circ\ 4'.8$	0.1960	9.7992
	4	59 27	11 33.5		
	5	8 59 44	11 2.3		
	6	9 0 3	10 31.4		
	7	0 25	10 0.6	0.1956	9.8064
	8	0 49	9 30.1		
	9	1 16	8 59.7		
	10	1 45	8 29.7		
	11	2 17	8 0.0	0.1957	9.8155
	12	2 50	7 30.8		
	13	3 26	7 1.9		
	14	4 3	6 33.4		

			α vera.		δ vera.	log r.	log Δ.
1916	Марта	15	$9^h4^m43^s$		6° 5'.3	0.1963	9.8264
		16	5 24		5 37.9		
		17	6 8		5 10.8		
		18	6 53		4 44.4		
		19	7 41		4 18.3	0.1974	9.8389
		20	8 30		3 52.8		
		21	9 20		3 27.9		
		22	10 12		3 3.5		
		23	11 15	+	2 39.7	0.1990	9.8530
		27	9 15.7	+	0 48	0.2014	9.8667
		29	18.1		0 0		
		31	20.5	—	0 46	0.2041	9.8822
	Апрѣля	2	23.0		1 31		
		4	25.6		2 14	0.2073	9.8985
		6	28.4		2 57		
		8	31.2		3 38	0.2109	9.9156
		10	34.1		4 17		
		12	37.1		4 55	0.2148	9.9327
		14	40.3		5 32		
		16	43.5		6 8	0.2192	9.9503
		18	46.8		6 43		
		20	50.1		7 18	0.2240	9.9683
		22	53.6		7 51		
		24	9 57.0		8 22	0.2290	9.9864
		26	10 0.5		8 52		
		28	4.1		9 21	0.2342	0.0046
		30	7.8		9 49		
	Мая	2	10 11.5	—	10 16	0.2397	0.0230

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Мартъ 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 7.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

15 АПРѢЛЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

15 AVRIL.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ“.

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ“ (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences“ (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ“ помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ“ помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій“.

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій“. При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій“, не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія“ разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія“ разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія“ принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того,— 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Докладъ о научной дѣятельности нѣкоторыхъ губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій по ихъ отчетамъ преимущественно за 1911—1914 гг.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Историческихъ Наукъ и Филологіи 9 марта 1916 г.).

А. Лаппо-Данилевскаго.

I.

Въ 1911 году Его Императорскому Величеству благоугодно было обратить монаршее вниманіе на состояніе архивовъ губернскихъ и уѣздныхъ городовъ имперіи: въ годичномъ собраніи Императорскаго Русскаго Историческаго Общества 18 марта Государь Императоръ поручилъ Обществу обсудить тѣ мѣры, которыми можно было-бы упорядочить дѣло сохраненія архивныхъ матеріаловъ въ мѣстныхъ учрежденіяхъ, что̀ существенно отразилось и на послѣдующей дѣятельности губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій.

Во исполненіе Высочайшей воли Августѣйшаго Почетнаго Предсѣдателя Императорскаго Русскаго Историческаго Общества и въ силу Высочайше утвержденнаго 19 февраля 1912 года особаго журнала Совѣта Министровъ, Общество образовало въ своей средѣ Особую Комиссію для приведенія въ ясность положенія мѣстныхъ правительственныхъ архивовъ и находящихся въ нихъ историческихъ матеріаловъ, а также для разработки мѣръ къ сохраненію тѣхъ историческихъ документовъ, которые нуждаются въ охранѣ.

Благодаря Всемилостивѣйше дарованнымъ Его Императорскимъ Величествомъ средствамъ, Императорское Русское Историческое Общество получило также возможность устроить въ 1914 году Съѣздъ представителей губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій и соотвѣтствующихъ имъ установленій съ цѣлью выработать рядъ мѣръ, которыя способствовали-бы дальнѣйшей правильной и систематической ихъ работѣ по охранѣ письмен-

ныхъ источниковъ нашей исторіи. Занятія Съѣзда, организація котораго была поручена Особой Комиссіи, происходили съ 6 по 8 мая того же года. Съѣздъ просилъ Августѣйшаго Предсѣдателя Общества Великаго Князя Николая Михаиловича повергнуть къ стопамъ Его Императорскаго Величества всеподданнѣйшее ходатайство о принятіи подъ Высочайшее Покровительство всѣхъ губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій и соотвѣтствующихъ имъ установленій, какъ сотрудниковъ Особой Комиссіи по архивной части, а также представить на Высочайшее благовоззрѣніе о всѣхъ ихъ нуждахъ.

Его Императорскому Величеству благоугодно было отнестись съ особо милостивымъ вниманіемъ къ трудамъ Съѣзда, о которыхъ Августѣйшій Предсѣдатель Общества имѣлъ счастье всеподданнѣйше докладывать 29 іюня 1914 года. Государь Императоръ соизволилъ выразить Свое согласіе на принятіе всѣхъ губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій подъ Высочайшее Его Императорскаго Величества Покровительство и поручилъ Его Императорскому Высочеству Великому Князю Николаю Михаиловичу обратиться отъ Высочайшаго Его Величества имени: 1) къ Министру Внутреннихъ Дѣлъ съ заявленіемъ, что было бы желательно открыть губернскія ученыя архивныя комиссіи по возможности во всѣхъ губерніяхъ, гдѣ до сихъ поръ ихъ не имѣется, и 2) къ Министру Народнаго Просвѣщенія — съ выраженіемъ пожеланія, чтобы въ законодательныя учрежденія внесено было представленіе объ ассигнованіи всѣмъ существующимъ губернскимъ ученымъ архивнымъ комиссіямъ и соотвѣтствующимъ имъ установленіямъ, имѣвшимъ быть на Съѣздѣ 6—8 мая, каждой по 3000 рублей ежегоднаго пособія на наемъ помѣщеній, на приглашеніе лицъ для постоянныхъ занятій и на опубликованіе наиболѣе важныхъ изъ находящихся у нихъ на храненіи документовъ.

Императорское Русское Историческое Общество сообщило архивнымъ комиссіямъ о таковомъ Высочайшемъ соизволеніи, а Особая Комиссія приступила къ исполненію постановленій Съѣзда, хотя и вынуждена была, въ виду условій военнаго времени, отказаться отъ немедленнаго исполненія нѣкоторыхъ изъ нихъ.

Вышеуказанныя мѣры коснулись, впрочемъ, лишь той стороны дѣятельности архивныхъ комиссій, которая посвящена сохраненію мѣстныхъ архивныхъ матеріаловъ; «разысканіе, описаніе и объясненіе всякихъ другихъ памятниковъ старины», не составляющее «прямой ихъ обязанности», хотя и предусмотрѣнное закономъ, до сихъ поръ происходитъ на прежнихъ основаніяхъ и осталось безъ существенныхъ перемѣнъ (см. Положеніе 1884 г., § 7).

Подъ вліяніемъ нараставшей потребности въ упорядоченіи архивнаго дѣла и въ охранѣ памятниковъ родной старины произошли также нѣкоторыя перемѣны и въ численномъ составѣ губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій: въ настоящее время общее ихъ число возрасло до 37; одна изъ нихъ — Кіевская, открытая 28 марта 1914 года, была даже предназначена для трехъ губерній: Кіевской, Подольской и Волынской, съ отдѣлами въ Житомірѣ и Каменцѣ Подольскомъ; другія, возникшія въ указанный періодъ времени и представившія свои отчеты, какъ-то Иркутская, Петроградская и Тульская, были учреждены на основаніи Высочайше утвержденнаго 13 апрѣля 1884 года положенія (§ 2), главнымъ образомъ, для собиранія и приведенія въ порядокъ архивныхъ дѣлъ соотвѣтствующихъ губерній, хотя иногда и распространяли свою полезную дѣятельность далеко за предѣлы своего округа, какъ напримѣръ, Иркутская комиссія. Вмѣстѣ съ тѣмъ нѣкоторыя изъ прежнихъ архивныхъ комиссій пріобрѣли гораздо болѣе сложную организацію и стали обнаруживать болѣе замѣтную дѣятельность. Въ отчетѣ за 1911—1912 гг. Нижегородская комиссія сообщаетъ, напримѣръ, что ею было образовано нѣсколько «комиссій» для осуществленія предпринятыхъ ею работъ, а именно: редакціонная комиссія и библіотечная комиссія, отдѣлъ по изслѣдованію древностей губерніи и комитетъ по устройству выставки «Нижегородской старины», а также особый отдѣлъ по вопросу о чествованіи 300-лѣтія событій 1611—1613 гг.; сверхъ того, она принимала участіе, въ лицѣ своихъ представителей, въ комиссіи по разбору «древнихъ» документовъ при губернскомъ правленіи, и въ комитетѣ по управленію художественнымъ и историческимъ музеемъ, а также въ комитетахъ по реставраціи каѳедральнаго собора и по сооруженію памятника Минину въ Нижнемъ-Новгородѣ. Нѣкоторыя изъ прежнихъ комиссій, нѣсколько ослабѣвшія въ своей дѣятельности, также стали оживляться: въ концѣ 1912 года, напримѣръ, Пермская комиссія, послѣ продолжительнаго перерыва, въ числѣ причинъ котораго не послѣднее мѣсто занимали событія 1904—1905 гг., снова приступила къ своимъ занятіямъ.

Несмотря на увеличеніе числа и оживленіе дѣятельности архивныхъ комиссій, наступившее въ послѣдніе годы, мнѣ приходится и въ настоящемъ моемъ докладѣ повторить то, что уже высказывалось мною въ предшествующихъ: по представленнымъ 13 архивными комиссіями отчетамъ нельзя судить о дѣятельности всѣхъ комиссій, несомнѣнно развившейся послѣ 18 марта 1911 года. Представленные въ Академію 22 отчета принадлежатъ слѣдующимъ архивнымъ комиссіямъ: Воронежской — за 1910-1911 гг. (1 дек.); Иркутской — за 1911-1912, 1912-1913 и 1913-1914 гг.:

Кіевской — за 1914 г.; Нижегородской — за 1911-1912 и 1912-1913 гг.; Пермской — за 1912-1913 и 1913-1914 гг.; Петроградской — за 1913 г.; Рязанской — за 1911 и 1912 гг.; Симбирской — за 1911 г.; Смоленской — за 1909-1910 г.; Таврической — за 1911 и 1912 гг.; Тамбовской — за 1912, 1913 и 1914 гг.; Тульской — за 1913-1914 гг.; Черниговской — за 1912 и 1913 гг. Такимъ образомъ, при просмотрѣ вышеприведеннаго списка нельзя не замѣтить въ немъ довольно значительныхъ пробѣловъ: въ Академію поступили отчеты, приблизительно, только трети архивныхъ комиссій (13 изъ 37); въ числѣ архивныхъ комиссій, отчеты которыхъ были получены прошлый разъ, нѣтъ: Владимірской, Вятской, Екатеринославской и Оренбургской; да и представленные отчеты не всегда примыкаютъ къ тѣмъ изъ нихъ, которые были присланы въ предшествующее время, напримѣръ, по комиссіямъ: Нижегородской и Таврической, отчеты которыхъ за 1910-1911 и 1910 годы не были доставлены въ Академію. Тѣмъ не менѣе значительное большинство разсматриваемыхъ отчетовъ относится къ одному и тому-же періоду времени — 1911-1914 гг., когда почти всѣ архивныя комиссіи уже были признаны мѣстными сотрудниками Особой Комиссіи при Императорскомъ Русскомъ Историческомъ Обществѣ по устройству архивнаго дѣла въ Россіи [1].

II.

Благодаря Высочайшему Его Императорскаго Величества покровительству, единовременнымъ пособіямъ, которыя Государю Императору благоугодно было жаловать нѣкоторымъ изъ архивныхъ комиссій по ходатайству Императорскаго Русскаго Историческаго Общества, а также другимъ благопріятнымъ условіямъ дѣятельность ихъ по архивной части нѣсколько оживилась. Всѣ онѣ получили отношеніе Императорскаго Русскаго Историческаго Общества о собраніи свѣдѣній касательно состоянія всѣхъ существующихъ въ ихъ районахъ или губерніяхъ правительственныхъ, общественныхъ и частныхъ архивовъ, по особой приложенной программѣ и, какъ видно изъ представленныхъ отчетовъ, многія изъ нихъ уже въ 1912 году приступили къ вышеозначеннымъ работамъ, результаты которыхъ вскорѣ обнаружились въ болѣе или менѣе подробныхъ обозрѣніяхъ ихъ состоянія, частью рукописныхъ, частью печатныхъ. Черниговская комиссія получила, напримѣръ, свѣдѣнія о 88 архивахъ, изъ числа которыхъ лишь 10 оказа-

[1] Изъ представленныхъ отчетовъ только одинъ, а именно отчетъ Смоленской губернской ученой архивной комиссіи относится къ 1910-1911 г.

лись въ удовлетворительномъ состояніи; Иркутская осмотрѣла архивы нѣсколькихъ волостныхъ правленій и т. п.

Сами архивныя комиссіи признаютъ «главнѣйшей стороной своей дѣятельности — описаніе и разработку архивнаго матеріала», причемъ, въ силу § 5 Высочайше утвержденнаго положенія 1884 года, обязаны заниматься «разборомъ» самихъ дѣлъ и документовъ, предназначенныхъ къ уничтоженію. Дѣйствительно, многія изъ архивныхъ комиссій самоотверженно отдаются такой работѣ въ собственныхъ своихъ «историческихъ архивахъ» и другихъ мѣстныхъ хранилищахъ: предсѣдатель Нижегородской комиссіи А. Я. Садовскій «разобралъ», напримѣръ, въ теченіе одного изъ отчетныхъ годовъ, свыше 1000 «древнихъ актовъ и документовъ»: члены Смоленской архивной комиссіи — Г. І. Василевскій, Д. Н. Розовъ и А. К. Бельтсонъ просмотрѣли до 730 дѣлъ, находящихся въ Копытинской башнѣ; предсѣдатель и члены Таврической архивной комиссіи А. П. Маркевичъ, А. И. Сѣницкій и В. А. Николаевскій знакомились съ дѣлами Таврическаго губернскаго правленія; членъ Черниговской архивной комиссіи Е. А. Корноуховъ приступилъ къ разбору «дѣлъ военныхъ разныхъ полковъ», хранимыхъ въ архивѣ губернскаго правленія, и т. п. Такой просмотръ не только обезпечиваетъ болѣе правильную научную оцѣнку дѣлъ, часто очень затруднительную, если довольствоваться одиѣми канцелярскими описями, но и ведетъ иногда къ открытіямъ: члену Кіевской комиссіи И. М. Каманину, пересмотрѣвшему 1492 дѣла Кіевской казенной палаты, напримѣръ, удалось найти, среди нихъ двѣ книги Румянцевской описи Малороссіи Кіевскаго и Переяславскаго полковъ и цѣлый рядъ другихъ важныхъ документовъ по исторіи края.

Впрочемъ, архивныя комиссіи не всегда могутъ строго придерживаться § 5 Высочайше утвержденнаго положенія 1884 года и, вмѣсто просмотра архивныхъ дѣлъ, судятъ о нихъ по описямъ, далеко не отличающимся совершенствомъ: Рязанская архивная комиссія, напримѣръ, на основаніи описей Московскаго коммерческаго суда, всего 1020 дѣлъ за 1837—1839 гг. и 528 дѣлъ за 1833—1845 гг., касавшихся взысканій и несостоятельности разныхъ фирмъ и т. п., пришла къ заключенію, что ни одно изъ нихъ не имѣетъ «научнаго значенія». Правильному разбору архивныхъ фондовъ нерѣдко мѣшаютъ слишкомъ широкій районъ дѣятельности комиссій, а также отсутствіе у нихъ надлежащаго помѣщенія и подготовленныхъ работниковъ. Въ противоположность тѣмъ архивнымъ комиссіямъ, которыя имѣли возможность ограничить кругъ ея предѣлами одной своей губерніи или, подобно Нижегородской, постепенно сосредоточились на немъ, другія

до сихъ поръ вѣдаютъ болѣе значительныя области: Рязанская комиссія, напримѣръ, давала свои заключенія по описямъ дѣлъ, представленнымъ Московскимъ губернскимъ правленіемъ, Московской главной таможней и другими учрежденіями; Тамбовская комиссія просматривала описи Бакинской казенной палаты; Черниговская комиссія знакомилась съ описями дѣлъ, присланными изъ различныхъ присутственныхъ мѣстъ Кіевской, Подольской, Волынской и Минской губерній; Иркутская комиссія сносилась съ начальниками всѣхъ вообще сибирскихъ губерній и т. п. Въ такихъ случаяхъ архивныя комиссіи, очевидно, не могутъ заниматься разборомъ архивныхъ дѣлъ и должны ограничиваться просмотромъ ихъ описей, хотя сами готовы признать его недостаточнымъ. Состоящая при Петроградской архивной комиссіи «особая комиссія» пришла, напримѣръ, къ заключенію, что «опредѣлить на основаніи только описей, какія изъ предназначенныхъ къ уничтоженію дѣлъ могутъ имѣть въ будущемъ научное значеніе и какія — нѣтъ, невозможно», и нашла, что «она не въ состояніи категорически, по существу, опредѣлить, какія дѣла изъ внесенныхъ въ описи подлежащимъ уничтоженію дѣламъ правительственныхъ учрежденій Ямбургскаго уѣзда нужно хранить и какія — нѣтъ, безъ разсмотрѣнія самыхъ дѣлъ». Въ еще болѣе тяжеломъ положеніи находятся архивныя комиссіи, просматривающія описи дѣлъ касательно такихъ мѣстностей, которыя имѣютъ свое, отличное отъ ихъ губерніи, историческое прошлое и свои особенности: Черниговская архивная комиссія, напримѣръ, признала «затруднительнымъ давать заключеніе о дѣлахъ по описямъ кіевскихъ, подольскихъ, волынскихъ и минскихъ учрежденій». Труды подобнаго рода еще болѣе задерживаются изъ-за недостатка въ приспособленныхъ для нихъ помѣщеніяхъ и въ подготовленныхъ работникахъ: большинство архивныхъ комиссій еще не имѣетъ своихъ собственныхъ помѣщеній да и постоянныхъ работниковъ, которые могли бы производить въ нихъ разборку дѣлъ, не получили еще возможности устроить и собственные архивы, въ которыхъ они могли-бы храниться согласно правиламъ архивнаго дѣла. Нѣкоторыя архивныя комиссіи, правда, уже успѣли организовать такія хранилища: Нижегородская и Воронежская комиссіи, напримѣръ, располагаютъ извѣстными помѣщеніями и успѣшно работаютъ надъ описаніемъ поступающихъ въ нихъ рукописей; Пермская комиссія также содержитъ въ настоящее время свой историческій архивъ въ лучшемъ видѣ. Большинство архивныхъ комиссій находится, однако, въ гораздо менѣе благопріятномъ положеніи: онѣ пользуются временными помѣщеніями, подобно Кіевской, или вовсе лишены возможности надлежащимъ образомъ хранить свои бумаги: Тамбовская комиссія, напримѣръ, вынуждена была

сложить всѣ связки архивныхъ неразобранныхъ своихъ дѣлъ въ «подвалъ Коннозаводскаго собранія». Вмѣстѣ съ тѣмъ нельзя не замѣтить, что, даже при наличности достаточныхъ помѣщеній для губернскихъ историческихъ архивовъ, послѣдніе могли-бы получить надлежащее устройство лишь при учрежденіи постоянныхъ должностей архиваріусовъ, которыя, при извѣстномъ матеріальномъ обезпеченіи, должны были-бы замѣщаться людьми, знающими архивное дѣло; сами архивныя комиссіи, напримѣръ, Черниговская указываютъ на необходимость созданія такихъ должностей.

Образованіе губернскихъ историческихъ архивовъ сопряжено съ перевозкой дѣлъ, которая также могла-бы быть облегчена. Саратовская архивная комиссія уже обратилась въ Министерство Путей Сообщенія съ ходатайствомъ о примѣненіи льготнаго тарифа къ перевозкѣ въ архивныя комиссіи дѣлъ изъ разныхъ учрежденій по желѣзнымъ дорогамъ, такъ какъ въ номенклатурѣ перевозимыхъ по нимъ грузовъ не имѣется рубрики для старыхъ архивныхъ дѣлъ. Примѣру Саратовской архивной комиссіи послѣдовала Рязанская.

Несмотря на такія условія, нѣкоторымъ изъ архивныхъ комиссій удалось содѣйствовать сохраненію архивныхъ фондовъ, принадлежащихъ правительственнымъ учрежденіямъ: Черниговская комиссія высказалась въ пользу сохраненія значительнаго числа дѣлъ Кіевской казенной палаты 1782—1863 гг., представляющихъ большой интересъ для исторіи края; Рязанская комиссія возбудила вопросъ объ охранѣ архивовъ мѣстныхъ уѣздныхъ предводителей дворянства; Иркутская комиссія приняла мѣры къ перемѣщенію въ Иркутскъ дѣлъ, находившихся въ г. Киренскѣ и восходящихъ частью къ 1727 году, частью къ еще болѣе «отдаленному времени», и т. п. Вмѣстѣ съ тѣмъ архивныя комиссіи не могли остаться равнодушными къ тѣмъ домашнимъ, преимущественно дворянскимъ архивамъ, которымъ нерѣдко грозитъ гибель: Нижегородская комиссія хранитъ, напримѣръ, документы архивовъ: Марковниковыхъ, Саламыковыхъ, «Шереметьевыхъ» (с. Богородскаго), Латухина, с. Мурашкина, с. Толмачева; Симбирская комиссія — архивы Таушева, Пантусова и Волкова; Тамбовская — архивы Канкриныхъ-Ламбертъ-Сухтеленъ; Тульская комиссія, возбудившая анкету касательно вотчинныхъ архивовъ, рѣшила пріобрѣсти покупкою архивы Іевлевыхъ и Авдѣевыхъ и т. п.

Къ сожалѣнію мѣстныя правительственныя учрежденія не всегда своевременно увѣдомляютъ архивныя комиссіи о предстоящемъ уничтоженіи дѣлъ, что лишаетъ ихъ возможности принять мѣры къ ихъ сохраненію, если-бы таковыя оказались нужными: Пермская архивная комиссія сооб-

щаетъ, напримѣръ, что Уральское горное правленіе подвергло уничтоженію до 41.240 дѣлъ, относящихся къ 1722 — 1863 годамъ, безъ заключенія комиссіи.

III.

Высочайше утвержденное положеніе 1884 года предусматриваетъ и другія занятія архивныхъ комиссій: оно предоставляетъ имъ право, независимо отъ прямой своей обязанности, заниматься «разысканіемъ, описаніемъ и объясненіемъ всякихъ другихъ памятниковъ старины» (§ 7). Въ настоящее время архивныя комиссіи широко пользуются такимъ правомъ: большинство изъ нихъ занимается археологическими работами; результаты нѣкоторыхъ изъ нихъ указаны и въ разбираемыхъ отчетахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, вышеназванныя архивныя комиссіи продолжали заботиться объ охранѣ мѣстныхъ древностей и заниматься раскопками, что позволяло имъ обогащать свои музеи вновь найденными предметами. Нижегородская комиссія образовала даже «особый отдѣлъ по изученію и охранѣ памятниковъ древностей губерніи»; Таврическая комиссія обсуждала сообщеніе Ставропольской комиссіи, возбудившей вопросъ объ изданіи закона, который предупреждалъ-бы уничтоженіе памятниковъ древности при разнаго рода сооруженіяхъ, въ особенности дорожныхъ, и пріостановила производство частными лицами хищническихъ раскопокъ въ нѣкоторыхъ мѣстахъ, напримѣръ, въ урочищѣ Бакла близъ села Мангуши Симферопольскаго уѣзда; Рязанская комиссія пополняла имѣющійся у нея списокъ старинныхъ церквей, построенныхъ во второй половинѣ XVIII вѣка, хотя и отказалась, въ виду установленія непосредственныхъ сношеній духовной консисторіи съ Императорской Археологической Комиссіей, отъ дачи заключеній по ремонту и разрушенію древнихъ храмовъ; Смоленская комиссія съ особеннымъ вниманіемъ отнеслась къ вопросу объ охраненіи Смоленской крѣпостной стѣны и т. п.

Вмѣстѣ съ тѣмъ, нѣкоторыя изъ архивныхъ комиссій предпринимали и кое-какія изслѣдованія. Иркутская комиссія командировала, напримѣръ, нѣкоторыхъ изъ своихъ членовъ на Ангару (разъѣздъ «Китой» и др.), гдѣ имъ удалось найти многіе предметы преимущественно «неолитическаго» періода, между прочимъ нѣсколько вещей изъ «нефрита»; Воронежская комиссія приступила къ раскопкамъ въ урочищѣ «Частые Курганы» близь города Воронежа: въ одномъ изъ кургановъ (№ 3) найдена была весьма цѣнная серебряная, со слѣдами позолоты, ваза съ изображеніями трехъ паръ скиѳовъ, сидящихъ на камняхъ, сходная съ извѣстной Кульобской

вазой, а также другіе предметы, заслуживающіе вниманія; Смоленская комиссія разрыла холмъ на Смядыни, подъ которымъ оказались развалины стѣнъ небольшого храма, «судя по кирпичной кладкѣ и фрескамъ—большой древности»; Черниговская комиссія продолжала обслѣдованіе городища возлѣ села Выползова, гдѣ сохранились культурные остатки «славянской эпохи», и т. п.

Благодаря такимъ разслѣдованіямъ, а также болѣе или менѣе случайнымъ пріобрѣтеніямъ и пожертвованіямъ архивныя комиссіи могли пополнять свои музеи, причемъ уже стали обращать вниманіе и на другіе способы, напримѣръ, на экскурсіи или приглашеніе особыхъ агентовъ изъ среды мѣстнаго населенія, которые могли-бы доставлять имъ различные предметы. Несмотря на ограниченность силъ и средствъ большинства архивныхъ комиссій, нѣкоторыя изъ нихъ уже получили возможность придать своимъ музеямъ болѣе прочную организацію. Симбирская комиссія сосредоточила свою дѣятельность на вопросѣ о сооруженіи историко-археологическаго музея въ память И. А. Гончарова, на которое въ теченіе года съ небольшимъ, ей удалось собрать по подпискѣ свыше 52.000 рубл.; Воронежская комиссія занята была постройкой «Воронежскаго губернскаго музея» и даже приступила къ изданію особаго «Вѣстника», въ которомъ она даетъ отчетъ о ходѣ этихъ работъ; Черниговская комиссія устраивала музей, съ 1909 года соединенный съ городскимъ историческимъ музеемъ и привлекшій въ 1912—1913 годахъ около 3.000 посѣтителей. Потребность въ такихъ учрежденіяхъ чувствуется и въ другихъ мѣстахъ: Таврическая комиссія получила, напримѣръ, въ 1911 году отъ земства 2.000 рубл. «на сооруженіе музея древностей»; Нижегородская комиссія выдвинула «вопросъ о спеціальномъ приспособленномъ именно для музея зданіи» и т. п. Возникновеніе мѣстныхъ музеевъ тѣмъ болѣе желательно, что оно будетъ способствовать болѣе тщательному сохраненію предметовъ, иногда даже вывозимыхъ за границу: Черниговская комиссія свидѣтельствуетъ, напримѣръ, о сильномъ развитіи спроса на старинныя вещи со стороны частныхъ собирателей и о «громадномъ» вывозѣ русскихъ древностей за границу.

Въ числѣ другихъ археологическихъ работъ, производившихся архивными комиссіями, отмѣтимъ слѣдующія: Нижегородская и Смоленская комиссіи подготовляли матеріалы для составленія археологическихъ картъ своихъ губерній; кромѣ того, Нижегородская комиссія озабочена была изданіемъ каталога предметовъ древности, хранимыхъ въ ея музеѣ, а Черниговская составила новый каталогъ своихъ коллекцій, который и сдала въ печать въ 1914 году.

Въ предшествующихъ докладахъ мнѣ приходилось еще указывать и на этнографическія изслѣдованія, производившіяся нѣкоторыми изъ архивныхъ комиссій. Въ настоящее время ими стала заниматься и Воронежская комиссія: члены ея собирали народныя пѣсни, «зарисовывали головные уборы и типы крестьянъ данной мѣстности» и т. п.[1]

При производствѣ подобнаго рода археологическихъ и этнографическихъ работъ фотографія, разумѣется, можетъ оказывать самыя разнородныя услуги и вмѣстѣ съ археологическими картами содѣйствуетъ сохраненію древностей или, по крайней мѣрѣ, точныхъ свѣдѣній о нихъ: Нижегородская комиссія предприняла систематическое, по выработанной программѣ, фотографированіе, съ разрѣшенія начальника губерніи, нижегородскихъ древностей; Тульская комиссія также «заказала» фотографическіе снимки съ различныхъ памятниковъ мѣстной старины; другія, архивныя комиссіи, однако, еще недостаточно пользуются такимъ научнымъ средствомъ, на что указываютъ, напримѣръ, вышеприведенныя свѣдѣнія объ этнографическихъ работахъ нѣкоторыхъ изъ членовъ Воронежской комиссіи.

Въ числѣ учрежденій, составляющихъ предметъ заботъ архивныхъ комиссій, нельзя не упомянуть также о ихъ библіотекахъ. Пополненіе ихъ, къ сожалѣнію, производится не столько систематически, сколько довольно случайно, что̀, разумѣется, обусловлено недостаткомъ средствъ и силъ. Впрочемъ, нѣкоторыя архивныя комиссіи, напримѣръ, Иркутская обращались непосредственно къ директору Археологическаго Института съ просьбой выслать имъ наложнымъ платежемъ «такое сочиненіе по иконографіи и лекціи по археологіи, которыя служили бы указателями для ея работъ», а также, безплатно, тѣ руководства, которыя, по мнѣнію директора, были-бы «полезны комиссіи въ ея дѣятельности на пользу науки вообще». Другія архивныя комиссіи, напримѣръ, Черниговская, признали полезнымъ принять предложеніе Пензенской комиссіи объ обмѣнѣ съ нею дубликатами. Тѣмъ не менѣе многія архивныя комиссіи рѣдко сами пріобрѣтаютъ книги (напримѣръ, Черниговская въ 1913 году купила 1 книгу) и принуждены довольствоваться болѣе или менѣе случайными пожертвованіями: Тамбовская комиссія заявляетъ, напримѣръ, что «подборъ книгъ для ея библіотеки, какъ почти во всѣхъ комиссіяхъ, носитъ случайный характеръ; нѣтъ ни одного цѣлаго систематически подобраннаго отдѣла»; поэтому библіотека

---

[1] Въ нѣкоторой связи съ этнографическими наблюденіями находится и изученіе мѣстныхъ географическихъ названій, до сихъ поръ, однако, мало обращавшее на себя вниманіе архивныхъ комиссій: изъ представленныхъ отчетовъ видно, впрочемъ, что Тульская комиссія уже образовала цѣлую подкомиссію по изученію географическихъ названій губерніи.

вышеназванной комиссіи, «несмотря на значительное количество имѣющихся въ ея распоряженіи книгъ, тѣмъ не менѣе не оправдываетъ своего назначенія». Книжныя собранія нѣкоторыхъ архивныхъ комиссій все же оказываются довольно значительными: въ библіотекѣ Рязанской комиссіи числится, напримѣръ, около 13.000, въ Пермской — около 10.000 книгъ; притомъ, нѣкоторыя изъ комиссій особенно заботятся объ образованіи тѣхъ фондовъ, которые имѣютъ ближайшее отношеніе къ мѣстной исторіи: Рязанская комиссія, напримѣръ, выдѣлила изъ общаго завѣдыванія особый отдѣлъ «Рязаніана». Въ связи съ попытками подобнаго рода находятся и работы по составленію библіографическихъ указателей книгъ, статей и замѣтокъ, касающихся исторіи даннаго края, въ родѣ того, напримѣръ, который составляется Нижегородской комиссіей.

Помимо вышеуказанныхъ работъ по устройству, пополненію, храненію и описанію разнообразныхъ письменныхъ и вещественныхъ памятниковъ старины дѣятельность архивныхъ комиссій продолжала обнаруживаться на засѣданіяхъ ихъ членовъ, въ предпринимаемыхъ ими изданіяхъ, въ организаціи выставокъ и въ другихъ работахъ.

Нѣкоторыя архивныя комиссіи собирались довольно часто: Нижегородская комиссія, напримѣръ, въ теченіе отчетныхъ годовъ, имѣла 11 — 12 засѣданій, на которыхъ читано было до 52 — 63 докладовъ и сообщеній, причемъ посѣщаемость собранія, среднимъ числомъ, доходила въ послѣдній годъ (1913) почти до 30 человѣкъ; другія архивныя комиссіи, хотя и устраивали достаточное число засѣданій, напримѣръ, Воронежская и Пермская по 9 разъ, но обсуждали меньшее число докладовъ, привлекавшихъ и меньшее число посѣтителей. Нѣкоторыя изъ такихъ засѣданій посвящались памяти извѣстныхъ событій и лицъ: Иркутская, Тамбовская и Тульская комиссіи, напримѣръ, устроили торжественныя собранія въ память трехсотлѣтняго юбилея дома Романовыхъ; Рязанская, Таврическая, Тамбовская и Тульская праздновали столѣтній юбилей Отечественной войны; Таврическая и Черниговская — пятидесятилѣтній юбилей освобожденія крестьянъ; кромѣ того Нижегородская и Таврическая имѣли по одному засѣданію, посвященному празднованію 25-лѣтія со дня своего основанія. Вмѣстѣ съ тѣмъ нѣкоторыя архивныя комиссіи организовали засѣданія въ память извѣстныхъ лицъ, напримѣръ: Нижегородская — въ память кончины св. патріарха Гермогена, Тульская — въ память М. В. Ломоносова и П. С. Палласа, Воронежская — въ память Н. И. Костомарова и И. С. Никитина, Тульская — въ память М. Ю. Лермонтова и М. Е. Салтыкова.

Кромѣ засѣданій, архивныя комиссіи проявляли свою дѣятельность и

въ изданіи своихъ трудовъ, иногда довольно напряженномъ: въ теченіе 1912 года Нижегородская комиссія, напримѣръ, напечатала свыше 93 листовъ, въ томъ числѣ юбилейные сборники, посвященные знаменательнымъ событіямъ 1611—1613 годовъ и реформѣ 19 февраля, а въ 1913 году свыше 85 листовъ, въ томъ числѣ юбилейные сборники въ память трехсотлѣтія царствованія Романовыхъ и столѣтія Отечественной войны; Воронежская, Иркутская, Рязанская, Тульская и Черниговская комиссіи издавали свои «Труды», Тамбовская — «Извѣстія», Смоленская — «Смоленскую Старину» и т. д. Въ числѣ подготовляемыхъ къ печати матеріаловъ слѣдуетъ отмѣтить работы Нижегородской и Тульской комиссій по изданію относящихся къ нимъ писцовыхъ книгъ: изученіе ихъ всего лучше могло бы подвигаться впередъ при содѣйствіи мѣстныхъ научныхъ силъ. Впрочемъ, и въ такихъ предпріятіяхъ архивныя комиссіи были вынуждены постоянно считаться съ ограниченностью своихъ средствъ: Воронежская комиссія, напримѣръ, должна была отказаться отъ дальнѣйшаго изданія своихъ «Трудовъ» и пріостановить печатаніе «Описанія древнихъ Воронежскихъ актовъ» В. Н. Тевяшева, систематическаго указателя къ древнимъ Воронежскимъ актамъ А. И. Милютина и т. п.; Рязанская комиссія была значительно стѣснена въ средствахъ, такъ какъ губернская типографія, печатавшая ея «Труды», безплатно въ теченіе 25 лѣтъ, потребовала въ 1912 году хотя бы «минимальнаго» вознагражденія и т. п.

Въ числѣ различныхъ научныхъ или научно-популярныхъ предпріятій архивныхъ комиссій нельзя не упомянуть и объ устройствѣ выставокъ, большею частью имѣвшихъ замѣтный успѣхъ. Воронежская комиссія, напримѣръ, устроила «историко-археологическую и художественную» выставку памяти Н. И. Костомарова, причемъ нѣкоторые рукописные матеріалы, касающіеся его біографіи, нашлись въ Воронежѣ во время подготовительныхъ работъ; священникъ С. Е. Звѣревъ составилъ подробный систематическій указатель выставки; отъ продажи входныхъ билетовъ, каталоговъ, портретовъ и проч. было выручено 818 руб. 49 коп., не считая пожертвованій; та же комиссія организовала еще выставку, посвященную памяти И. С. Никитина. Иркутская комиссія также открыла выставку предметовъ мѣстной старины, рукописей и книгъ, вещей, принадлежавшихъ нѣкоторымъ изъ декабристовъ, предметовъ бурятскаго обихода и т. п.; выставку посѣтило болѣе 1000 человѣкъ.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ архивныя комиссіи заботились о сооруженіи памятниковъ или принимали въ немъ участіе и такимъ образомъ содѣйствовали оживленію интереса мѣстнаго общества къ событіямъ и лицамъ, имѣв-

шимъ отношеніе къ исторіи края. Тамбовская комиссія занята была, напримѣръ, постройкой часовни-сѣни надъ колодцемъ близъ села Романова — бывшей вотчины первыхъ бояръ Романовыхъ; Тульская комиссія послала своихъ представителей въ село Русятино на освященіе памятника А. Т. Болотову и т. п.

IV.

Вообще, судя по представленнымъ въ Академію отчётамъ, нѣкоторыя изъ архивныхъ комиссій проявили довольно значительную дѣятельность, въ особенности Нижегородская, Воронежская, Тульская и Черниговская, а также Рязанская и Иркутская. Многіе мѣстные дѣятели посвящали свои силы такимъ работамъ: свящ. С. Е. Звѣревъ — въ Воронежѣ, М. М. Щуцкій и М. П. Овчинниковъ — въ Иркутскѣ; А. Я. Садовскій, а также С. М. Парійскій и Н. И. Драницынъ — въ Нижнемъ-Новгородѣ; И. И. Проходцевъ — въ Рязани; П. Л. Мартыновъ — въ Симбирскѣ; А. И. Маркевичъ — въ Симферополѣ; В. С. Арсеньевъ — въ Тулѣ; В. Л. Модзалевскій и Е. А. Корноуховъ — въ Черниговѣ.

Просвѣщенное отношеніе духовныхъ и свѣтскихъ властей также способствовало развитію научной дѣятельности архивныхъ комиссій: архіепископъ Иркутскій Серафимъ обѣщалъ мѣстной комиссіи оказать содѣйствіе поддержанію религіозно-историческихъ памятниковъ въ предѣлахъ Иркутской епархіи и разрѣшилъ комиссіи воспользоваться для устраиваемой ею выставки церковно-археологическими предметами, находящимися въ мѣстныхъ храмахъ и монастыряхъ; преосвященный Дмитрій разрѣшилъ Рязанской комиссіи помѣстить въ своемъ музеѣ царскія врата и иконы изъ церкви села Федотьева Спасскаго уѣзда; гр. П. Н. Апраксинъ, бывшій предсѣдатель Воронежской комиссіи и непремѣнный попечитель Таврической комиссіи, принималъ живое участіе въ ихъ дѣятельности; Иркутскій городской голова К. М. Жбановъ предоставилъ мѣстной комиссіи зданіе городской управы для занятій и засѣданій и устроилъ помѣщеніе для ея библіотеки, музея и старинныхъ дѣлъ.

Скудныя средства, которыми располагаютъ архивныя комиссіи, не даютъ имъ возможности, однако, правильно вести столь разнообразныя работы: кромѣ Высочайше жалуемыхъ единовременныхъ денежныхъ пособій, лишь немногія изъ нихъ, пользовались болѣе или менѣе значительными правительственными субсидіями отъ министерства внутреннихъ дѣлъ, а именно: Тамбовская въ размѣрѣ 1.000 рубл. и Тульская — въ размѣрѣ 700 рубл., обѣ въ 1914 году; почти всѣ остальныя получали изъ того-же министерства

лишь обычныя 200 рубл. Большинство архивныхъ комиссій пользовалось, кромѣ того, пособіями, выдаваемыми имъ земскими и городскими учрежденіями, напримѣръ, Воронежская, Пермская, Рязанская, Симбирская, Таврическая и Черниговская. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ частныя лица приходили на помощь архивнымъ комиссіямъ: Воронежскій губернскій предводитель дворянства А. И. Алехинъ пожертвовалъ, напримѣръ, мѣстной комиссіи 500 рубл. на изданіе матеріаловъ, касающихся участія Воронежскаго дворянства въ Отечественной войнѣ; гр. С. А. Строгановъ принесъ въ даръ Пермской комиссіи 300 рублей; Аблякимъ Куламетъ Эфенди передалъ Таврической комиссіи «пожертвованіе неизвѣстнаго лица» въ размѣрѣ 200 рубл.; княгиня М. К. Тенишева предоставила Смоленской комиссіи средства на производство раскопокъ и на обстановку канцеляріи; исполняющій должность Рязанскаго губернатора князь А. Н. Оболенскій принялъ на себя расходы по капитальному ремонту всего помѣщенія Рязанской комиссіи и ея музея и т. п.

Тѣмъ не менѣе средства многихъ архивныхъ комиссій оставались крайне ограниченными: Иркутская комиссія, напримѣръ, въ теченіе первыхъ полутора лѣтъ своего существованія, не имѣла денегъ «даже на пріобрѣтеніе канцелярскихъ принадлежностей и на переписку бумагъ»; Петроградская комиссія исчисляла свой приходъ въ 1913 году въ размѣрѣ 442 рубл. и закончила годъ съ остаткомъ въ 208 рубл. 52 коп.; Тамбовская комиссія заприходовала въ 1913 году 515 рубл. 4 коп. и, за вычетомъ произведеннаго расхода, осталась при 75 рубл. 19 коп. и т. п. Такое положеніе нельзя признать нормальнымъ, а между тѣмъ оно вредно отражается на дѣятельности архивныхъ комиссій: за недостаткомъ средствъ онѣ часто стѣснены помѣщеніемъ, не могутъ надлежащимъ образомъ устроить свои музеи и архивы, не въ состояніи содержать платныхъ работниковъ, которые могли-бы спеціально заниматься каталогизированіемъ вещественныхъ и письменныхъ памятниковъ древности, и удѣлять время для ихъ осмотра и просмотра, не имѣютъ свободныхъ суммъ для производства описаній матеріаловъ и правильнаго изданія своихъ трудовъ.

Задача ближайшаго будущаго — обезпечить архивныя комиссіи матеріальными средствами, нужными для того, чтобы дать возможность мѣстнымъ дѣятелямъ приступить къ правильной организованной научной работѣ, посвященной живому изученію памятниковъ родной старины.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène.

Par A. Liapounoff (Liapunov).

Première Partie.

(Presenté à l'Académie le 2/15 mars 1916).

Étant considérée une masse fluide hétérogène dont les éléments s'attirent mutuellement suivant la loi de Newton, et dont la surface est soumise à une pression constante, si cette masse se trouve en une rotation uniforme autour d'un axe fixe comme un corps solide, peut-elle conserver une figure peu différente d'un ellipsoïde quand la densité est supposée ne varier au sein du liquide qu'entre des limites assez étroites?

Cette question faisait l'objet de mes recherches pendant les deux dernières années, et je suis parvenu à la résoudre complètement dans des hypothèses très générales.

Je ferai connaître les résultats de ces recherches dans un Mémoire que je me propose de publier prochainement. Quant à présent, je veux attirer l'attention sur une nouvelle méthode pour traiter la question dans le cas d'un liquide homogène, méthode qui m'a été inspirée par les recherches dont je viens de parler, et qui n'est au fond que l'application au cas particulier d'un liquide homogène des considérations générales qui se présentent d'elles-mêmes dans le cas d'un liquide hétérogène.

Cette méthode mérite d'être signalée, puisqu'elle donne des renseignements sur les propriétés très cachées des fonctions qui figurent dans la solution du problème. C'est ainsi qu'elle permet d'établir d'une manière générale une proposition (sur les degrés de certaines fonctions entières) indiquée comme vraisemblable dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures*

d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation (n° 48).

---

1. En reprenant les notations que nous avons employées dans le Travail qui vient d'être cité, considérons un ellipsoïde singulier E_0 à demi-axes

$$\sqrt{\rho+1}, \qquad \sqrt{\rho+q}, \qquad \sqrt{\rho}$$

et la série de figures d'équilibre non ellipsoïdales qui en dérive.

Pour représenter la surface d'une telle figure, partons des équations que nous avons admises dans la quatrième Partie du Travail cité; mais à présent écrivons-les comme il suit:

$$x = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta,$$

en réservant la notation ζ pour une fonction plus générale, qui sera définie plus loin.

Dans ces équations, $\bar{\zeta}$ est une fonction de θ et ψ dépendant d'un certain paramètre α, et nous avons vu que ce paramètre peut être choisi de telle manière qu'on ait

$$(1) \qquad \bar{\zeta} = \bar{\zeta}_1\alpha + \bar{\zeta}_2\alpha^2 + \bar{\zeta}_3\alpha^3 + \cdots,$$

la série du second membre étant absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ, tant que $|\alpha|$ est assez petit.

Les coefficients $\bar{\zeta}_i$ de cette série sont des fonctions rationnelles entières des arguments

$$\sin\theta\cos\psi, \qquad \sin\theta\sin\psi, \qquad \cos\theta,$$

mais, sans nuire à la généralité, on peut supposer que ce soient des fonctions entières de deux arguments: $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, paires par rapport à $\cos\theta$ et paires ou impaires par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, suivant les cas, et nous le supposerons toujours dans la suite.

Les degrés de ces fonctions dépendent du choix de l'ellipsoïde E_0, qui est caractérisé par une équation transcendante entre ρ et q, représentée, avec les notations que nous avons adoptées, par

$$T_{m,\,2k} = 0,$$

où m est un entier quelconque plus grand que 2 et k est un entier positif ou nul, ne dépassant pas m et tel que $m - k$ soit un nombre pair. Dans le cas où E_0 est un ellipsoïde de Jacobi (cas où $q < 1$), on aura toujours $k = m$ et, dans le cas où c'est un ellipsoïde de Maclaurin (cas où $q = 1$), k pourra avoir toute valeur de la suite

$$m, \qquad m - 2, \qquad m - 4, \qquad \ldots.$$

Cela étant, le degré de la fonction ζ_i par rapport à $\sin\theta \cos\psi$ et $\cos\theta$ sera égal à mi, et, par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, ce sera une fonction paire ou impaire, selon que le nombre mi est pair ou impair.

Ajoutons que, si E_0 est un ellipsoïde de Maclaurin, les ζ_i se réduiront à des fonctions entières de ces deux arguments:

$$\sin^k\theta \cos k\psi \qquad \text{et} \qquad \cos^2\theta.$$

Tels seront supposés, dans ce qui suit, les coefficients ζ_i de la série (1).

2. Pour ce qui va suivre, il est nécessaire de présenter les équations de la surface d'une figure d'équilibre sous une forme un peu différente de la forme précédente et, pour cette nouvelle forme, nous prendrons la suivante:

$$(2) \qquad \begin{cases} x = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi + \beta\sqrt{\rho+1}, \\ y = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi, \\ z = \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta, \end{cases}$$

où β est une constante qui sera supposée être suffisamment petite en valeur absolue. Cette constante sera une fonction de α, s'annulant pour $\alpha = 0$, que nous apprendrons à calculer plus loin.

En supposant que les fonctions ζ_i soient connues, ζ sera une fonction connue de θ, ψ, α et l'on pourra en déduire $\bar{\zeta}$ comme fonction de θ, ψ, α, β. Pour cela, il suffit d'éliminer θ' et ψ' entre les équations

$$\begin{aligned} \sqrt{1+\zeta'}\,\sin\theta'\cos\psi' &= \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sin\theta\cos\psi + \beta, \\ \sqrt{1+\zeta'}\,\sin\theta'\sin\psi' &= \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\sin\theta\sin\psi, \\ \sqrt{1+\zeta'}\,\cos\theta' &= \sqrt{1+\bar{\zeta}}\,\cos\theta, \end{aligned}$$

où ζ' est ce que devient ζ en y remplaçant θ et ψ par θ' et ψ'.

Posons

$$\frac{\beta}{\sqrt{1+\bar{\zeta}}} = v.$$

Alors ces équations donneront

$$(3) \qquad \frac{1+\bar{\zeta}'}{1+\bar{\zeta}} = 1 + 2v\sin\theta\cos\psi + v^2,$$

$$\sin\theta'\cos\psi' = \frac{\sin\theta\cos\psi + v}{\sqrt{1+2v\sin\theta\cos\psi+v^2}},$$

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta}{\sqrt{1+2v\sin\theta\cos\psi+v^2}}.$$

Or, d'après les deux dernières formules, $\bar{\zeta}'$ devient une fonction connue de $\sin\theta\cos\psi$, $\cos\theta$ et v. Désignons-la, ne mettant en évidence que le dernier argument, par $\bar{\zeta}(v)$. L'équation (3) deviendra

$$v^2 = \beta^2 \frac{1+2v\sin\theta\cos\psi+v^2}{1+\bar{\zeta}(v)},$$

et c'est le résultat cherché de l'élimination de θ' et ψ'. Il ne reste donc qu'à résoudre cette équation par rapport à v, après quoi l'on aura

$$\bar{\zeta} = \frac{\beta^2}{v^2} - 1.$$

En faisant, pour abréger,

$$\frac{\sqrt{1+2v\sin\theta\cos\psi+v^2}}{\sqrt{1+\bar{\zeta}(v)}} = V,$$

l'équation à résondre sera

$$v = \beta V,$$

et la formule de Lagrange donnera immédiatement

$$(4) \qquad v = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\beta^i}{i!}\left[\frac{d^{i-1}V^i}{dv^{i-1}}\right]_{v=0}.$$

Quant à la légitimité de ce procédé, elle résulte de ce que nous avons montré dans le Mémoire *Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes**. En effet, d'après ce que nous y avons montré, on peut conclure que, h étant un nombre positif plus petit que 1 et d'ailleurs arbitraire, on peut rendre $|\alpha|$ suffisamment petit pour que, $|v|$ ne dépassant par h, $\bar{\zeta}(v)$ soit une fonction analytique de v sans

* *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences*, 1916, page 139.

points critiques, quelles que soient les valeurs réelles de θ et ψ; et dés lors, $|\alpha|$ étant assez petit, V sera encore une telle fonction. On pourra donc développer v suivant les puissances de α et β, tant que les modules de ces paramètres sont assez petits, et la formule de Lagrange en donne le développement suivant les puissances de β.

En remarquant que $\bar{\zeta}(0) = \tilde{\zeta}$ et en remplaçant v par sa valeur, on peut écrire la formule (4) comme il suit:

$$\frac{1}{\sqrt{1+\bar{\zeta}}} = \frac{1}{\sqrt{1+\tilde{\zeta}}} + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{i-1}}{i!} \left[\frac{d^{i-1} V^i}{dv^{i-1}}\right]_{v=0}.$$

De là, en posant, pour abréger,

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{\beta^{i-1}}{i!} \left[\frac{d^{i-1} V^i}{dv^{i-1}}\right]_{v=0} = W,$$

on tire

$$\bar{\zeta} = \frac{1+\tilde{\zeta}}{\left(1+\sqrt{1+\tilde{\zeta}}\, W\right)^2} - 1 = \tilde{\zeta} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (n+1)(1+\tilde{\zeta})^{\frac{n}{2}+1} W^n,$$

et en développant le dernier membre suivant les puissances de α et β on aura

$$\bar{\zeta} = \sum \bar{\zeta}_{rs}\, \alpha^r \beta^s,$$

la somme s'étendant à toutes les valeurs positives ou nulles des indices r et s, telles que

$$r + s \geqq 1.$$

3. On a évidemment

$$\bar{\zeta}_{r0} = \tilde{\zeta}_r,$$

quel que soit r.

D'autre part, on trouve immédiatement que les $\bar{\zeta}_{0s}$ sont les coefficients des puissances de β dans le développement de la formule

$$-2\beta \sin\theta \cos\psi \sqrt{1 - (1 - \sin^2\theta \cos^2\psi)\beta^2} - (1 - 2\sin^2\theta \cos^2\psi)\beta^2.$$

On aura donc

$$\bar{\zeta}_{01} = -2 \sin\theta \cos\psi, \qquad \bar{\zeta}_{02} = -(1 - 2\sin^2\theta \cos^2\psi),$$

et les $\bar{\zeta}_{0s}$ où s est un nombre pair plus grand que 2 seront nuls, tandis que, pour s impair plus grand que 1, il viendra

$$\bar{\zeta}_{0s} = \frac{2}{s-2} \frac{1.3.5\ldots(s-2)}{2.4.6\ldots(s-1)} \sin\theta \cos\psi\, (1 - \sin^2\theta \cos^2\psi)^{\frac{s-1}{2}}.$$

De cette façon ζ_{0s} sera une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ de degré s, paire ou impaire, selon que s est pair ou impair.

Voyons maintenant quels seront les autres ζ_{rs}.

On a

$$\zeta(v) = \zeta_1(v)\alpha + \zeta_2(v)\alpha^2 + \zeta_3(v)\alpha^3 + \cdots,$$

$\zeta_r(v)$ étant ce que devient ζ_r en y remplaçant $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ respectivement par

$$\frac{\sin\theta\cos\psi + v}{\sqrt{1 + 2v\sin\theta\cos\psi + v^2}} \quad \text{et} \quad \frac{\cos\theta}{\sqrt{1 + 2v\sin\theta\cos\psi + v^2}}.$$

Développons $\zeta_r(v)$ suivant les puissances de v.

Observons d'abord que, dans le développement d'une puissance quelconque de la fonction

$$1 + 2v\sin\theta\cos\psi + v^2,$$

le coefficient de v^s sera une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ de degré ne dépassant pas s, et que cette fonction sera paire ou impaire, selon que s est pair ou impair.

D'après cela, et tenant compte de la nature des fonctions ζ_r, on peut conclure que le coefficient de v^s dans le développement de $\zeta_r(v)$ sera une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré ne dépassant pas $mr + s$, paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, selon que $mr + s$ est un nombre pair ou impair.

Or, s'il en est ainsi, le coefficient de $\alpha^r v^s$ dans le développement suivant les puissances de α et v d'une puissance quelconque de V sera une fonction de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de la même nature.

Par suite, si l'on développe l'expression

$$\frac{1}{i!}\left[\frac{d^{i-1}V^i}{dv^{i-1}}\right]_{v=0}$$

suivant les puissances de α, le coefficient de α^r sera une function entière de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré ne dépassant pas $mr + i - 1$, paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport $\sin\theta\cos\psi$, selon que le nombre $mr + i - 1$ est pair ou impair, et ce coefficient coïncide avec le coefficient de $\alpha^r\beta^{i-1}$ dans le développement de W suivant les puissances de α et β.

Cela étant, il est facile de conclure que ζ_{rs} sera une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré au plus égal à $mr + s$ et que cette fonction

sera paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, selon que $mr + s$ est pair ou impair.

4. La méthode que nous nous proposons d'exposer sera basée sur la considération des surfaces de niveau, situées à l'intérieur de la figure d'équilibre.

Dans le cas où la figure d'équilibre est un ellipsoïde de Maclaurin ou de Jacobi, ces surfaces sont celles des ellipsoïdes semblables et concentriques de centre sur l'axe de rotation. On doit donc s'attendre que, dans le cas des figures d'équilibre peu différentes des ellipsoïdes, ces surfaces différeront peu des surfaces des ellipsoïdes semblables à celui dont dérivent les figures considérées, quoique en général il ne soit plus permis de supposer que tous ces ellipsoïdes aient leurs centres sur l'axe de rotation qui est celui des z. Or, les plans des xy et des xz étant des plans de symétrie de la figure d'équilibre, il en sera aussi de même de toutes les surfaces de niveau, et l'on pourra supposer que les centres des ellipsoïdes en question soient situés sur l'axe des x.

Ayant égard à cela, nous prendrons, pour représenter les surfaces de niveau, les équations suivantes:

$$(5)\qquad \begin{cases} x = a\sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi + \beta\sqrt{\rho+1}, \\ y = a\sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi, \\ z = a\sqrt{1+\zeta}\sqrt{\rho}\cos\theta, \end{cases}$$

où a est un paramètre dont les valeurs comprises entre 0 et 1 correspondent aux diverses surfaces de niveau et ζ est une fonction de θ, ψ, a qu'on doit déterminer. Quant à β, c'est une constante que nous supposerons, pour plus de simplicité, indépendante de a, et nous verrons que, cette constante étant choisie d'une manière convenable, les équations (5) pourront réellement représenter toutes les surfaces de niveau qui se trouvent à l'intérieur de la figure d'équilibre.

La surface de la figure d'équilibre sera une des surfaces de niveau, et l'on suppose qu'elle corresponde à $a = 1$, en sorte que, pour cette valeur de a, les équations (5) doivent se réduire aux équations (2). Nous aurons donc $\zeta(1) = \bar{\zeta}$, en désignant la fonction ζ, quand il faudra mettre en évidence son argument a, par $\zeta(a)$.

Formons l'équation que doit vérifier la fonction ζ.

En entendant par ω la vitesse angulaire qui correspond à la figure d'équilibre considérée, par k la densité du liquide et par f la constante de la gravitation universelle, posons, comme nous l'avons fait dans le Travail *Sur les figures d'équilibre etc.*,

$$\frac{\omega^2}{2\pi f k} = \Omega.$$

Alors, $\pi f k U$ étant le potentiel de la masse liquide au point (x, y, z), la fonction

$$U + \Omega\,(x^2 + y^2)$$

devra conserver une valeur constante quand le point (x, y, z) se déplace sur une des surfaces de niveau; mais cette valeur pourra varier d'une surface de niveau à une autre et sera, par suite, une fonction de a. Nous aurons donc

$$(6) \qquad U + \Omega\,(x^2 + y^2) = \text{fonction de } a,$$

et il ne reste qu'à remplacer ici x, y, z par leurs valeurs (5).

On a

$$U = \frac{1}{\pi}\int \frac{d\tau'}{r},$$

où $d\tau'$ est un élément de volume, r est la distance d'un point (x', y', z') de cet élément au point (x, y, z) et l'intégration s'étend au volume de la figure d'équilibre.

On peut poser

$$x' = \sqrt{u}\,\sqrt{\rho + 1}\,\sin\theta' \cos\psi' + \beta\sqrt{\rho + 1},$$

$$y' = \sqrt{u}\,\sqrt{\rho + q}\,\sin\theta' \sin\psi',$$

$$z' = \sqrt{u}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta',$$

en entendant par u une variable comprise, pour des valeurs données de θ' et ψ', entre 0 et $1 + \bar{\zeta}'$, où $\bar{\zeta}'$ est ce que devient $\bar{\zeta}$ en remplaçant θ et ψ par θ' et ψ'.

Alors, en posant, comme dans le Travail cité,

$$\sqrt{\rho(\rho + 1)(\rho + q)} = \Delta$$

et en entendant par $d\sigma'$ l'élément $\sin\theta' d\theta' d\psi'$ de la surface de la sphère Σ de rayon 1, nous aurons

$$d\tau' = \frac{1}{2}\,\Delta\sqrt{u}\,du\,d\sigma',$$

et, d'autre part, il viendra

$$r = D\left(a\sqrt{1+\zeta},\ \sqrt{u}\right),$$

en désignant, d'une manière générale, par $D(v, v')$ l'expression

$$\sqrt{(\rho+1)(v\sin\theta\cos\psi - v'\sin\theta'\cos\psi')^2 + (\rho+q)(v\sin\theta\sin\psi - v'\sin\theta'\sin\psi')^2 + \rho(v\cos\theta - v'\cos\theta')^2}.$$

Avec ces notations, nous aurons

$$U = \frac{\Delta}{2\pi}\int d\sigma' \int_0^{1+\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\zeta},\sqrt{u})},$$

l'intégration relative à $d\sigma'$ étant étendue à toute la surface de la sphère Σ.

Faisons maintenant une suite de transformations analogues à celles que nous avons faites dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (n^{os} 2 et 5).

Posons

$$\frac{\Delta}{2\pi}\int d\sigma' \int_0^1 \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a,\sqrt{u})} = U_0.$$

Alors, en remarquant que

$$\int_0^{1+\zeta} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\zeta},\sqrt{u})} = (1+\zeta)\int_0^1 \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a,\sqrt{u})},$$

nous aurons

$$U = (1+\zeta)\,U_0 + 2\Delta S,$$

où

(7) $$S = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_{1+\zeta}^{1+\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\zeta},\sqrt{u})}.$$

Quant à $x^2 + y^2$, on trouve

$$x^2 + y^2 = a^2(1+\zeta)\,\Theta + 2(\rho+1)a\beta\sqrt{1+\zeta}\,\sin\theta\cos\psi + (\rho+1)\,\beta^2,$$

en posant, pour abréger,

$$(\rho + \cos^2\psi + q\sin^2\psi)\sin^2\theta = \Theta.$$

Or U_0 est ce que devient U quand la figure d'équilibre se réduit à l'ellipsoïde E_0 et quand on prend, pour x, y, z, les expressions

$$x = a\sqrt{\rho+1}\sin\theta\cos\psi, \qquad y = a\sqrt{\rho+q}\sin\theta\sin\psi, \qquad z = a\sqrt{\rho}\cos\theta.$$

Donc, si l'on désigne par $\overline{U}_0$ la valeur de U_0 pour $a=1$ et par Ω_0 la valeur de Ω pour l'ellipsoïde E_0, la condition d'équilibre de cet ellipsoïde sera

$$\overline{U}_0 + \Omega_0\Theta = 2\Delta(C-R),$$

en posant, comme dans le Travail cité,

$$\frac{1}{2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{\Delta(t)} = C, \qquad \frac{\rho}{2}\int_\rho^\infty \frac{dt}{t\Delta(t)} = R,$$

$$\sqrt{t(t+1)(t+q)} = \Delta(t).$$

D'autre part, a étant plus petit que 1, on aura

$$U_0 = a^2\overline{U}_0 + 2\Delta(1-a^2)C,$$

en vertu de quoi la condition précédente pourra s'écrire

$$U_0 + \Omega_0 a^2\Theta = 2\Delta(C-Ra^2).$$

D'après cela, en posant pour la figure d'équilibre considérée

$$\Omega - \Omega_0 = \eta,$$

l'équation (6) devient

$$2\Delta S + 2\Delta(C-Ra^2)\zeta + \eta a^2(1+\zeta)\Theta$$
$$+ 2(\Omega_0+\eta)(\rho+1)a\beta\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\cos\psi = \text{fonction de } a,$$

et cela se réduit à

$$(8) \qquad R\zeta = \frac{\eta}{2\Delta}(1+\zeta)\Theta + \frac{(\rho+1)(\Omega_0+\eta)}{\Delta a}\beta\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\cos\psi + \frac{1}{a^2}(C\zeta+S) + \frac{f(a)}{a^2},$$

$f(a)$ étant une fonction indeterminée de a.

Dans cette équation, S est une quantité définie par la formule (7), qui peut encore être écrite comme il suit:

(9) $$S = \frac{1+\zeta}{4\pi} \int d\sigma' \int_0^Z \frac{\sqrt{1+v}\, dv}{D(a, \sqrt{1+v})},$$

où

$$Z = \frac{\zeta' - \zeta}{1+\zeta}.$$

Cette formule est valable pour toutes les valeurs de a dans l'intervalle (0,1). Mais, si l'on ne veut considérer que des valeurs assez petites de a, on peut obtenir, pour S, une expression plus simple.

Supposons a suffisamment petit pour qu'on ait

(10) $$a\sqrt{1+\zeta} \leqq 1,$$

quels que soient θ et ψ.

Alors, u étant compris entre 1 et $1+\zeta$, il viendra

$$a\sqrt{1+\zeta} < \sqrt{u}$$

et, par suite,

$$\int \frac{\sqrt{u}\, d\sigma'}{D(a\sqrt{1+\zeta}, \sqrt{u})} = \int \frac{d\sigma'}{D(0,1)} = 4\pi C.$$

D'après cela on aura

$$\frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_1^{1+\zeta} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a\sqrt{1+\zeta}, \sqrt{u})} = C\zeta,$$

et la formule (7) donnera

(11) $$C\zeta + S = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_1^{1+\zeta'} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a\sqrt{1+\zeta}, \sqrt{u})}.$$

On aura donc cette égalité, pourvu que la condition (10) soit remplie.

5. Avant de passer à l'objet principal de ce Mémoire, nous nous arrêterons au problème suivant:

Les figures d'équilibre dérivées de l'ellipsoïde E_0 étant connues, on

demande de déterminer l'ensemble de toutes les surfaces de niveau qui leur correspondent et qui se trouvent à l'intérieur de la masse liquide.

On supposera donc que les coefficients $\bar{\zeta}_i$ de la série (1) soient des fonctions connues de θ et ψ. Or, ces coefficients étant connus, on en déduira, comme nous l'avons montré aux nos 2 et 3, les coefficients $\bar{\zeta}_{rs}$ de la série

$$\bar{\zeta} = \sum \bar{\zeta}_{rs} \alpha^r \beta^s,$$

lesquels pourront, par suite, encore être regardés comme des fonctions connues de θ et ψ.

D'autre part, on pourra aussi considérer comme connus les coefficients η_i de la série

$$\eta = \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha^2 + \eta_3 \alpha^3 + \cdots = \sum \eta_i \alpha^i,$$

qui donnera η en fonction de α, car, une figure d'équilibre étant connue, la vitesse angulaire qui lui correspond le sera encore.

Cela étant, la question se réduira à déterminer, pour les valeurs de a comprises entre 0 et 1, la fonction ζ satisfaisant à l'équation (8), où la constante β et la fonction $f(a)$, qui, à certaines conditions près, sont à notre disposition, devront préalablement être déterminées d'une manière convenable.

On suppose que $|\zeta|$ ait une valeur suffisamment petite, quels que soient θ et ψ, pour toutes les valeurs de a dans l'intervalle $(0,1)$. Il faudra donc tout d'abord que cette fonction soit finie pour $a = 0$.

Voyons comment on pourra satisfaire à cette condition par le choix de β et de $f(a)$.

Ne considérant que des valeurs assez petites de a, reportons-nous à la formule (11) et développons le second membre suivant les puissances ascendantes de $a\sqrt{1+\zeta}$. Nous aurons

$$C\zeta + S = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\bar{\zeta}' \, d\sigma'}{D(0,1)} + \frac{a\sqrt{1+\zeta}}{4\pi} \int d\sigma' \int_1^{1+\bar{\zeta}'} \left\{ \frac{\partial}{\partial v} \frac{\sqrt{u}}{D(v,\sqrt{u})} \right\}_{v=0} du + \cdots,$$

les termes suivant étant divisibles par a^2.

Or on a

$$\left\{\frac{\partial}{\partial v}\,\frac{\sqrt{u}}{D(v,\sqrt{u})}\right\}_{v=0}$$
$$=\frac{(\rho+1)\sin\theta\cos\psi\sin\theta'\cos\psi'+(\rho+q)\sin\theta\sin\psi\sin\theta'\sin\psi'+\rho\cos\theta\cos\theta'}{\sqrt{u}\,D^3(0,1)},$$

et, comme $\bar{\zeta}$ est une fonction paire par rapport à ψ et par rapport à $\cos\theta$, on aura

$$\int\frac{\sin\theta'\sin\psi'}{D^3(0,1)}\,F(\bar{\zeta}')\,d\sigma'=0 \qquad \text{et} \qquad \int\frac{\cos\theta'}{D^3(0,1)}\,F(\bar{\zeta}')\,d\sigma'=0,$$

quelle que soit la fonction F.

Par suite, il vient

$$C\zeta+S=\frac{1}{4\pi}\int\frac{\bar{\zeta}'\,d\sigma'}{D(0,1)}$$
$$+\frac{a}{2\pi}(\rho+1)\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\cos\psi\int\frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\left(\sqrt{1-\bar{\zeta}'}-1\right)d\sigma'+\cdots.$$

D'après cela, l'équation (8) fait voir que, pour que la fonction ζ reste finie pour $a=0$, il faut qu'on ait

(12) $$f(0)=-\frac{1}{4\pi}\int\frac{\bar{\zeta}'\,d\sigma'}{D(0,1)},$$

(13) $$\frac{\Omega_0+\eta}{\Delta}\,\beta+\frac{1}{2\pi}\int\frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}'}-1\right)d\sigma'=0,$$

et que le rapport

(14) $$\frac{f(a)-f(0)}{a^2}$$

ne devienne pas infini pour $a=0$.

6. Parmi les conditions précédentes, celle (13) représente une équation qui donnera β en fonction de α, et il est facile de voir qu'on pourra en déduire β sous la forme d'une série procédant suivant les puissances entières et positives de α, où il n'y aura que des termes s'annulant pour $\alpha=0$.

En effet, si nous remplaçons η et $\bar{\zeta}'$ par leurs développements

$$\sum\eta_i\,\alpha^i, \qquad \sum\bar{\zeta}'_{rs}\,\alpha^r\,\beta^s,$$

le premier membre de l'équation (13), développé suivant les puissances de α et β, n'aura que des termes s'annulant pour $\alpha = \beta = 0$, et, parmi ces termes, celui en β aura pour coefficient

$$(15) \qquad \frac{\Omega_0}{\Delta} + \frac{1}{4\pi}\int \frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\,\bar{\zeta}'_{01}\,d\sigma'.$$

Donc, pour que β soit de la forme requise, il suffit que l'expression (15) ne soit pas nulle. Montrons qu'il en sera bien ainsi.

La condition d'équilibre de l'ellipsoïde $\mathbf{E}_0$ donne

$$\frac{\Omega_0}{\Delta} = \int_\rho^\infty \frac{dt}{(t+1)\,\Delta(t)} - \frac{2R}{\rho+1}.$$

D'autre part, comme on a (n° 3)

$$\bar{\zeta}'_{01} = -\,2\sin\theta'\cos\psi',$$

il vient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4\pi}\int \frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\,\bar{\zeta}'_{01}\,d\sigma' \\
&= -\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin^2\theta'\cos^2\psi'}{D^3(0,1)}\,d\sigma' \\
&= \frac{1}{\pi}\left\{\frac{d}{dv}\int \frac{d\sigma}{\sqrt{(\rho+v)\sin^2\theta\cos^2\psi + (\rho+q)\sin^2\theta\sin^2\psi + \rho\cos^2\theta}}\right\}_{v=1} \\
&= 2\left\{\frac{d}{dv}\int_\rho^\infty \frac{dt}{\sqrt{(t+v)(t+q)t}}\right\}_{v=1} \\
&= -\int_\rho^\infty \frac{dt}{(t+1)\,\Delta(t)}.
\end{aligned}$$

Par suite, l'expression (15) se réduit à

$$-\,\frac{2R}{\rho+1},$$

ce qui n'est jamais nul.

Si tous les termes de l'équation (13) s'annulent avec β quel que soit α,

la solution considérée se réduira à

$$\beta = 0.$$

Tel sera le cas de m pair.

En effet, pour $\beta = 0$, le premier membre de (13) devient

$$\frac{1}{2\pi}\int \frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}'}-1\right)d\sigma',$$

et cela, dans le cas de m pair, est égal à zéro, car $\bar{\zeta}'$ est alors une fonction paire des arguments $\sin\theta'\cos\psi'$ et $\cos\theta'$.

Tel sera aussi le cas où E_0 est un ellipsoïde de Maclaurin, si l'équation caractéristique

$$I_{m,2k} = 0$$

correspond à une valeur de k plus grande que 1, car, dans ce cas, les coefficients du développement de $\sqrt{1+\bar{\zeta}'}-1$ suivant les puissances de α seront des fonctions entières des arguments

$$\sin^k\theta'\cos k\psi' \qquad \text{et} \qquad \cos^2\theta'$$

et $D(0,1)$ ne dépendra pas de l'angle ψ'.

Donc β pourra ne pas être identiquement nul seulement dans le cas de m impair et d'ailleurs, quand E_0 est un ellipsoïde de révolution, seulement si $k=1$.

Voyons quelle sera alors la forme du développement de β suivant les puissances de α.

D'après ce que nous avons vu au n° 3, $\bar{\zeta}'_{rs}$ sera une fonction entière de $\sin\theta'\cos\psi'$ et $\cos\theta'$, paire par rapport à $\cos\theta'$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta'\cos\psi'$, selon que $mr+s$ est un nombre pair ou impair.

Donc, m étant impair, $\bar{\zeta}'_{rs}$ sera une fonction paire ou impaire par rapport à $\sin\theta'\cos\psi'$, selon que $r+s$ est pair ou impair.

Il en sera donc aussi de même du coefficient du terme en $\alpha^r\beta^s$ dans le développement de

$$\sqrt{1+\bar{\zeta}'}-1.$$

De là on voit que, dans le développement suivant les puissances de α et β de l'intégrale

$$\int \frac{\sin\theta'\cos\psi'}{D^3(0,1)}\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}'}-1\right)d\sigma',$$

il n'y aura que des termes $c_{rs}\alpha^r\beta^s$ où $r+s$ est un nombre impair.

D'autre part, m étant impair, le développement de η suivant les puissances de α ne contiendra que des puissances paires, car, dans ce cas, la fonction $\tilde{\zeta}$ ne change pas quand on y remplace α par $-\alpha$ et ψ par $\psi+\pi$.

Donc le développement du premier membre de l'équation (13) ne contiendra que des termes où la somme des exposants de α et de β est un nombre impair.

Par suite, le développement de β suivant les puissances de α qu'on tire de cette équation ne contiendra que des puissances impaires de α.

Cela posé, substituons ce développement dans la série

$$\bar{\zeta} = \sum \bar{\zeta}_{rs}\, \alpha^r \beta^s$$

et ordonnons-la ensuite suivant les puissances de α.

Nous aurons

$$\bar{\zeta} = \bar{\zeta}_1 \alpha + \bar{\zeta}_2 \alpha^2 + \bar{\zeta}_3 \alpha^3 + \cdots,$$

et les $\bar{\zeta}_i$ seront des fonctions entières de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré mi, paires par rapport à $\cos\theta$ et paires ou impaires par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, selon que i est pair ou impair.

Donc les $\bar{\zeta}_i$ seront des fonctions de la même nature que les $\tilde{\zeta}_i$. D'ailleurs, dans le cas de m pair, on aura simplement

$$\bar{\zeta}_i = \tilde{\zeta}_i,$$

et toutes ces fonctions seront paires tant par rapport à $\cos\theta$, que par rapport à $\sin\theta\cos\psi$.

7. Ayant exprimé β et $\bar{\zeta}$ à l'aide de α, nous aurons, d'après (12),

$$f(0) = f_1(0)\alpha + f_2(0)\alpha^2 + f_3(0)\alpha^3 + \cdots,$$

où

$$f_i(0) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\zeta}_i'\, d\sigma'}{D(0,1)},$$

et par cette formule on voit que, dans le cas de m impair, le développement de $f(0)$ ne contiendra que des puissances paires de α.

Outre la valeur $f(0)$, on connaîtra encore la valeur $f(1)$, pour laquelle on aura un développement tout semblable

$$f(1) = f_1(1)\alpha + f_2(1)\alpha^2 + f_3(1)\alpha^3 + \cdots.$$

En effet, la fonction $f(a)$ étant supposée continue, ce qui est nécessaire pour que ζ soit une fonction continue de a, l'équation (8) se réduira, pour $a = 1$, à

$$(16) \qquad R\bar{\zeta} = \frac{\eta}{2\Delta}(1+\bar{\zeta})\Theta + \frac{(\rho+1)(\Omega_0+\eta)}{\Delta}\beta\sqrt{1+\bar{\zeta}}\sin\theta\cos\psi + C\bar{\zeta} + \bar{S} + f(1),$$

où

$$\bar{S} = \frac{1+\bar{\zeta}}{4\pi}\int d\sigma'\int_0^{\bar{Z}}\frac{\sqrt{1+v}\,dv}{D(1,\sqrt{1+v})},$$

en posant

$$\frac{\bar{\zeta}'-\bar{\zeta}}{1+\bar{\zeta}} = \bar{Z};$$

et cette égalité devra devenir une identité quand, en y remplaçant $\bar{\zeta}$, η et β par leurs développements suivant les puissances de α, on choisira convenablement la constante $f(1)$. On aura donc, en posant par exemple $\theta = 0$ et en le désignant par l'indice zéro,

$$f(1) = R\bar{\zeta}_0 - C\bar{\zeta}_0 - \bar{S}_0,$$

où le second membre est une fonction connue de α.

Or $\bar{S}$ n'est autre chose que la quantité que nous avons désignée, dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (n° 3), par S. Donc, d'après ce que nous y avons montré (n^{os} 4 et 19), $\bar{S}_0$ sera développable, si $|\alpha|$ est assez petit, suivant les puissances entières et positives de α, ce qui donnera, pour $f(1)$, le développement requis.

Il est facile de voir que, dans le cas de m impair, ce développement, pareillement au développement de $f(0)$, ne contiendra que des puissances paires de α.

De cette façon, les valeurs $f(0)$ et $f(1)$ de la fonction $f(a)$ seront connues.

Quant à d'autres valeurs, elles pourront être quelconques, pourvu que $f(a)$ soit une fonction continue et le rapport (14) ne devienne pas infini pour $a = 0$.

La plus simple fonction $f(a)$ qui satisfait à ces conditions est

$$(17) \qquad f(a) = f(1)a^2 + f(0)(1-a^2),$$

et rien n'empêche de prendre, pour $f(a)$, cette expression, car, en faisant une hypothèse déterminée au sujet de cette fonction, on ne fait que préciser ce qu'on entend par le paramètre a.

C'est à ce choix de $f(a)$ que nous nous arrêterons dans ce qui suit.

8. Revenons à l'équation (8).

Les quantités

$$\bar{\zeta}', \qquad f(a), \qquad \beta, \qquad \eta$$

y étant remplacées par leurs expressions, le second membre devient une fonction connue de

$$\zeta, \qquad a, \qquad \theta, \qquad \psi, \qquad \alpha.$$

Il ne reste donc qu'à résondre cette équation par rapport à ζ, et nous allons montrer comment on peut le faire en supposant $|\alpha|$ suffisamment petit.

Comme

$$C\zeta + S = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\zeta}, \sqrt{u})} + G,$$

où

$$G = C\zeta - \frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\zeta} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\zeta}, \sqrt{u})},$$

le second membre de l'équation (8) se réduira, pour $\alpha = 0$, à $\frac{G}{a^2}$.

Or, d'après ce que nous avons vu au n° 4, si $a\sqrt{1+\zeta} \leqq 1$, la quantité G est identiquement nulle. Quant au cas de $a\sqrt{1+\zeta} > 1$, on aura, en supposant toujours $a \leqq 1$ et en se servant des formules relatives au potentiel d'un ellipsoïde homogène,

$$G = \frac{1}{2}\int_\rho^\tau [a^2(1+\zeta)H(t) - 1]\,\frac{dt}{\Delta(t)},$$

où

$$H(t) = \frac{\rho+1}{t+1}\sin^2\theta\cos^2\psi + \frac{\rho+q}{t+q}\sin^2\theta\sin^2\psi + \frac{\rho}{t}\cos^2\theta$$

et τ est la racine positive unique de l'équation

$$a^2(1+\zeta)H(t) = 1,$$

laquelle racine sera, dans le cas considéré, plus grande que ρ.

Donc, dans ce cas, G est positif et d'ailleurs on a évidemment

$$G < \left[a^2(1+\zeta) - 1\right] \frac{\tau - \rho}{2\Delta}.$$

D'autre part, comme

$$H(\tau) < \frac{\rho+1}{\tau+1},$$

on trouve

$$\tau - \rho < (\rho+1)\left[a^2(1+\zeta) - 1\right].$$

Par suite, il vient

$$G < \frac{\rho+1}{2\Delta}\left[a^2(1+\zeta) - 1\right]^2 < \frac{\rho+1}{2\Delta}\zeta^2,$$

et la quantité $\frac{G}{a^2}$, à laquelle se réduit, pour $\alpha = 0$, le second membre de l'équation (8), sera moindre que

$$\frac{\rho+1}{2\Delta}(1+\zeta)\zeta^2.$$

De là on voit que la fonction ζ satisfaisant à l'équation (8) tendra, pour $\alpha = 0$, vers zéro, quel que soit a dans l'intervalle $(0, 1)$, pourvu qu'on suppose que cette fonction reste toujours, en valeur absolue, au-dessous d'un nombre fixe suffisamment petit. D'ailleurs, en partant de l'équation (8), il est facile de former une limite supérieure l_α, tendant vers zéro pour $\alpha = 0$ et telle qu'on ait

$$|\zeta| < l_\alpha,$$

quel que soit a dans l'intervalle $(0, 1)$ et quels que soient θ et ψ.

D'autre part, cette limite étant obtenue, la même équation (8), en la rapprochant de celle (16), permettra d'assigner au rapport

$$\frac{|\bar{\zeta} - \zeta|}{1-a}$$

une limite supérieure tendant vers zéro pour $\alpha = 0$.

Plus généralement, en considérant le rapport

$$\frac{|\zeta' - \zeta|}{\sqrt{1 - 2a\cos\varphi + a^2}},$$

où

$$\cos\varphi = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\psi' - \psi),$$

on pourra trouver un nombre positif g_α, tendant vers zéro pour $\alpha = 0$ et tel qu'on ait

$$\frac{|\zeta' - \zeta|}{\sqrt{1 - 2a\cos\varphi + a^2}} < g_\alpha,$$

quel que soit a dans l'intervalle (0, 1) et quels que soient θ, ψ, θ', ψ'.

Or, si l'on a

$$(18) \qquad |\zeta| < l, \qquad \frac{|\zeta' - \zeta|}{\sqrt{1 - 2a\cos\varphi + a^2}} < g,$$

l et g étant assez petits, on pourra appliquer à la formule (9) les considérations que nous avons exposées dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (nos 3 et 4), car il n'y aura, pour cela, qu'à remplacer

$$\sin\theta\cos\psi, \qquad \sin\theta\sin\psi, \qquad \cos\theta$$

respectivement par

$$a\sin\theta\cos\psi, \qquad a\sin\theta\sin\psi, \qquad a\cos\theta.$$

Nous pouvons donc conclure que sous les conditions (18), l et g étant assez petits pour qu'on ait

$$(19) \qquad \frac{4}{3}\sqrt{\frac{\rho + 1}{\rho}}\, g + l \leq 1,$$

S sera développable suivant les ordres relatifs à la fonction ζ, en sorte qu'on aura

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + \cdots,$$

où S_n est le coefficient de ε^n dans le développement de l'expression

$$\frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_{1+\varepsilon\zeta}^{1+\varepsilon\zeta'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \sqrt{u})}$$

suivant les puissances du paramètre ε.

D'ailleurs le développement ci-dessus de S sera, dans les conditions considérées, absolument et uniformément convergent pour toutes les valeurs de θ et ψ et pour toutes les vauleurs de a dans l'intervalle (0, 1).

Quant aux expressions des S_n, on aura

$$S_n = \frac{1}{4\pi . n!}\left\{\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\int d\sigma' \int_{1+\varepsilon\zeta}^{1+\varepsilon\zeta'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \sqrt{u})}\right\}_{\varepsilon=0}.$$

Or, en supposant $a < 1$, on pourra prendre ε suffisamment petit pour qu'on ait

$$a\sqrt{1+\varepsilon\zeta} < 1,$$

et alors il viendra (n° 4)

$$\frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\varepsilon\zeta} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \sqrt{u})} = C\varepsilon\zeta.$$

On aura donc

$$S_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\zeta}'\, d\sigma'}{D(a, 1)} - C\zeta$$

et, pour $n > 1$,

$$S_n = \frac{1}{4\pi . n!}\left\{\frac{d^n}{d\varepsilon^n}\int d\sigma' \int_1^{1+\varepsilon\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \sqrt{u})}\right\}_{\varepsilon=0}.$$

Par suite, on peut écrire

$$C\zeta + S = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\zeta}'\, d\sigma'}{D(a, 1)} + S_2 + S_3 + S_4 + \cdots,$$

et, par les expressions des S_n, on voit que c'est le développement suivant les ordres relatifs à ζ de la formule (11).

De cette façon, bien que la formule (11) ne soit valable que sous la condition $a\sqrt{1+\zeta} \leqq 1$, le développement suivant les ordres, qu'on en déduit en supposant $a < 1$ et en faisant $|\zeta|$ et $|\bar{\zeta}'|$ suffisamment petits, donne, pour $C\zeta + S$, une expression qui sera valable sous les conditions (18), l et g étant assez petits, pour toutes les valeurs de a dans l'intervalle $(0, 1)$, pourvu que le cas de $a = 1$ soit considéré comme un cas limite.

9. D'après ce que nous venons de voir, S_n, à partir de $n = 2$, est le coefficient de ε^n dans le développement suivant les puissances de ε de l'intégrale

$$\frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\varepsilon\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \sqrt{u})},$$

où l'on suppose $a < 1$.

Or, quelque petite que soit la différence $1 - a$, on peut rendre $|\varepsilon|$ assez petit pour que, $|\zeta|$ étant au-dessous d'un nombre fixe, on ait $a\sqrt{1+\varepsilon\zeta} < 1$,

et que d'ailleurs cette intégrale, après y avoir remplacé $\bar{\zeta}'$ par son développement

$$\bar{\zeta}'_1 \alpha + \bar{\zeta}'_2 \alpha^2 + \bar{\zeta}'_3 \alpha^3 + \cdots,$$

soit développable suivant les puissances entières et positives de α.

Supposons donc qu'il en soit ainsi et représentons le développement de l'intégrale ci-dessus par

$$(20) \qquad J_1 \alpha + J_2 \alpha^2 + J_3 \alpha^3 + \cdots.$$

Alors, en posant, pour abréger,

$$a\sqrt{1 + \varepsilon\zeta} = v,$$

nous aurons

$$J_1 = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\bar{\zeta}'_1 \, d\sigma'}{D(v, 1)},$$

$$J_2 = \frac{\varepsilon}{4\pi} \int \frac{\bar{\zeta}'_2 \, d\sigma'}{D(v, 1)} + \frac{\varepsilon^2}{8\pi} \left\{ \frac{d}{du} \int \frac{\sqrt{u}\, \bar{\zeta}'^2_1 \, d\sigma'}{D(v, \sqrt{u})} \right\}_{u=1}$$

et, en général,

$$J_r = \frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^{r} \frac{\varepsilon^i}{i!} \left\{ \frac{d^{i-1}}{du^{i-1}} \int \frac{\sqrt{u}\, \mathrm{K}_r \bar{\zeta}'^i \, d\sigma'}{D(v, \sqrt{u})} \right\}_{u=1},$$

en désignant, d'une manière générale, par $\mathrm{K}_r F(\alpha)$ le coefficient de α^r dans le développement de $F(\alpha)$ suivant les puissances de α.

D'après ce que nous savons au sujet des fonctions $\bar{\zeta}_s$, $\mathrm{K}_r \bar{\zeta}'^i$ sera une fonction entière des arguments $\sin\theta' \cos\psi'$ et $\cos\theta'$ de degré mr, paire par rapport à $\cos\theta'$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta' \cos\psi'$, selon que le nombre mr est pair ou impair.

Développons cette fonction suivant les fonctions sphériques de θ' et ψ', en prenant, pour les fonctions sphériques élémentaires, les produits de Lamé.

En nous servant des notations que nous avons employées dans le Travail *Sur les figures d'équilibre* (**4**, n° 11), nous désignerons par

$$Y_{n,0}, \qquad Y_{n,1}, \qquad Y_{n,2}, \qquad \ldots, \qquad Y_{n,2n}$$

les $2n + 1$ produits de Lamé de l'ordre n, en supposant qu'ils soient exprimés en fonction de θ et ψ. Mais nous n'aurons à considérer que ceux

d'entre eux qui sont pairs par rapport à $\cos\theta$ et par rapport à ψ. Ces produits seront représentés par $Y_{n,2l}$ pour

$$l = n,\ n-2,\ n-4,\ \cdots,$$

la différence $n-l$ étant un nombre pair. Pour n et l pairs, $Y_{n,2l}$ sera, par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, une fonction paire et, pour n et l impairs, une fonction impaire.

Cela posé, et en entendant par $Y'_{n,2l}$ ce que devient $Y_{n,2l}$ lorsqu'on y remplace θ et ψ par θ' et ψ', nous aurons, pour $\mathrm{K}_r\bar{\zeta}'^i$, un développement de la forme

$$\mathrm{K}_r\bar{\zeta}'^i = \sum A_{n,l}\, Y'_{n,2l},$$

où la somme s'étend aux valeurs de n et l satisfaisant aux conditions

$$0 \leqq l \leqq n \leqq mr,$$

$$mr - n = \text{nombre pair}, \qquad n - l = \text{nombre pair}.$$

La recherche de J_r se réduit ainsi au calcul des intégrales telles que

$$\int \frac{Y'_{n,2l}\,d\sigma'}{D(v,\sqrt{u})},$$

où l'on devra supposer $v < \sqrt{u}$.

Or nous avons déjà considéré ces intégrales dans la quatrième Partie du Travail cité (n° 23) et, d'après ce que nous y avons montré, nous pouvons écrire immédiatement leurs expressions.

Considérons pour cela les équations

$$\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi = x, \qquad \sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi = y, \qquad \sqrt{\rho}\,\cos\theta = z,$$

et les valeurs de ρ, $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, exprimées en fonction de x, y, z, qui en résultent, substituons dans le produit

$$\mathsf{E}_{n,2l}(\rho)\,Y_{n,2l}(\theta,\psi).$$

Alors ce produit deviendra une fonction entière de x, y, z de degré n que nous avons désignée par $\Pi_{n,l}(x, y, z)$.

Le nombre $n-l$ étant pair, cette fonction sera paire par rapport à y et par rapport à z. Quant à x, elle sera paire ou impaire par rapport à cet argument, selon que les nombres n et l sont pairs ou impairs.

La fonction $\Pi_{n,l}(x, y, z)$ étant formée, il viedra

$$\sqrt{u}\int \frac{Y'_{n,2l}\,d\sigma'}{D(v,\sqrt{u})} = \frac{4\pi}{2n+1}\,\mathsf{F}_{n,2l}(\rho)\,\Pi_{n,l}\left(\frac{vx}{\sqrt{u}}, \frac{vy}{\sqrt{u}}, \frac{vz}{\sqrt{u}}\right).$$

D'après cela, on voit que J_r sera une fonction entière des arguments

$$v\sin\theta\cos\psi, \qquad v\sin\theta\sin\psi, \qquad v\cos\theta, \qquad \varepsilon$$

de degré $(m+1)r$, laquelle fonction, par rapport aux trois premiers arguments, sera de degré mr et, par rapport à ε, de degré r. D'ailleurs, par rapport au deuxième argument, ainsi que par rapport au troisième, ce sera une fonction paire et, par rapport au premier argument, une fonction paire ou impaire, selon que mr est un nombre pair ou impair.

Cela posé, reportons-nous à la série (20) et appliquons-y la proposition que nous avons établie dans le Mémoire *Sur les séries de polynomes* *.

Si $|v| < 1$, on pourra prendre $|\varepsilon|$ suffisamment petit pour que cette série soit absolument convergente tant que $|\alpha|$ est au-dessous d'un certain nombre A. D'ailleurs, $|\alpha|$ étant plus petit que A, cette série convergera uniformément pour toutes les valeurs réelles de θ et ψ et pour toutes les valeurs de v et ε qui satisfont à des conditions de la forme

$$|v| \leqq h, \qquad |\varepsilon| \leqq \delta,$$

où h est un nombre plus petit que 1 et δ un nombre suffisamment petit.

Or, s'il en est ainsi, la proposition citée permet de conclure que, p étant un nombre positif arbitraire, si l'on assujettit α à l'inégalité

$$|\alpha| < A\left(1+p-\sqrt{2p+p^2}\right)^{m+1},$$

la série (20) sera absolument et uniformément convergente pour toutes les valeurs complexes de θ, ψ, v, ε qui satisfont aux conditions

$$|v\sin\theta\cos\psi| \leqq \frac{h}{\sqrt{3}}p, \quad |v\sin\theta\sin\psi| \leqq \frac{h}{\sqrt{3}}p, \quad |v\cos\theta| \leqq \frac{h}{\sqrt{3}}p, \quad |\varepsilon| \leqq \delta p.$$

Donc, dans ces conditions, où l'on pourra supposer p aussi grand qu'on voudra, ce sera une fonction analytique des arguments

$$v\sin\theta\cos\psi, \qquad v\sin\theta\sin\psi, \qquad v\cos\theta, \qquad \varepsilon, \qquad \alpha,$$

* *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences*, 1915, page 1857.

n'ayant pas de points critiques.

Nous supposerons p assez grand pour qu'on ait $\delta p \geqq 1$.

Cela étant, remplaçons v par sa valeur $a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}$.

La somme de la série (20) deviendra alors une fonction de

$$\zeta, \qquad a\sin\theta\cos\psi, \qquad a\sin\theta\sin\psi, \qquad a\cos\theta \qquad \varepsilon, \qquad \alpha,$$

et cette fonction, qui sera encore analytique, n'aura pas de points critiques sous les conditions

$$(21) \qquad |\zeta| \leqq l, \qquad |\alpha| < \Lambda\left(1+p-\sqrt{2p+p^2}\right)^{m+1}, \qquad |\varepsilon| \leqq 1,$$
$$|a\sin\theta\cos\psi| \leqq A, \qquad |a\sin\theta\sin\psi| \leqq A, \qquad |a\cos\theta| \leqq A,$$

où l est un nombre positif plus petit que 1 et

$$A = \frac{hp}{\sqrt{3}\sqrt{1+l}}.$$

Sous ces conditions, où nous supposerons p assez grand pour qu'on ait

$$A > 1,$$

cette fonction sera donc développable suivant les puissances entières et positives des six arguments indiqués.

Quand il ne faudra mettre en évidence que les arguments v et ε, nous désignerons la somme de la série (20) par $J(v, \varepsilon)$ et, au lieu de $J(v, 1)$, nous écrirons simplement $J(v)$.

10. Nous allons supposer maintenant, comme auparavant, que a, θ, ψ soient réels et que a soit un nombre de l'intervalle $(0, 1)$. Alors, A étant plus grand que 1, il n'y aura à considérer que les conditions (21).

Sous ces conditions, la fonction $J\left(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \varepsilon\right)$ sera développable suivant les puissances entières et positives de ε et, si $a < 1$, il viendra

$$J\left(a\sqrt{1+\varepsilon\zeta}, \varepsilon\right) = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int\frac{\overline{\zeta}'\,d\sigma'}{D(a, 1)} + S_2\varepsilon^2 + S_3\varepsilon^3 + \cdots,$$

où l'on pourra poser $\varepsilon = 1$.

Par suite, si nous supposons que, outre les conditions (21), les conditions (18) et (19) soient également remplies, nous aurons

$$(22) \qquad C\zeta + S = J\left(a\sqrt{1+\zeta}\right).$$

Pour établir cette formule, nous avons supposé $a < 1$. Mais, dans le cas de $a = 1$, où ζ se réduit, en vertu de la seconde des conditions (18), a $\bar{\zeta}$, la formule (22) sera encore exacte.

En effet, si nous désignons S, pour mettre en évidence les arguments a et ζ, par $S(a, \zeta)$, nous aurons évidemment, quel que soit ζ,

$$S(1, \zeta) = \lim_{a=1} S(a, \zeta).$$

Nous aurons donc, en désignant $S(1, \bar{\zeta})$, comme précédemment, par $\bar{S}$,

$$C\bar{\zeta} + \bar{S} = J\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}}\right).$$

Remarquons que les formules (12) et (13) pourront à présent être écrites comme il suit:

$$f(0) = -J(0),$$

$$\frac{(\rho+1)(\Omega_0+\eta)}{\Delta}\beta \sin\theta \cos\psi = -J'(0),$$

$J'(v)$ désignant la dérivée de $J(v)$ par rapport à v.

11. D'après les formules précédentes, l'équation (8), en y remplaçant $f(a)$ par son expression (17), prend la forme

$$(23) \qquad R\zeta = f(1) - f(0) + \frac{\eta}{2\Delta}(1+\zeta)\Theta + \frac{1}{a^2}\left[J\left(a\sqrt{1+\zeta}\right) - J(0) - J'(0)a\sqrt{1+\zeta}\right].$$

Le second membre de cette équation est une fonction de ζ et de α développable, $|\zeta|$ et $|\alpha|$ étant assez petits, suivant les puissances entières et positives de ces quantités.

Cette fonction s'annule d'ailleurs quand on pose $\alpha = 0$, car les constantes $f(1)$, $f(0)$, η sont dans ce cas et il en est aussi de même de la fonction $J\left(a\sqrt{1+\zeta}\right)$, qui n'est autre chose que la somme de la série (20) en y posant $\varepsilon = 1$.

Par suite, l'équation (23) admet une solution s'annulant pour $\alpha = 0$, et cette solution, qui sera unique, se présentera, si $|\alpha|$ est assez petit, par une série de la forme

$$(24) \qquad \zeta = \zeta_1\alpha + \zeta_2\alpha^2 + \zeta_3\alpha^3 + \cdots.$$

où les coefficients se calculeront successivement, en partant de ζ_1 qui s'obtiendra immédiatement.

Du reste, en se servant de la formule de Lagrange, on peut écrire immédiatement une expression pour ζ.

A cet effet posons, pour abréger

$$f(1) - f(0) = c,$$

$$J(v) - J(0) - J'(0)v + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\Theta + c\right)v^2 = F(v).$$

Alors l'équation (23) pourra s'écrire

$$(R+c)\zeta = \frac{1}{a^2} F(a\sqrt{1+\zeta})$$

et l'on en déduira

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{(R+c)^n a^{2n}} \left\{ \frac{\partial^{n-1}\left[F(a\sqrt{u})\right]^n}{\partial u^{n-1}} \right\}_{u=1}.$$

Pour présenter cette expression sous une forme plus concise, nous introduirons une fonction auxiliaire ξ, qui sera définie par la formule

$$\xi = \frac{F(a)}{(R+c)a^2}. \tag{25}$$

Alors, les dérivées partielles par rapport à u étant transformées en dérivées par rapport à a^2, il viendra

$$\zeta = \frac{1}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-1}} \tag{26}$$

ou bien, sous une forme développée,

$$\zeta = \xi + \frac{1}{1.2} \frac{1}{2a^3} \frac{\partial a^4 \xi^2}{\partial a} + \frac{1}{1.2.3} \frac{1}{2^2 a^3} \frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a} \frac{\partial a^6 \xi^3}{\partial a}\right) + \dots .$$

Le second membre de la formule (25) est une fonction connue de a, θ, ψ, α et, en y remplaçant c et $F(a)$ par leurs développements suivant les puissances de α, qui seront de la forme

$$c = c_1\alpha + c_2\alpha^2 + c_3\alpha^3 + \dots ,$$

$$F(a) = F_1(a)\alpha + F_2(a)\alpha^2 + F_3(a)\alpha^3 + \dots ,$$

on en déduira le développement de ξ suivant les puissances de ce paramètre,

$$\xi = \xi_1 \alpha + \xi_2 \alpha^2 + \xi_3 \alpha^3 + \cdots,$$

où les ξ_i seront des fonctions connues de a, θ, ψ. La formule (26) permettra ensuite de former le développement (24).

Quant au développement de la fonction $F(a)$, qui est donnée par la formule

$$F(a) = J(a) - J(0) - J'(0) a + \left(\frac{\eta}{2\Delta} \Theta + c\right) a^2,$$

on l'obtiendra immédiatement en connaissant le développement de $J(a)$, et ce dernier développement, qui sera

$$J(a) = J_1(a) \alpha + J_2(a) \alpha^2 + J_3(a) \alpha^3 + \cdots,$$

pourra être formé en partant de la formule

$$J(a) = \frac{1}{4\pi} \int d\sigma' \int_1^{1+\zeta'} \frac{\sqrt{u}\, du}{D(a, \sqrt{u})},$$

ayant lieu si a ne dépasse pas 1.

12. D'après ce que nous avons vu au n° 9, nous pouvons conclure que $J_r(a)$, qui n'est autre chose que la valeur pour $\varepsilon = 1, \zeta = 0$ du coefficient J_r de la série (20), sera une fonction entière de

$$(27) \qquad a \sin\theta \cos\psi, \qquad a \sin\theta \sin\psi, \qquad a \cos\theta$$

de degré ne dépassant pas mr, paire par rapport à chacun des deux derniers arguments et paire ou impaire par rapport au premier argument, selon que mr est pair ou impair.

Par suite, la fonction

$$F_r(a) = J_r(a) - J_r(0) - J_r'(0) a + \left(\frac{\eta_r}{2\Delta} \Theta + c_r\right) a^2$$

sera de la même nature, puisque, dans le cas de mr impair, η_r et c_r, d'après ce que nous avons observé aux n^{os} 6 et 7, seront nuls. Mais cette fonction

ne contiendra pas de termes au-dessous du second degré par rapport aux trois arguments considérés, en sorte qu'elle sera divisible par a^2.

Cela étant, on voit par la formule (25) que $a^2\xi_r$ sera une fonction entière des arguments en question de la même nature que $F_r(a)$.

Enfin, les fonctions ξ_i étant connues, la formule (26) donnera

$$\zeta_r = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n!}\frac{\partial^{n-1} K_r(a^2\xi)^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

K_r étant le symbole défini au n° 9. Voyons ce que représente cette formule.

De ce que nous venons de dire, il résulte que $K_r(a^2\xi)^n$ sera une fonction entière des arguments (27), dont le dégré ne dépassera pas mr, et qui n'aura pas de termes au-dessous de degré $2n$. Cette fonction sera donc divisible par a^{2n}, et l'expression

$$\frac{1}{a^2}\frac{\partial^{n-1} K_r(a^2\xi)^n}{\partial(a^2)^{n-1}}$$

représentera une fonction de la même nature que $K_r(a^2\xi)^n$ divisée par a^{2n}.

Donc, comme toutes les fonctions considérées sont paires par rapport à ψ, on peut conclure que ζ_r sera une fonction entière des arguments

$$a, \qquad \sin\theta\cos\psi, \qquad \cos\theta$$

de degré ne dépassant pas $mr - 2$ par rapport à a et de degré ne dépassant pas mr par rapport aux deux derniers arguments; mais $a^2\zeta_r$ ne sera pas une fonction entière des arguments (27). Cette fonction sera paire par rapport à $\cos\theta$ et paire ou impaire par rapport à $\sin\theta\cos\psi$, ainsi que par rapport à a, selon que mr est pair ou impair.

Du reste on peut arriver à des conclusions plus précises au sujet des fonctions ξ_r et ζ_r, comme nous le montrerons dans la seconde Partie de ce Mémoire.

13. La fonction ζ que nous venons de déterminer convient-elle au problème que nous nous sommes proposé? En d'autres termes, satisfait-elle à l'équation (8)?

Cela est hors de doute pour des valeurs assez petites de a, puisque les développements en séries que nous avons employés sont alors toujours légitimes, pourvu que $|\alpha|$ et $|\zeta|$ soient assez petits. Mais, pour des valeurs de a

voisines de 1, ces développements ne sont possibles que sous une certaine condition. Il faut donc encore voir si cette condition est vérifiée par la solution obtenue.

Au n° 8 nous avons signalée une condition suffisante de cette espèce: c'est la seconde des inégalités (18), où g est un nombre suffisamment petit. Voyons si notre fonction ζ satisfait à cette condition.

D'après la proposition établie dans le Mémoire *Sur les séries de polynomes*, ζ sera une fonction analytique des arguments a, $\sin\theta\cos\psi$, $\cos\theta$ et α, qui n'aura pas de points critiques sous des conditions de la forme

$$|a| \leqq A, \qquad |\sin\theta\cos\psi| \leqq p, \qquad |\cos\theta| \leqq p, \qquad |\alpha| \leqq \mathsf{A},$$

où l'on peut prendre, pour A et p, des nombres aussi grands qu'on veut, pourvu qu'on fasse A suffisamment petit. On peut donc supposer $A > 1$, $p > 1$, et alors, quelles que soient les valeurs réelles de θ et ψ et quelle que soit la valeur de a dans l'intervalle (0,1), la fonction ζ admettra les dérivées partielles par rapport à a, $\sin\theta\cos\psi$, $\cos\theta$ de tous les ordres, et ces dérivées pourront être rendues aussi petites en valeurs absolues qu'on voudra, en faisant $|\alpha|$ suffisamment petit.

Or, s'il en est ainsi, la seconde des inégalités (18) sera satisfaite, pourvu que la valeur $\zeta(1)$ que prend la fonction ζ pour $a = 1$ soit égale à $\bar{\zeta}$.

Donc tout revient à prouver l'égalité

$$\zeta(1) = \bar{\zeta}, \tag{28}$$

et, pour le faire, il n'y a qu'à tenir compte de la remarque que nous avons faite au n° 10, d'après laquelle on aura

$$C\bar{\zeta} + \bar{S} = J\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}}\right).$$

En effet, en vertu de cela, l'égalité (16) pourra s'écrire

$$(R + c)\bar{\zeta} = F\left(\sqrt{1+\bar{\zeta}}\right).$$

On aura donc bien l'égalité (28), puisque l'équation

$$(R + c)x = F\left(\sqrt{1+x}\right)$$

n'a qu'une seule solution tendant, pour $\alpha = 0$, vers zéro.

Il est donc certain que la solution obtenue représente la fonction ζ qu'il fallait déterminer, quel que soit a dans l'intervalle $(0,1)$.

On voit que cette solution peut être prolongée au-delà de la valeur $a = 1$. Mais alors elle cesse de satisfaire à l'équation (8) et n'est en aucune relation avec le problème considéré, car les équations (5), ζ étant remplacé par cette solution, ne représenteront pas, pour $a > 1$, les surfaces de niveau extérieures à la figure d'équilibre.

14. L'analyse précédente est basée sur un procédé qui mérite d'être signalé expréssement, puisqu'il peut être utile en plusieurs occasions.

Ce procédé consiste à remplacer l'équation qu'il faut résoudre, et qui présente certaines difficultés, par une autre équation, qui ne soit plus sujette à ces difficultés, mais qui, sans être absolument équivalente à l'équation primitive, conduise néanmoins à la solution qu'il fallait déterminer.

Et en effet, l'équation (23), par laquelle nous avons remplacé l'équation (8), ne lui est pas équivalente, car le second membre de l'équation (23) est une fonction analytique de ζ, tandis que le second membre de l'équation (8) ne l'est pas, du moins, pour $a = 1$.

D'ailleurs, même pour des valeurs de a plus petites que 1, les deux équations ne sont équivalentes que sous une certaine condition. C'est ce qu'on voit en attribuant à a et ζ des valeurs fixes et en faisant tendre α vers zéro. Le second membre de l'équation (23) tendra alors toujours vers zéro, tandis que le second membre de l'équation (8) ne tendra vers zéro que si l'on a $a\sqrt{1+\zeta} \leqq 1$, et quand les valeurs attribuées à a et ζ, a étant plus petit que 1, satisfont à l'inégalité $a\sqrt{1+\zeta} > 1$, le second membre de l'équation (8) tendra vers la fonction $\frac{G}{a^2}$ considérée au nº 8, qui a toujours une valeur positive.

Si néanmoins le remplacement de l'équation (8) par celle (23) était légitime, c'est parce que nous avons admises les conditions (18) et (19), en vertu desquelles, a étant compris entre 0 et 1, α ne peut tendre vers zéro que si $a\sqrt{1+\zeta} < 1$. En effet, comme d'après (19) le nombre g doit être plus petit que 1, la seconde des inégalités (18), en y faisant $\cos\varphi = 1$, $\alpha = 0$, se réduit à

$$|\zeta| < 1 - a,$$

ce qui donne

$$a^2(1+\zeta) < a^2(2-a) < 1.$$

Toutefois les conditions (18) et (19) ne sont que des conditions suffisantes, et tout ce qui était nécessaire, c'est que S fût développable suivant les ordres relatifs à ζ et $\bar{\zeta}'$.

Or il est facile de s'assurer qu'un pareil développement sera certainement impossible, si l'on peut trouver des valeurs de a, θ, ψ, (a étant compris entre 0 et 1), telles que l'inégalité

$$|\zeta - \bar{\zeta}| > (1 - a^2)(1 + \zeta)$$

soit remplie*. On doit donc avoir

$$|\zeta - \bar{\zeta}| \leqq (1 - a^2)(1 + \zeta),$$

quels que soient a, θ, ψ, et cette condition, en y posant $\alpha = 0$, se réduit à

$$|\zeta| \leqq (1 - a^2)(1 + \zeta),$$

ce qui donne $a^2(1 + \zeta) \leqq 1$.

---

* Il suffit, pour cela, de considérer l'intégrale

$$\int_0^z \frac{\sqrt{1 + v}\, dv}{D(a, \sqrt{1 + v})}$$

dans le cas de $\theta' = \theta$, $\psi' = \psi$.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О зародышевыхъ листахъ у сальпъ. Наблюденія надъ *Salpa fusiformis.*

В. В. Заленскаго.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 17 февраля 1916 г.).

Своеобразные процессы развитія сальпъ, при которыхъ въ построеніи зародыша принимаютъ главное участіе неоплодотворенные элементы, оставляютъ мало надежды на то, чтобы мы могли тамъ встрѣтить типическое образованіе зародышевыхъ листовъ, свойственное всѣмъ другимъ животнымъ. Поэтому вопросъ о зародышевыхъ листахъ у сальпъ составляетъ самый запутанный изъ всѣхъ вопросовъ сложнаго и рѣзко отличающагося отъ другихъ животныхъ развитія сальпъ. На какую бы точку зрѣнія мы ни стали: будемъ ли мы согласно съ Тодаро, Гейдеромъ и Коротневымъ считать, что зародышъ развивается исключительно изъ дериватовъ оплодотвореннаго яйца, или будемъ придерживаться другихъ взглядовъ, и въ томъ, и въ другомъ случаѣ ясной и опредѣленной гомологіи между зачатками органовъ сальпъ и зародышевыми листами другихъ животныхъ мы не встрѣтимъ. Какъ я убѣдился на развитіи *S. zonaria*, между зачатками органовъ сальпъ и зародышевыми листами другихъ животныхъ существуетъ, однако, аналогія, выражающаяся въ томъ, что изъ опредѣленныхъ слоевъ зачатка у сальпъ развиваются опредѣленные органы, подобно тѣмъ какъ они развиваются изъ зародышевыхъ листовъ. Но гомологіи этихъ зачатковъ съ зародышевыми листами мѣшаетъ то, что у сальпъ они происходятъ изъ неоплодотворенныхъ элементовъ, у другихъ — изъ потомковъ оплодотвореннаго яйца. Въ этомъ же смыслѣ я высказался уже въ моей прежней работѣ, гдѣ я сравнивалъ развитіе сальпъ съ развитіемъ другихъ животныхъ. Мой взглядъ былъ противуположенъ взгляду высказанному Тодаро.

Тодаро[1] (стр. 15—17) утверждаетъ, что первичная пищеварительная полость у сальпъ образуется такъ-же какъ у миногъ, осетровъ и у лягушекъ. Слѣдовательно, эктодермъ происходитъ изъ бластодермическаго пузыря; энтодермъ — посредствомъ впячиванія внутренняго слоя бластодермы, а мезодермъ — изъ центральной массы зародышевыхъ клѣтокъ. Я обсуждалъ этотъ взглядъ уже въ моей прежней работѣ (Neue Untersuch. etc.) и показалъ несостоятельность его касательно сходства развитія сальпъ съ развитіемъ упомянутыхъ позвоночныхъ животныхъ. Тодаро самъ, очевидно, понялъ несостоятельность своего взгляда, такъ какъ не упоминаетъ о немъ въ своихъ послѣдующихъ работахъ. Никто изъ позднѣйшихъ эмбріологовъ также не поддержалъ взглядовъ Тодаро, такъ что въ настоящее время они имѣютъ только историческій интересъ.

Бруксъ[2] также желаетъ привести зачатокъ сальпъ къ типу гаструла и полагаетъ, что фолликулярный эпителій можетъ быть разсматриваемъ какъ бластодермическій пузырь, который образуетъ, путемъ размноженія и миграціи своихъ клѣтокъ внутрь, зачатокъ гастральной полости, или лучше сказать энтодермъ. Такимъ образомъ, слѣдовательно, получаются первые два зародышевые листа и имѣется сходство съ типомъ инвагинаціонной гаструлы. Не трудно, однако, увидѣть изъ схемъ и рисунковъ Брукса, что такое сходство чисто внѣшнее. Инвагинаціонная гаструла строится у всѣхъ животныхъ изъ бластомеръ, т. е. дериватовъ оплодотвореннаго яйца; у сальпъ же, если принять даже сходство ихъ яйцевой камеры заключающей зачатокъ съ гаструлой, происхожденіе эктодерма и энтодерма совершенно различно. Эктодермъ образуется изъ фолликула, т. е. состоитъ изъ дериватовъ неоплодотворенныхъ клѣтокъ, а энтодермъ, т. е. та часть зародыша, которую мы назвали «зачаткомъ» (см. мою статью «Сегментація яйца *Salpa fusiformis*» въ ИАН., 1916 г., № 5), образуется изъ бластомеръ (дериватовъ оплодотвореннаго яйца) и калиммоцитовъ (дериватовъ фолликулярнаго эпителія). Этотъ послѣдній выводъ, къ которому я пришелъ на основаніи своихъ изслѣдованій надъ развитіемъ *S. zonaria*, и который я могу подтвердить на изслѣдованномъ мною теперь развитіи *S. fusiformis* и *S. maxima-africana* говоритъ въ пользу теоретическихъ соображеній Брукса, но сдѣлать изъ этого выводъ, что сходство такого

[1] Fr. Todaro. Sopra lo svilluppo e l'anatomia delle salpe. (Atti della R. Accademia dei Lincei. 2 ser. Vol. II, 1875).

[2] W. K. Brooks. The Genus Salpa (Memoirs from the Biological Laboratory of the John Hopkins University Baltimore 1893).

развитія произошло путемъ эволюціи изъ типичныхъ формъ инвагинированной гаструлы я затрудняюсь именно на основаніи указанныхъ выше коренныхъ различій между происхожденіемъ типичной гаструлы животныхъ и сходной съ ней по формѣ яйцевой камеры сальпъ, заключающей внутри себя зачатокъ. Тѣмъ не менѣе я считаю взглядъ Брукса на зародышевые листы сальпъ наиболѣе правильнымъ, конечно настолько, насколько онъ касается превращенія частей яйцевой камеры и зачатка въ такъ называемые зародышевые листы.

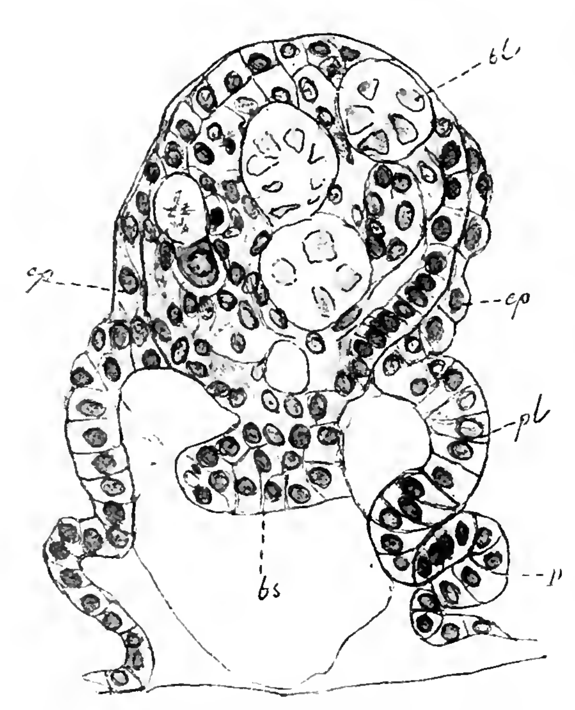
Къ совершенно другимъ выводамъ относительно образованія зародышевыхъ листовъ приходитъ Гейдеръ[1]. По его мнѣнію крупные бластомеры даютъ начало мезоэнтодерму, мелкіе — эктодерму. Какъ и въ главѣ о сегментаціи, и здѣсь эти выводы отличаются субъективностью и мало обоснованы. Я считаю нужнымъ особенно обратить вниманіе на то, что Гейдеръ разсматриваетъ фолликулъ, или стѣнку яйцевой камеры какъ дѣтскую камеру, а зародышъ образуется, по его мнѣнію, исключительно изъ зачатка. Это объясняется тѣмъ, что онъ недостаточно прослѣдилъ измѣненіе фолликула во время образованія плаценты, не видѣлъ образованія изъ него крышки плаценты, а это въ связи со взглядомъ на фолликулъ, какъ на придаточную часть зародыша повело его къ совершенно ложнымъ, какъ увидимъ, заключеніемъ относительно зародышевыхъ листовъ и органогенеза у *S. fusiformis*.

Въ моей статьѣ о «Сегментаціи яйца *S. fusiformis* я привожу рисунокъ разрѣза зародыша сальпъ въ началѣ образованія клоакальныхъ складокъ. Этотъ рисунокъ для большей ясности и удобства я повторяю здѣсь (фиг. 1). Наружный слой зародыша представляетъ клоакальный колпачекъ (*cp*), который внизу непосредственно переходитъ въ плаценту (*pl*), внизу которой образуются клоакальныя складки (*cf*). Подъ клоакальнымъ колпачкомъ, который сохранилъ свое клѣточное строеніе только въ нижней части, въ верхней же обратился въ тонкую безструктурную оболочку, лежитъ яйцевая камера вплотную наполненная зачаткомъ, состоящимъ изъ бластомеръ и калиммоцитовъ. Стѣнку яйцевой камеры, однако, очень ясно можно отличить отъ зачатка, равно какъ легко видѣть, что она внизу переходитъ въ кровообразовательвяную почку (*bs*). Стѣнка яйцевой камеры составляетъ слѣдовательно наружный слой зародыша, непосредственно прикрываемый клоакаль-

[1] K. Heider. Beiträge zur Embryologie von *Salpa fusiformis* Cuv. (Abhandl. d. Senkenbergischen naturf. Gesellschaft. Bd. XVIII, 1895).

нымъ колпачкомъ. Внутренность зародыша состоитъ изъ калиммоцитовъ, окружающихъ три громадныя бластомеры.

Я нарочно привожу эту фигуру, потому что у Гейдера приведенъ рисунокъ почти той же стадіи развитія (ср. его fig. 5, 6, 7), съ которымъ очень важно сравнить мой рисунокъ, такъ какъ это сравненіе можетъ сразу выяснить разницу въ нашихъ взглядахъ. Самое существенное различіе въ моемъ толкованіи этого разрѣза сравнительно съ Гейдеровскимъ заключается въ томъ, что Гейдеръ считаетъ стѣнку яйцевой камеры, которую онъ называетъ внутреннимъ зародышевымъ мѣшкомъ (innere Embryosack) за провизорное образованіе, не принимающее никакого участія въ постройкѣ зародыша, я же считаю его частью зародыша. Онъ утверждаетъ, что эта часть зародыша сростается съ клоакальнымъ колпачкомъ. Этотъ послѣдній взглядъ Гейдера происходитъ оттого, что онъ не прослѣдилъ детально судьбы клоакальнаго колпачка (Epithelialhügel, какъ называлъ его прежде я и какъ называетъ его онъ. Если-бы онъ внимательно прослѣдилъ судьбу колпачка, то убѣдился бы въ томъ, что онъ даже и въ описываемую теперь стадію, сплющивается въ большей части своей поверхности, а въ слѣдующихъ стадіяхъ совершенно пропадаетъ. Онъ могъ бы убѣдиться также, что стѣнка яйцевой камеры, фолликулъ, или какъ онъ называетъ внутренняя пластинка зародышеваго мѣшка, напротивъ, весьма ясно различается и въ слѣдующихъ стадіяхъ развитія и представляетъ слой клѣтокъ, изъ котораго развивается кожа зародыша и всѣ такъ называемые эктодермальные органы, т. е. превращается въ эктодермъ. Понятно, что, незамѣтивъ настоящаго эктодерма, онъ долженъ былъ искать его въ другихъ мѣстахъ, т. е. въ клѣткахъ зачатка, и отсюда происходитъ разница



Фиг. 1. Продольный разрѣзъ черезъ зородыша во время образованія клоакальныхъ складокъ (*p*); *bl* — бластомера; *cp* — клоакальный колпачекъ; *pl* — плацента; *bs* — кровообразовательная почка.

въ его взглядахъ сравнительно съ моими относительно происхожденія различныхъ органовъ изъ извѣстныхъ зародышевыхъ листовъ, т. е. другими словами совершенно различное пониманіе строенія зародыша.

Непосредственно вслѣдъ за началомъ образованія клоакальныхъ складокъ форма зародыша измѣняется. Зародышъ сильно расширяется и кажется поэтому нѣсколько ниже, чѣмъ онъ былъ раньше. Гораздо существеннѣе, однако, его внутреннія измѣненія. Собственно говоря, гистологическій составъ его не измѣнился, но измѣнилось нѣсколько расположеніе клѣтокъ, и главнымъ образомъ бластомеръ. Послѣднія начинаютъ располагаться въ правильномъ порядкѣ въ два ряда, какъ это хорошо видно на фиг. 2. Попарно расположенныя громадныя бластомеры занимаютъ положеніе параллельно продольной оси зародыша, ограничивая съ обѣихъ сторонъ осевую часть зародыша и двѣ боковыя части, занятыя многоугольными калиммоцитами. Это расположеніе, какъ увидимъ, имѣетъ важное значеніе, такъ какъ представляетъ первую оріентацію зародышевыхъ листовъ. Центральная часть представляетъ зачатокъ клоаки, слѣдовательно, можетъ быть признана за энтодермъ. Периферическія части, лежащія внѣ рядовъ бластомеръ впослѣдствіе даютъ начало блуждающимъ клѣткамъ и мышцамъ зародыша, слѣдовательно, представляютъ мезодермъ. Такъ какъ обѣ эти части въ описываемой стадіи развитія соединены и составляютъ общую внутреннюю массу зародыша, то мы можемъ эту послѣднюю назвать мезоэнтодермомъ. Полость яйцевой камеры въ этой стадіи развитія совершенно исчезла вслѣдствіе переполненія внутренней массой клѣтокъ, которая со всѣхъ сторонъ непосредственно прилегаетъ къ наружному слою клѣтокъ, т. е. къ стѣнкѣ яйцевой камеры. Этотъ наружный слой даетъ впослѣдствіе начало кожѣ и нервной системѣ, слѣдовательно онъ можетъ быть признанъ за эктодермъ. Онъ образуетъ, по прежнему, эпителіальный мѣшокъ, облегающій мезо-энтодермальную массу клѣтокъ. Верхняя часть его, конечно, выпукла, соотвѣтственно формѣ зародыша, нижняя, отграничивающая зародышъ отъ полости плаценты, плоская. Она превращается потомъ въ крышу плаценты и обособляется отъ верхней. Теперь же обѣ эти части образуютъ одно цѣлое.

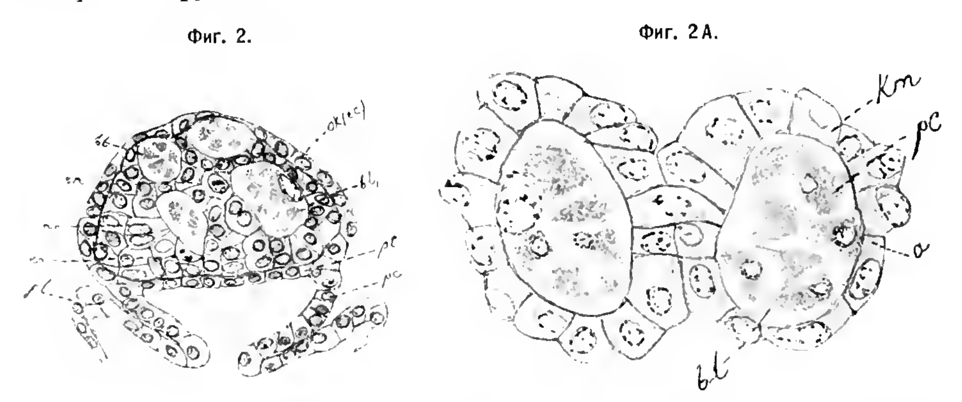
Клоакальный колпачекъ почти совсѣмъ исчезъ, хотя, слѣдуетъ замѣтить, что на нѣкоторыхъ разрѣзахъ изъ болѣе позднихъ стадій развитія, остаются еще иногда его клѣтки.

Вслѣдствіе исчезанія клоакальнаго колпачка, стѣнки плаценты верхними своими частями слипаются иногда съ эктодермомъ.

Судя по незначительной величинѣ клоакальныхъ складокъ, эта стадія развитія недалеко ушла отъ предыдущей.

Изъ всѣхъ описанныхъ частей зародыша наиболѣе важною является центральная или энтодермъ, такъ какъ въ ней очень скоро начинается образованіе клоакальной полости. Поэтому я остановлюсь нѣсколько подробнѣе на ея формѣ. Хотя форма ея не обозначилась вполнѣ, но и теперь уже, по ея отношенію къ бластомерамъ, можно легко опредѣлить зачатки отдѣльныхъ частей будущей клоаки. Форма энтодерма крестообразная. Въ ней можно различить осевую часть, въ которой скоро появляется полость и двѣ боковыя — поперечныя. Положеніе осевой части само собою понятно; боковыя части въ видѣ двухъ отростковъ идутъ въ стороны между верхними и нижними бластомерами. Въ осевой части (cn_1) можно въ свою очередь различить верхній маленькій отрѣзокъ, который верхнимъ концомъ упирается въ верхнюю часть энтодерма, и нижній большой, который книзу расширяется и упирается въ крышу плаценты. Самая существенная часть энтодерма есть та, которая лежитъ между четырьмя бластомерами, центральный отдѣлъ ея, и служитъ собственно зачаткомъ клоакальной полости, а боковыя части (*cn*) служатъ зачаткомъ вѣтвей клоакальной полости или жаберныхъ трубокъ.

Фиг. 2. Фиг. 2А.



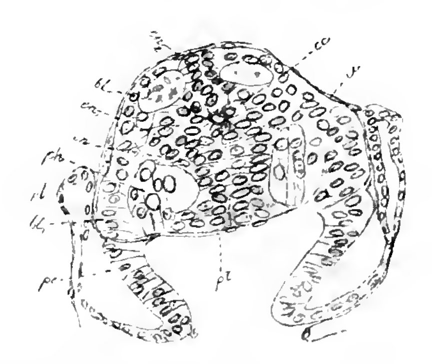
Фиг. 2. Поперечный разрѣзъ черезъ зародыша *S. fusiformis* въ стадіи передъ образованіемъ клоакальной полости. *ok* (*lc*) — стѣнка яйцевой камеры, превратившаяся въ эктодермъ; bl_1 — нижнія бластомеры; *pt* — крыша плаценты (нижняя часть стѣнки яйцевой камеры); *pc* — плацента; *bl* — верхнія бластомеры; *en* — центральная часть энтодерма; *me* — мезодермъ; *pl* — клоакальныя складки. (Увелич. Apochr. 4 + Im. 1, 5; уменьш. вдвое).

Фиг. 2А. Двѣ бластомеры (*bl*) изъ той же серіи разрѣзовъ, въ которыхъ нарцелли (*pc*) превратились въ клѣтки, получивъ ядра. Вокругъ бластомеръ калиммоциты (*km*).

Переходимъ къ слѣдующей стадіи развитія, гдѣ клоакальныя складки выросли почти до половины зародышеваго тѣла (Фиг. 3). Поперечный раз-

рѣзъ, который мы будемъ сейчасъ изслѣдовать, проведенъ не совсѣмъ прямо, онъ немного уклонился въ одну сторону, что видно уже по величинѣ складокъ, которыя направо выше, чѣмъ налѣво, вслѣдствіе этого и нижній рядъ правыхъ бластомеръ не попалъ въ разрѣзъ. Въ этомъ разрѣзѣ мы сразу замѣчаемъ два существенныхъ измѣненія. Во 1-хъ въ центральной части энтодерма какъ разъ между обѣими отходящими въ стороны вѣтвями, образуется маленькая полость (фиг. 3 *cc*), которая на этомъ разрѣзѣ видна въ видѣ маленькаго отверстія. Эта полость есть зачатокъ клоакальной полости. Она образуется вѣроятно вслѣдствіе разступленія энтодермическихъ клѣтокъ и такъ мала, что видна только на одномъ разрѣзѣ.

Во 2-хъ въ нижней части мезоэнтодерма, въ стороны отъ бластомеръ, образуются двѣ симметричныя группы большихъ высокихъ клѣтокъ (фиг. 3 *ph*), которыя, какъ увидимъ дальше, составляютъ зачатки глотки (*pharynx*). Эти группы клѣтокъ лежатъ въ сторонѣ отъ энтодерма, но уже въ этой стадіи развитія мы можемъ замѣтить, что нижняя часть энтодерма расширяется въ стороны подъ нижними бластомерами и почти соприкасаются съ зачатками глотки. На это я обращаю вниманіе потому что въ дальнѣйшихъ стадіяхъ развитія энтодермъ соединяется съ зачатками глотки.

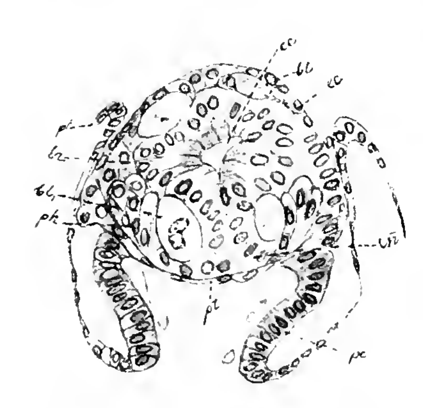


Фиг. 3. Поперечный разрѣзъ черезъ зародышъ *S. fusiformis* въ стадіи появленія клоакальной полости (*cc*); *ec* — эктодермъ; *en* — осевая часть эктодерма; en_1 — боковыя вѣтви, и en_2 — верхній отдѣлъ осевой части энтодерма; *ph* — большія клѣтки изъ которыхъ образуются зачатки глотки (глоточныя складки); *pc* — стѣнки плаценты; *pt* — крыша плаценты; *pl* — клоакальныя складки (Ос. 4 + Im. 1, 5, уменьш.).

Слѣдуетъ отмѣтить также сильное размноженіе клѣтокъ энтодерма, осевая часть котораго значительно утолщается и состоитъ теперь не изъ двухъ, а изъ четырехъ рядовъ клѣтокъ (фиг. 3 *en*). Между двумя центральными рядами клѣтокъ является уже теперь тонкая осевая линія, которая составляетъ зачатокъ продольной щели, соединяющей впослѣдствіе полость клоаки съ возобновляющеюся полостью яйцевой камеры (полостью тѣла).

Въ этомъ разрѣзѣ я долженъ отмѣтить чрезвычайную сплющенность клѣтокъ эктодерма (*ec*), которыя очевидно въ извѣстное время утончаются, впослѣдствіе становятся толще. Также тонка и крыша плаценты, связь которой съ энтодермомъ (т. е. съ прежней стѣнкой яйцевой камеры) теперь довольно ясна.

Въ слѣдующей стадіи развитія, когда клоакальныя складки достигаютъ почти $^2/_3$ высоты, клоакальная полость зародыша значительно увеличивается (фиг. 4 *cc*). Она имѣетъ теперь треугольную форму; центральная часть ея удлиняется заостреннымъ концомъ внизъ и переходитъ въ тонкую линію между клѣтками осевой части энтодерма, превращающуюся потомъ въ щель для соединенія клоакальный полости съ полостью яйцевой камеры, (клоакальный каналъ) въ стороны она удлиняется въ отростки, будущія полости жаберныхъ мѣшковъ клоаки (фиг. 4 *br*). Эпителіальныя энтодермическія клѣтки, ограничивающія клоакальную полость и будущую клоакальную щель цилиндрическія и расположены въ одинъ слой, тогда какъ въ предыдущей стадіи развитія онѣ располагались въ нѣсколько слоевъ. Я думаю, что это можно было бы объяснить перемѣщеніемъ ихъ, а не исчезаніемъ нѣкоторыхъ клѣтокъ, такъ какъ слѣдовъ такого исчезанія не видно.



Фиг. 4. Поперечный разрѣзъ зародыша *S. fusiformis* въ стадіи дальнѣйшаго развитія клоаки. Клоакальная полость увеличилась, и видны боковыя ея расширенія, служащія зачатками жаберныхъ мѣшковъ (*br*). Произошло соединеніе зачатка клоаки съ зачатками глотки. Остальныя буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Ос. 4 + Im. 1,5, уменьш. вдвое).

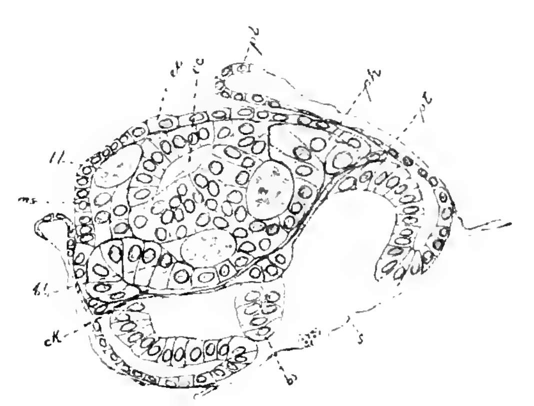
Въ нижней части зародыша произошло полное соединеніе нижней части энтодерма съ зачатками глотки, намѣченное въ предыдущей стадіи. Теперь обѣ симметричныя части энтодерма, составляющія непосредственное продолженіе стѣнокъ глотки расходятся въ стороны въ видѣ двухъ эпителіальныхъ пластинокъ (фиг. 4 *cn*), проходятъ подъ нижними бластомерами и соединяются съ зачатками глотки. Нижнія бластомеры совершенно заключены между всѣми этими частями энтодерма.

Зачатки глотки (фиг. 4 *ph*) состоятъ изъ громадныхъ клѣтокъ, расширенныхъ вверху и съуженныхъ внизу. Каждый зачатокъ, по расположенію своихъ клѣтокъ, имѣетъ такимъ образомъ форму вѣера. Въ настоящей стадіи развитія они не имѣютъ еще форму складокъ.

Эктодермъ соединенъ по прежнему съ крышею плаценты, съ которою вмѣстѣ онъ образуетъ мѣшокъ, внутри котораго находится мезоэнтодермъ съ заложенными въ немъ органами. Однако, объособленіе крыши плаценты отъ энтодерма уже начинается. Нижній край эктодерма состоитъ изъ утолщенныхъ клѣтокъ и рѣзко выступаетъ наружу. Наружныя края крыши плаценты состоятъ изъ удлиненныхъ клѣтокъ, которыя проникаютъ между

плацентой и зачаткомъ глотки и прикрѣпляются своими концами къ внутренней сторонѣ клѣтокъ эктодерма. Такимъ образомъ, хотя обособленіе энтодерма отъ плацентной крышки произошло, тѣмъ не менѣе обѣ эти части связаны еще плотно другъ съ другомъ.

Въ слѣдующей стадіи развитія (фиг. 5), гдѣ клоакальныя складки достигаютъ уже верхней части зародыша происходитъ дальнѣйшее развитіе зачатковъ глотки и начинается возстановленіе полости яйцевой камеры (фолликулярной полости). Разрѣзъ прошелъ не совсѣмъ правильно вслѣдствіе этого не всѣ бластомеры видны на немъ. Подъ нижними бластомерами лежитъ соединительная пластинка между клоакальнымъ зачаткомъ и зачатками глотки (фиг. 5). Въ этихъ послѣднихъ произошли очень существенныя измѣненія заключающіяся въ слѣдующемъ. Клѣтки зачатковъ стали сравнительно съ прежнимъ ниже и пріобрѣли видъ клѣтокъ цилиндрическаго эпителія. Соединительныя пластинки вмѣстѣ съ зачатками глотки представляютъ теперь двѣ эпителіальныя пластинки: правую и лѣвую, соединенныя въ срединѣ зародыша съ нижнею частью глоточнаго зачатка. Всѣ эти образованія вмѣстѣ составляютъ теперь одно общее цѣлое, которое можетъ быть названо общимъ именемъ энтодермъ. Верхняя часть его составляетъ зачатокъ клоаки; нижняя — зачатокъ глотки. Послѣдняя составляетъ двѣ пластинки, направленныя въ стороны и состоящія въ центральныхъ частяхъ, гдѣ онѣ соединяются съ зачаткомъ клоаки, изъ меньшихъ клѣтокъ, чѣмъ по бокамъ. Боковыя части этихъ пластинокъ (фиг. 5 *ph*) подгибаются своими концами внизъ, образуя такимъ образомъ двѣ складки, глоточныя или фарингеальныя складки, верхнія стѣнки которыхъ обращены къ мезодерму, нижнія оканчивающіяся нѣсколько заостренными концами, лежатъ на крышѣ плаценты. Верхняя стѣнка складки, когда зачатки глотки выростаютъ, будетъ составлять стѣнку глотки обращенную къ центру, а нижняя — обращенную наружу. Между этими стѣнками образуется, само собою разумѣется, щелевидныя полости, которыя составляютъ зачатки



Фиг. 5. Поперечный разрѣзъ черезъ зародышъ *S. fusiformis* во время образованія глоточныхъ или фарингеальныхъ складокъ (*ph*). Остальныя буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Zeiss. ос. 4 + Im. 1,5, уменьш. вдвое).

полости глотки. Какъ разъ въ это время нижняя часть мезоэнтодерма отстаетъ отъ крыши плаценты. Между этими двумя образованіями образуется узкая полость (фиг. 5 *ck*), которая есть ничто иное, какъ прежняя полость яйцевой камеры, исчезнувшая тогда, когда яйцевая камера наполнилась клѣтками зачатка: она возстановилась теперь, когда эти клѣтки, въ видѣ мезоэнтодерма отстали отъ ея нижней стѣнки, т. е. крыши плаценты. Въ эту полость открываются теперь съ двухъ сторонъ оба зачатка глотки.

Всѣ эти зачатки органовъ были описаны Гейдеромъ, но онъ ихъ толкуетъ иначе, чѣмъ я. Онъ совершенно правильно толкуетъ центральную полость, какъ полость клоаки, которую онъ же и открылъ, но считаетъ, что она образуется изъ углубленія эктодерма, а не изъ энтодерма, какъ я описалъ въ предшествующихъ строкахъ. Зачатки же глотки, которые я описалъ теперь, онъ считаетъ складками амніона, который будто бы существуетъ у сальпъ. Не признавъ въ описанныхъ впервые имъ же складкахъ зачатковъ глотки, онъ долженъ былъ искать ихъ гдѣ-нибудь въ другомъ мѣстѣ; вслѣдствіе этого онъ даетъ уже само по себѣ мало вѣроятное описаніе образованія глотки изъ особаго скопленія клѣтокъ, внутри котораго появляется затѣмъ полость. Объ этомъ дальше.

Различіе въ нашихъ взглядахъ на способъ образованія клоаки и глотки у *S. fusiformis* объясняется двумя причинами. Во 1-хъ тѣмъ, что взгляды наши на построеніе зародыша изъ эмбріональныхъ клѣтокъ (бластомеръ и калиммоцитовъ) различны. Онъ считаетъ, что зародышъ образуется только изъ клѣтокъ находящихся въ яйцевой камерѣ (моего «зачатка») и что стѣнка камеры (фолликулъ) не принимаетъ участіе въ построеніи зародыша. Я же считаю, что изъ фолликула образуется периферическая часть зародыша т. е. эктодермъ. Вслѣдствіе этого, у него въ центральной массѣ клѣтокъ, лежащихъ въ яйцевой камерѣ, въ моемъ «зачаткѣ» есть и эктодермъ, и мезодермъ съ энтодермомъ; у меня же зачатокъ представляетъ только мезоэнтодермъ. При такомъ взглядѣ, если бы клоака образовалась черезъ углубленіе периферическаго слоя клѣтокъ, лежащихъ внутри фолликула (его «Embryosack»), какъ онъ думаетъ, то онъ вправѣ былъ бы сказать, что клоака образуется черезъ углубленіе эктодерма. Этого конечно нѣтъ, и взглядъ его поэтому я считаю ошибочнымъ.

Вторая причина различія нашихъ взглядовъ заключается въ томъ, что Гейдеръ не изслѣдовалъ подробно самыхъ важныхъ стадій развитія, въ которыхъ именно и происходитъ образованіе клоаки и глотки. Въ правильности этого заключенія убѣдиться очень легко. Стоитъ только посмотрѣть

рисунки Гейдера и познакомиться такимъ образомъ съ матерьяломъ, съ которымъ онъ работалъ. На рисункѣ 8 (loc. cit. Taf. I) нарисованъ у него разрѣзъ черезъ позднѣйшую стадію сегментаціи, при томъ ненормальную, какъ говоритъ Гейдеръ. На слѣдующемъ рисункѣ 9 изображенъ разрѣзъ черезъ зародыша, у котораго клоакальныя складки достигаютъ уже половины высоты зародыша. На этомъ рисункѣ виденъ ясно зачатокъ клоаки. Между этими двумя стадіями (loc. cit рис. 8 и рис. 9) протекаетъ цѣлый рядъ образовательныхъ процессовъ, очень важныхъ, такъ какъ они касаются образованія клоаки. На стадіи рис. 9 зачатокъ клоаки уже открывается въ полость яйцевой камеры, слѣдовательно ушелъ довольно далеко въ своемъ развитіи. Изъ этого я заключаю, что Гейдеръ совершенно не видѣлъ какъ развивается клоака; тѣмъ не менѣе онъ утверждаетъ, что она образуется въ видѣ углубленія эктодерма. Это заключеніе и не объосновано ни на чемъ, и не вѣрно. Мы видѣли, что никакого углубленія для клоаки не образуется, а клоакальная полость образуется въ плотномъ зачаткѣ эктодермы въ видѣ маленькой лакуны между клѣтками. Мы видимъ, что это заключеніе Гейдера также недостаточно аргументировано и также неосновательно, какъ и его утвержденіе относительно поѣданія калиммоцитовъ бластомерами и постройки зародыша исключительно этими послѣдними элементами.

Кромѣ Гейдера, эмбріологіею *S. fusiformis* занимался также Коротневъ[1] и издалъ работу, главнымъ образомъ касающуюся органогенеза сальпъ. Коротневъ во многихъ отношеніяхъ расходится съ Гейдеромъ. Во 1-хъ Коротневъ утверждаетъ, что эктодерма *S. fusiformis* образуется изъ двухъ источниковъ: верхняя часть изъ — бластомеръ (бластоцитовъ, какъ онъ называетъ дериваты бластомеръ), боковыя части изъ калиммоцитовъ (loc. cit. p. 402—403). Во 2-хъ онъ отрицаетъ существованіе амніональныхъ складокъ, но признаетъ существованіе амніональныхъ полостей, полагая, что послѣднія происходятъ черезъ расщепленіе первоначально образующихся изъ двурядно расположенныхъ группъ калиммоцитовъ, между которыми образуется полость. По его мнѣнію эти полости открываются первоначально въ полость плаценты; послѣ закрыванія отверстій, ведущихъ въ полость плаценты, обѣ амніональныя складки сливаются вмѣстѣ и образуютъ одну обширную полость. Какова дальнѣйшая судьба этой полости Коротневъ не говоритъ. По всей вѣроятности онъ въ этомъ отношеніи сходится

---

[1] A. Korotneff. Zur Embryologie von Salpa runcinata-fusiformis (Zeitschr. für wiss. Zoologie. Bd. LXII).

съ Гейдеромъ. Въ 3-хъ, Коротневъ расходится съ Гейдеромъ относительно образованія клоакальной и глоточной полостей. Относительно клоаки онъ говоритъ, что стѣнки ея образуются исключительно изъ калиммоцитовъ (стр. 402), которые, по его мнѣнію, замѣняются бластомерами. Глоточная полость образуется отчасти изъ бластоцитовъ (бластомеръ), отчасти изъ калиммоцитовъ (стр. 402). Какъ образуется первый зачатокъ фарингеальной полости, объ этомъ Коротневъ совершенно не говоритъ. Онъ даетъ только рисунокъ разрѣза (фиг. 9, loc. cit.), на которомъ обѣ фаренгіальныя полости уже существуютъ. Подобно тому какъ и въ клоакальной стѣнкѣ, въ стѣнкѣ глотки бластоциты вытѣсняютъ мало по малу калиммоцитовъ.

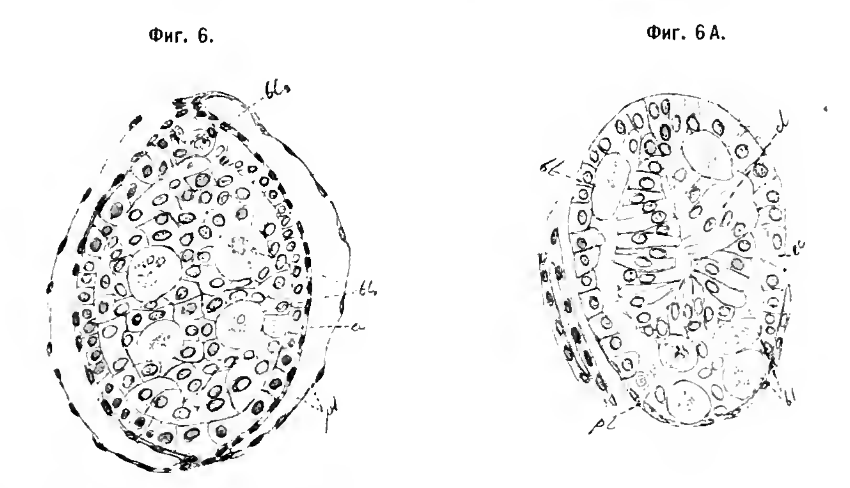
Этотъ взглядъ совершенно соотвѣтствуетъ взгляду Брукса, о которомъ я говорилъ выше и о которомъ Коротневъ здѣсь совершенно не упоминаетъ. Въ одной изъ слѣдующихъ статей я остановлюсь на этомъ процессѣ подробнѣе, такъ какъ онъ происходитъ въ болѣе позднихъ стадіяхъ развитія.

Передавая сущность наблюденій Коротнева я не буду останавливаться на ихъ критикѣ. Разница въ результатахъ нашихъ изслѣдованій зависитъ отъ разницы въ наблюденіяхъ, а не въ толкованіи. Поэтому изъ изложенія моихъ наблюденій каждый можетъ составить себѣ представленіе насколько тѣ или другія прочнѣе обоснованы.

Для болѣе основательнаго знакомства съ строеніемъ зародыша во время начальныхъ стадій образованія клоаки и глотки необходимо изслѣдовать кромѣ поперечныхъ разрѣзовъ, еще и горизонтальные; на нихъ мы можемъ составить себѣ правильное понятіе о формѣ энтодерма и расположенія бластомеръ.

На фиг. 6 и 6а изображены два фронтальныхъ разрѣза зародыша изъ стадіи приблизительно находящейся между фиг. 4 и 5. Клоакальная полость уже появилась, но она меньше той, которая находится въ стадіи 4, и больше находящейся на стадіи 4. На фиг. 6 разрѣзъ прошелъ черезъ нижнюю часть зародыша, на фиг. 6 А — черезъ верхнюю. Поэтому на фиг. 6 видны клоакальныя складки (*pc*) цѣликомъ; на переднемъ и на заднемъ концѣ онѣ уже спаяны между собою. На фиг. 6 А разрѣзъ прошелъ только черезъ верхніе края клоакальныхъ складокъ, лежащихъ по бокамъ зародыша. Энтодермъ (фиг. 6 *en*) занимаетъ центральную часть тѣла зародыша и является въ видѣ плотной, а поэтому на разрѣзахъ болѣе темной пластинки, проходящей по осевой части зародыша, отъ передняго конца до задняго и дающей на всемъ протяженіи три пары боковыхъ отростковъ, положеніе которыхъ обусловливается положеніемъ бластомеръ: передняя пара лежитъ впереди

передней пары бластомеръ, средняя — между передней и задней парами, а задняя позади задней пары. Эти отростки совершенно ясно ограничиваются бластомерами, но концы ихъ непосредственно переходятъ въ мезодермъ. Въ нижней части зародыша находятся только двѣ пары бластомеръ: передняя и задняя, какъ это видно на прилагаемомъ рисункѣ. Кромѣ этихъ


Фиг. 6. Фиг. 6 А.

Фиг. 6, 6 А. Два горизонтальныхъ разрѣза изъ нижней (фиг. 6) и изъ верхней части (фиг. 6 А) зародыша въ стадіи образованія клоакальной полости. bl_2 — бластомеръ въ эктодермѣ; *cl* — клоака. Остальныя буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Ос. 4 + Im. 1,5; уменьш. вдвое).

бластомеръ видна еще на разрѣзѣ одна бластомера въ задней части зародыша, проникшая въ эктодермъ (фиг. 6, bl_2). Вѣроятно это есть родоначальница тѣхъ бластомеръ, которыя скопляются въ болѣе позднихъ стадіяхъ развитія въ довольно большомъ количествѣ.

Такое же правильное распредѣленіе бластомеръ мы видимъ и въ верхней части зародыша, оно изображено на фиг. 6 А. Здѣсь, однако, число бластомеръ немного больше, чѣмъ въ нижней части: ихъ находится 3 пары. Двѣ переднія пары совершенно соотвѣтствуютъ по своему положенію двумъ парамъ нижней части; третья же помѣщается позади отъ этихъ двухъ паръ. По своему строенію онѣ совершенно одинаковы.

На разрѣзѣ изъ верхней части зародыша можно убѣдиться, что энтодермъ или зачатокъ клоаки имѣетъ уже полость (фиг. 6 А) клоакальную, которой въ разрѣзѣ фиг. 6 не видно, потому что разрѣзъ прошелъ черезъ нижній отдѣлъ осевой части энтодерма (ср. фиг. 6 съ фиг. 4 и 5). Стѣнка клоаки въ верхней части не даетъ тѣхъ отростковъ, которые видны въ нижней между бластомерами. Что касается гистологическаго строенія, то оно

одинаково въ верхней и нижней части энтодерма. Вездѣ зачатокъ клоаки состоитъ изъ многогранныхъ клѣтокъ съ мелкозернистымъ содержимымъ.

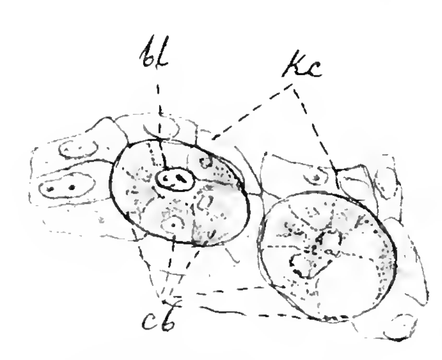
Изъ описаннаго сейчасъ расположенія бластомеръ среди зародышевыхъ клѣтокъ слѣдуетъ отмѣтить нѣсколько наиболѣе важныхъ фактовъ. Во 1-хъ весьма интересно правильное расположеніе бластомеръ внѣ зачатковъ клоаки и глотки. Мы видимъ изъ прилагаемыхъ сагиттальныхъ (фиг. 2, 3, 4 и 5) и фронтальныхъ разрѣзовъ (фиг. 6, 6 А), что бластомеры лежатъ попарно внѣ зачатка клоаки и глотки, а если мы примемъ эти зачатки за энтодермъ, то они слѣдовательно лежатъ въ мезодермѣ. Во 2-хъ также важно, что мы насчитали только 10 или 11 бластомеръ, изъ которыхъ двѣ лежатъ въ задней части зародыша близко къ эктодерму. Мы видѣли, что максимальное число бластомеръ въ концѣ сегментаціи есть 16; недостаетъ слѣдовательно 5. Онѣ лежатъ также въ задней части зародыша. Изъ этого мы видимъ, что можно, по положенію бластомеръ, различить центральныя и заднія. Оба эти рода бластомеръ, естественно, должны при дальнѣйшемъ развитіи органовъ попадать вблизи различныхъ органовъ и дальнѣйшая судьба ихъ должна быть различною. Въ 3-хъ мы можемъ вывести заключеніе, что въ образованіи зачатковъ органовъ бластомеры не принимаютъ никакого участія. Принимаютъ ли онѣ, или ихъ продукты, участіе въ возстановленіи органовъ, путемъ замѣщенія калиммоцитовъ, — это вопросъ, который можетъ быть рѣшенъ изученіемъ дальнѣйшихъ стадій развитія. Закладка же органовъ и зародышевыхъ листовъ происходитъ исключительно насчетъ калиммоцитовъ.

Несмотря, однако, на кажущійся одинаковый видъ бластомеръ въ позднихъ стадіяхъ сегментаціи и въ періодъ развитія зародышевыхъ листовъ, онѣ однако существенно измѣняются и эти измѣненія связаны съ такъ называемыми парцеллями, которые мы подробно разсмотрѣли въ статьѣ о сегментаціи *S. fusiformis* (см. ИАН., № 5, 1916). Мы видѣли, что парцелли составляютъ ничто иное, какъ искусственно отдѣленныя при разрѣзѣ части лопастныхъ отростковъ плазмы бластомеръ. Въ цитированной сейчасъ статьѣ я указалъ на то, что въ этихъ лопастныхъ отросткахъ я тщетно искалъ ядеръ, о которыхъ говоритъ Гейдеръ, съ оговоркою, что они «неясны». Изслѣдуя бластомеры въ періодъ образованія зародышевыхъ листовъ, я на нѣкоторыхъ разрѣзахъ видѣлъ чрезвычайно ясныя ядра, въ большинствѣ же случаевъ онѣ дѣйствительно, хотя и могутъ быть констатированы, но неясны. Причина этой неясности заключается, какъ мнѣ кажется, въ самомъ свойствѣ ядеръ. Ядра лопастныхъ отростковъ очень блѣдны,

вслѣдствіе очень незначительнаго количества содержащагося въ нихъ хроматина. Поэтому онѣ очень легко закрываются или затемняются зернистой плазмой, въ которой онѣ заключены. На тонкихъ разрѣзахъ, если притомъ ядро находится на краю плазмы, оно кажется очень яснымъ, какъ, напр., на фиг. 2 A, парцелля *a*. Въ другихъ случаяхъ надо очень внимательно изслѣдовать парцелли для того, чтобы убѣдиться въ существованіи въ ней ядеръ. Конечно, увидѣвши разъ ясное ядро въ какой-нибудь парцеллѣ, не трудно будетъ открыть его и въ другихъ. На двухъ бластомерахъ, изображенныхъ на фиг. 2 A въ шести парцелляхъ мнѣ удалось найти ядра, которыя и нарисованы. Эти ядра имѣютъ форму овальныхъ или круглыхъ пузырьковъ, наполненныхъ прозрачною свѣтлою жидкостью и заключающихъ одно или рѣже нѣсколько точечныхъ зернышекъ хроматина. Въ сущности онѣ походятъ пузыревидною формою и строеніемъ на ядро бластомеры, но конечно несравненно мельче послѣдняго и снабжены гораздо меньшимъ количествомъ хроматина. Отсюда мы видимъ, что парцелли или лопастные отростки суть дѣйствительно настоящія клѣтки. Откуда же происходятъ ихъ ядра? Это вопросъ въ техническомъ отношеніи очень трудно рѣшить опять таки вслѣдствіе зернистости протоплазмы, окружающей ядро бластомеры. Мнѣ кажется, однако, что я могу съ увѣренностью сказать, что эти ядра происходятъ изъ ядра бластомеры. Не говоря о томъ, что самая парцелля есть часть бластомеры, такъ какъ образуются изъ ея плазмы; поэтому весьма вѣроятно, что и ядро ея образуется изъ ядра бластомеры, я могу привести еще въ доказательство моего мнѣнія аналогичные факты, которые я наблюдалъ у *Salpa zonaria*. У этой сальпы мною описано эндогенное размноженіе бластомеръ, похожее на почкованіе, слѣдствіемъ котораго является въ капсулѣ, заключающей бластомеру много мелкихъ клѣтокъ, описанныхъ мною подъ именемъ «бластомерныхъ клѣтокъ» (Blastomerzellen). Мнѣ удалось весьма ясно видѣть процессъ образованія этихъ клѣтокъ. Онъ заключается въ томъ, что ядро бластомеры отдѣляетъ отъ себя маленькія пузыревидныя почечки, заключающія по одному точечному зернышку хроматина. Въ это время плазма бластомеры распадается на множество мелкихъ кусочковъ, островковъ, лежащихъ вблизи ядра. Какъ только отъ ядра отдѣлится пузыревидная почка, тотчасъ же она окружается комочкомъ плазмы; такимъ образомъ комочекъ плазмы съ ядромъ въ срединѣ превращается въ клѣтку (бластомерную), которая за тѣмъ ползетъ отъ ядра къ периферіи бластомеры и тамъ остается. Подобный же способъ образованія ядеръ изъ ядра бластомеры совершается по всей вѣроятности и у *Salpa fusiformis*. Здѣсь, правда, плазма бластомеры

не распадается на комочки, или островки, но она разрастается въ лопастные отростки, которые, какъ увидимъ дальше, также отдѣляются отъ общей плазмы бластомеры. Аналогія между обоими этими явленіями подтверждается еще болѣе и сходствомъ дальнѣйшей судьбы парцелль съ бластодермными клѣтками *S. zonaria*. Они также превращаются въ клѣтки, которыя съ полнымъ правомъ могутъ считаться гомологичными бластодермнымъ клѣткамъ *S. zonaria*.

Сходство въ образованіи клѣтокъ изъ парцелль у *S. fusiformis* съ образованіемъ бластомерныхъ клѣтокъ у *S. zonaria* подкрѣпляется и аналогіею въ дальнѣйшемъ развитіи этихъ клѣтокъ. У *S. zonaria*, послѣ того какъ бластомерныя клѣтки удалятся къ периферіи бластомеры, или лучше сказать полости, въ которой она находится, клѣтки начинаютъ отдѣляться другъ отъ друга тонкими плазматическими перегородками, и бластомера распадается на много клѣтокъ, рѣзко отграниченныхъ другъ отъ друга. То же самое видно и у *S. fusiformis*. Здѣсь также бластомера раздѣляется тонкими перегородками на нѣсколько клѣтокъ, лежащихъ вокругъ ядра бластомеры матери. На фиг. 7 представлены двѣ бластомеры (*bl*), окруженныя калиммоцитами (*kc*), въ которыхъ вся плазма распалась на ясно разграниченныя клѣтки, бластомерныя клѣтки (*cb*), окружающія переставшую дѣлиться бластомеры, или лучше сказать остатокъ ея. Изъ каждой парцелли образовалась бластомерная клѣтка; первоначальная же бластомера съ ядромъ и небольшимъ количествомъ окружающей его плазмы остается. Какова судьба бластомерныхъ клѣтокъ, я навѣрно не знаю, но думаю, что эти клѣтки прямо присоединяются къ окружающимъ ихъ калиммоцитамъ и составляютъ на первое время часть мезодерма.

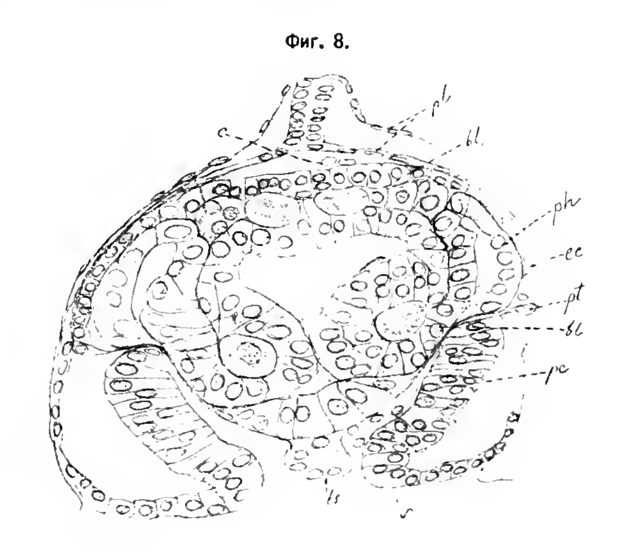


Фиг. 7. Двѣ бластомеры (*bl*), окруженныя калиммоцитами (*kc*), распались на много бластомерныхъ клѣтокъ (*cb*). (Ос. 4 + Im. 1,5).

Когда происходитъ образованіе ядеръ внутри лопастныхъ отростковъ бластомеръ, я сказать не могу; въ первый разъ я увидѣлъ ихъ въ стадіи образованія зародышевыхъ листовъ, хотя искалъ ихъ въ болѣе раннихъ стадіяхъ, но не находилъ. Поэтому я не могу согласиться съ Гейдеромъ, который видѣлъ будто бы ядра парцелль, считаемыхъ имъ за поглощенные калиммоциты, во время сегментаціи, такъ какъ онъ утверждаетъ, что во время образованія клоакаль-

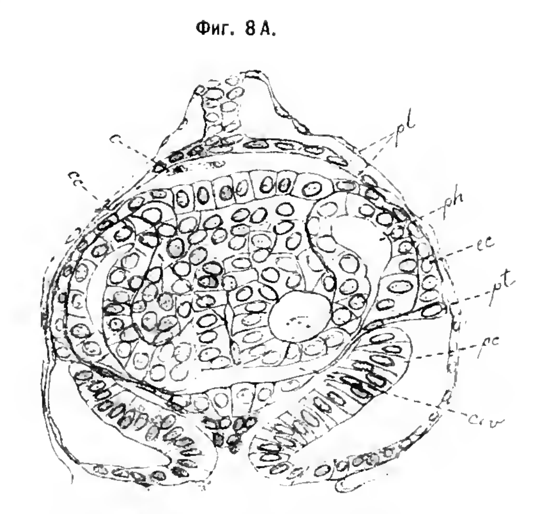
наго углубленія (фиг. 9 log. cit.) весь запасъ калиммоцитовъ уже исчерпанъ, т. е. истребленъ. По моимъ наблюденіямъ именно въ стадіи образованія зачатка клоаки появляются ядра въ нарцелляхъ. Разумѣется я никогда не видѣлъ той стадіи, гдѣ бы запасъ калиммоцитовъ былъ исчерпанъ; этого не бываетъ какъ явствуетъ изъ всѣхъ изложенныхъ мною здѣсь наблюденій.

Фиг. 8.



Для меня кажется также совершенно непонятенъ рисунокъ 9 Гейдеровскаго сочиненія, на которомъ нарисованъ разрѣзъ зародыша *S. fusiformis* съ открытою въ полость яйцевой камеры клоакою въ то время, когда клоакальныя складки еще доросли едва до половины зародыша. Въ это время клоака еще не можетъ быть настолько развита и я думаю, что причиною Гейдеровской ошибки былъ какой-нибудь дефектъ въ разрѣзѣ.

Фиг. 8 А.



Фиг. 8, 8 А. Два поперечныхъ разрѣза черезъ зародыша *S. fusiformis* въ стадіи образованія сообщенія между клоакальной + глоточными полостями съ полостью яйцевой камеры (*cov*); *cc* — соединительный каналъ между клоакальною полостью и полостью яйцевой камеры. (Apochr. Oc. 4 + Im. 1,5; уменьш. вдвое).

Сообщеніе между клоакальною полостью и полостью яйцевой камеры можетъ совершиться, понятно, только тогда, когда мезоэнтодермъ отойдетъ отъ крыши плаценты и между этими двумя образованіями появляется полость — прежняя полость яйцевой камеры, которую иногда называютъ полостью тѣла и мы ее будемъ также называть. Это совершается только послѣ замыканія клоакальныхъ складокъ, какъ это видно на фиг. 8 — 8 А. Слѣдовательно у зародыша въ той стадіи развитія складокъ не можетъ быть на-

столько развитъ клоакальный зачатокъ и зачатокъ глотки. Гораздо болѣе правильна въ этомъ отношеніи Гейдеровская фиг. 11 (Taf. II, loc. cit.), гдѣ клоакальныя складки уже сошлись. На этой фигурѣ также видно соединеніе клоакальной полости съ полостью яйцевой камеры, довольно слабо развитою. Разрѣзы, нарисованные мною на фиг. 8 и 8 A очень близко походятъ по своему строенію на разрѣзъ, нарисованный Гейдеромъ на фиг. 11 его II-й таблицы.

На фиг. 8 представленъ поперечный разрѣзъ черезъ центральную часть зародыша; въ этотъ разрѣзъ попали какъ клоакальная полость, такъ и обѣ фарингеальныя складки (Гейдеровскій амніонъ), или оба зачатка глотки. Разрѣзъ фиг. 8 A коснулся только нижней части крестообразнаго энтодерма (зачатка клоаки), въ которой видно образованіе канала, соединяющаго глотку съ полостью яйцевой камеры. За то въ этомъ разрѣзѣ видна больше полость яйцевой камеры, чѣмъ на разрѣзѣ фиг. 8.

Зародышъ (фиг. 8) въ этой стадіи развитія какъ и въ предыдущей представляетъ пузырь, образованный яйцевой камерой (эктодермомъ и крышей плаценты), сидящій на плацентѣ и наполненной органами, происшедшими изъ мезоэнтодерма. Эктодермъ (фиг. 8 *ec*) одѣваетъ всю поверхность зародыша до мѣста соединенія его съ плацентой. Нижнія края эктодерма соединяются съ крышей плаценты посредствомъ очень сплющенныхъ и вытянутыхъ клѣтокъ (фиг. 8 *pt*), проходящихъ между зародышемъ и плацентой. Это соединеніе мы видѣли и въ предыдущихъ стадіяхъ развитія. Наружныя края крыши плаценты состоятъ также изъ очень сплющенныхъ клѣтокъ, только въ средней части крышки она состоитъ изъ большихъ эпителіальныхъ клѣтокъ, постепенно увеличивающихся отъ периферіи крышки къ центру. Эктодермъ состоитъ также изъ довольно большихъ эпителіальныхъ клѣтокъ, особенно на верхушкѣ зародыша; вслѣдствіе этого нижніе края эктодерма выступаютъ довольно рѣзко надъ сплющенными периферическими клѣтками плацентной крышки. Слѣдуетъ отмѣтить при этомъ измѣненіе ядеръ эктодерма, такъ какъ оно въ болѣе позднихъ стадіяхъ развитія выступаетъ еще рѣзче. Ядра эктодерма становятся въ этой стадіи развитія блѣднѣе, вслѣдствіе уменьшенія въ нихъ хроматина, который является въ видѣ малочисленныхъ зернышекъ.

Познакомившись съ разрѣзами болѣе раннихъ стадій развитія, нарисованными на фиг. 4 и 5 мы легко оріентируемся относительно измѣненій внутреннихъ органовъ разсматриваемаго зародыша. Во 1-хъ замѣчается появленіе между плацентной крышкой и мезоэнтодермомъ полости, которая

на фиг. 8 является въ видѣ треугольнаго промежутка, на фиг. 8 А видна въ видѣ болѣе длинной, довольно узкаго пространства (*cov*), во всякомъ случаѣ значительно увеличившагося сравнительно съ предыдущею стадіею развитія (фиг. 5), гдѣ она является въ видѣ узкой щели. Эта полость соединяется съ клоакальною полостью черезъ узкій каналъ, находящійся въ нижней части энтодерма. Этотъ каналъ виденъ на фиг. 8 А нѣсколько лучше, но разрѣзъ, изображенный на этой фигурѣ не прошелъ одновременно черезъ клоакальную полость и черезъ соединительный каналъ. Образованіе этого канала просто и понятно изъ болѣе ранней стадіи развитія (фиг. 4), гдѣ уже видны совершенно ясныя приготовленія къ образованію этого канала. Мы видимъ на этой фигурѣ, что стѣнки нижней части энтодерма, состоящія изъ однослойнаго эпителія, спаяны по осевой линіи; эта спайка является въ видѣ прямой линіи. Если мы представимъ себѣ, что клѣтки стѣнокъ эктодерма сократятся и немного разойдутся другъ отъ друга, то между ними образуется щель на мѣстѣ спайки, которая и будетъ представлять соединительный каналъ между клоакальною полостью и полостью яйцевой камеры (теперь полостью тѣла), когда послѣдняя образуется. Оба зачатка глотки, фарингеальныя складки значительно выросли; онѣ достигаютъ теперь почти до верхушки клоаки. Въ нижней части зародыша онѣ отдѣляются отъ стѣнки клоаки бластомерами. Надъ нижними бластомерами, далѣе кверху онѣ непосредственно соприкасаются со стѣнками клоаки. Стѣнки фарингеальныхъ складокъ состоятъ изъ большихъ эпителіальныхъ клѣтокъ. Полости ихъ имѣютъ грушевидную форму, такъ какъ съуживаются книзу и упираются въ крышку плаценты. Въ зачаткѣ глотки слѣдуетъ различать внутреннюю, т. е. обращенную къ центру стѣнку, и наружную, обращенную къ периферіи. Первая, огибая снизу бластомеры, переходитъ въ стѣнку клоаки, вторая упирается своимъ нижнимъ концомъ въ крышу плаценты. Дальнѣйшее развитіе этихъ обѣихъ стѣнокъ различно. Наружная стѣнка играетъ большую роль при замыканіи фарингеальныхъ складокъ. Это совершается при развитіи дыхательной полости гораздо позже и относится къ органогенезису, а не къ образованію зародышевыхъ листовъ, а потому будетъ описано въ одной изъ слѣдующихъ сообщеній. Теперь же, подводя итоги всѣмъ изложеннымъ въ этой статьѣ, какъ и въ статьѣ о сегментаціи яйца сальпъ (ИАН. 1916 г., № 4), наблюденіямъ, мы можемъ выразить ихъ въ трехъ положеніяхъ:

1. Зародышъ *S. fusiformis* (какъ и *S. zonaria* и по всей вѣроятности другихъ видовъ сальпъ) строится не изъ однихъ дериватовъ яйцевой клѣтки,

но изъ всей яйцевой камеры, т. е. изъ ея стѣнки (фолликулярнаго эпителія) и изъ дериватовъ яйцевой клѣтки.

2. Фолликулярный эпителій, т. е. стѣнка яйцевой камеры превращается въ эктодермъ, дериватъ яйцевой клѣтки вмѣстѣ съ продуктами фолликулярнаго эпителія, калиммоцитами, составляютъ мезоэнтодермъ.

3. Зачатки первыхъ органовъ зародыша: клоакальной и глоточной полостей строятся исключительно изъ калиммоцитовъ. Бластомеры находятся внѣ этихъ зачатковъ, въ мезодермѣ; онѣ размножаются и даютъ начало клѣткамъ, роль которыхъ наступаетъ только послѣ образованія зачатковъ органовъ.

Объ этой роли будетъ рѣчь въ одномъ изъ слѣдующихъ сообщеній.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

On Chandler's period in the latitude variation.

By O. Backlund.

(Presented to the Imperial Academy of Sciences, February 3/16, 1916).

I.

Mr. Witting's interesting investigation of the latitude variation inspired me the thought that the derivation of the periods can be effected advantageously in another way.

Using the notations of Mr. Witting it is admitted that the observations are represented by the formula

$$P = K + k \cos(\theta t + c)$$

K, k, θ, c being constants to be determined.

We suppose the number of observed equidistant values of P, covering a whole period, n, and the number of periods over which the observations extend, $m+1$. Then

$$\sum_{\mu=0}^{\mu=m} P_{\mu,\nu} = S_\nu = (m+1)\,K + k\,R\cos(\theta\nu + \psi) \qquad (1)$$

where

$$R = \frac{\sin\frac{m+1}{2}n\theta}{\sin\frac{n}{2}\theta}; \qquad \psi = \frac{mn\theta}{2} + c$$

$\mu = 0, 1, 2 \ldots m$; $\nu = 0, 1, 2 \ldots n-1$. (Witting's paper).

From (1) we easily derive

$$H_{\nu,i} = \frac{S_\nu - S_{\nu+1}}{S_{\nu+i} - S_{\nu+i+1}} = \frac{\sin\left(\frac{2\nu+1}{2}\theta + \psi\right)}{\sin\left(\frac{2\nu+2i+1}{2}\theta + \psi\right)} \qquad (2)$$

Choosing the unit of time so that θ is very nearly equal to $30°$ we take $i = 3$ and denote $\frac{2\nu+1}{2}\,30° + \frac{2\nu+1}{2}\,\Delta\theta + \psi$ by V_ν, then (2) becomes

$$H_{\nu,3} = \frac{\sin V_\nu}{\cos(V_\nu + 3\Delta\theta)}$$

or

$$H_{\nu,3} = \operatorname{tg} V_\nu \sec 3\Delta\theta + H_{\nu,3} \operatorname{tg} V_\nu \operatorname{tg} 3\Delta\theta$$

which is rigorous. On the right side we may substitute $H_{\nu,3}$ by $\operatorname{tg} V_\nu$. Sec 3θ can in most cases be neglected; omitting the index 3 and putting $3\Delta\theta$ instead of $\operatorname{tg} 3\Delta\theta$ we obtain the approximate formula

$$H_\nu = \operatorname{tg} V_\nu + \operatorname{tg}^2 V_\nu \operatorname{tg}\Delta\theta \tag{3}$$

whence

$$V_\nu = \operatorname{arctg}(H_\nu - \operatorname{tg}^2 V_\nu \cdot 3\Delta\theta)$$

or

$$V_\nu = \operatorname{arctg} H_\nu - \frac{\operatorname{tg}^2 V_\nu \cdot 3\Delta\theta}{1+\operatorname{tg}^2 V_\nu} + \ldots$$

We do not consider higher powers of $\Delta\theta$ than the first and derive then from the last equation

$$V_\nu + \sin^2 V_\nu\, 3\Delta\theta = \operatorname{arctg} H_\nu \tag{3'}$$

Arctg H_ν we denote by W_ν; if $\sin^2 V_\nu$ is replaced by $\sin^2 V_\nu^{(0)}$, where $V_\nu^{(0)} = \frac{2\nu+1}{2}\,30° + \psi$, only small terms of the second order are neglected (3′) can then be transformed into

$$\frac{2\nu+1}{2}(\theta + \Delta\theta) + \frac{3}{2}\Delta\theta - \frac{3}{2}\Delta\theta \cos 2V_\nu^{(0)} = W_\nu - \psi \tag{4}$$

As θ_0 is supposed equal to $30°$ it is natural to take $n = 12$. This case we go now to treat having in view to apply our formulae to determine Chandler's period in the motion of the pole. In the last formula we give therefore ν successively the values 0, 1, 2...... 11, form the sum, and observe that

$$\sum_0^{11} \cos 2V_\nu^{(0)} = 0,$$

we then receive

$$\psi = \frac{1}{12}\sum_0^{n-1}(W_{n-1-\nu} + W_\nu) - 6\left(\theta_0 + \frac{5}{4}\Delta\theta\right) \tag{5}$$

From (4) we derive by taking the differences and remarking that

$$\sum_{6}^{11} \cos 2V_{\nu}^{(0)} = \sum_{0}^{5} \cos 2V_{\nu}^{(0)} = 0$$

the expression

$$36(\theta_0 + \Delta\theta) = \sum_{0}^{5} (W_{n-1-\nu} - W_{\nu}) \qquad (6)$$

The equation (6) gives $\Delta\theta$, and then ψ is obtained by (5).

The amplitude k may be found by

$$S_{\nu} - S_{\nu+1} = k\,R \sin\frac{\theta}{2} \sin\left(\frac{2\nu+1}{2}\,\theta + \psi\right)$$

Instead of (5) and the last equation k and ψ can be calculated by the known formulae

$$k \cos\psi = \frac{2}{Rn} \sum \overline{S}_{\nu} \cos \nu\theta$$

$$k \sin\psi = \frac{2}{Rn} \sum \overline{S}_{\nu} \sin \nu\theta$$

where $\overline{S}_{\nu} = S_{\nu} - \frac{S_0 + S_1 + \ldots + S_{n-1}}{n}$.

When ψ is equal or nearly equal to $p\,15^{\circ}$ (p = integer) the deduction of (4) and (6) seems illegitimate as (3) then pros not to be an approximation. But if we start from

$$\frac{1}{H_{\nu,3}} = \frac{\cos(V_{\nu} + 3\Delta\theta)}{\sin V_{\nu}} = \cos V_{\nu} \cos 3\Delta\theta - \sin 3\Delta\theta$$

we arrive also at (4) and (6)

In his paper Mr. Witting gives tables containing the coordinates x and y wiht respect to a fixed pole for every tenth of a year from 1890 to 1916. The first thing is then to form the S_{ν} by means of these tables. If we e. g. commence 1890.8, the sum of x for 1890.8, 1892.0, 1893.2, 1894.4, 1895.6 form S_0. As this space of time embraces very nearly the period of Chandler the yearly period is eliminated. S_1 is then formed in the same way from the x corresponding to 1890.9, to 1895.7 and so on. .

Mr. Witting has thus out of the material formed 4 groups of $S_0 \ldots S_{11}$, the first group covering the time 1890.8—1896.7, the second 1896.8—1902.7, the third 1902.8—1908.7, the fourth 1908.8—1914.7. Analogous groups were formed from the y coordinates. Evidently the groups so formed are wholly independent of each other. In order to de-

tect some variation in θ, I have formed such groups of the S, commencing with every tenth of a year, followingly every consecutive group contains $n-1$ constituents of the preceding one, only the n^{th} is a new element.

The W_ν enter in each mean with different weights varying from 0 to 6. This disadvantage of the method is unavoidable in problems of this sort. The following schedule relatif to the first mean shows how the single W_ν are repeated. Σ stands for ΣW_ν

$$432\,\Delta\theta = \sum_{12}^{17} + \sum_{13}^{18} + \sum_{14}^{19} + \sum_{15}^{20} + \sum_{16}^{21} + \sum_{17}^{22}$$
$$- \sum_{0}^{5} - \sum_{1}^{6} - \sum_{2}^{7} - \sum_{3}^{8} - \sum_{4}^{9} - \sum_{5}^{10}$$

Here I communicate some prealable results derived from Wittings x — table. The values of θ are the means of 12 consecutive groups.

	I		II	III
№	θ.	№	θ.	Mean θ.
1	30°.4	2	30°.2	30°.2
3	30.0	4	30.4	30.2
5	30.3	6	30.6	30.4
7	30.1 (30.5)	8	30.6	30.4 (30.6)
9	30.6	10	30.8	30.7
11	30.6	12	30.7	30.6
13	30.3	14	30.4	30.4
15	30.0	16	29.9	30.0

№ 1 is the mean of 12 values of θ derived from the W_ν for 1890.8—1896.7 to 1891.9—1897.8; № 2 the mean derived from the W_ν 1892.0—1897.9 to 1893.1—1898.0 and so on. In I each θ is independent of the W_ν contained in the preceding one; the same remark refers to II. In the following researches I have employed the interpolated value 30.5 in the brackets instead of the original № 7, which is probably vitiated by some unknown influence.

It seems from this table that θ can not be regarded as a constant quantity. In a following paper I intend to continue the investigation of this question. M-rs Romanskaja has with great care executed the computations, whose results are exposed above.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Вліяніе среды на протеолитическіе ферменты растеній.

В. И. Палладина.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 3 февраля 1916 г.).

Вліяніе среды на работу ферментовъ было уже предметомъ многочисленныхъ изслѣдованій. Протеолитическіе ферменты заслуживаютъ особаго вниманія не только потому, что ихъ работа находится также въ зависимости отъ среды, но также и по ихъ вредному вліянію, оказываемому на другіе ферменты. Поэтому, изучая работу какого-либо фермента въ присутствіи протеолитическихъ ферментовъ, нужно помѣстить его въ такую среду, которая была бы не только благопріятна для него, но въ то же время была бы вредна для работы протеолитическихъ ферментовъ. Такъ какъ протеолитическіе ферменты дѣйствуютъ вредно на дыхательные ферменты, то настоящая работа предпринята съ цѣлью найти вещества, задерживающія работу протеолитическихъ ферментовъ, и не вліяющіе на работу дыхательныхъ. Слѣдовательно настоящая работа является продолженіемъ изслѣдованій Григорьевой и Громовой[1], сдѣланныхъ подъ моимъ руководствомъ.

Матерьяломъ для работы служили различные препараты дрожжей (зиминъ, гефаноль, сухіе дрожжи Лебедева) и зародыши пшеницы. Для стерилизаціи прибавлялся толуолъ. Опредѣленіе бѣлковъ производилось по Штуцеру или по Барнштейну[2]. Азотъ опредѣлялся по Кельдалю.

Экспериментальная часть работы произведена студентами: П. І. Жадейкисомъ (опыты 5—7), Т. А. Зилесомъ (опыты 1—4, 8), В. В. Златовичемъ (опыты 18—19) и А. Ф. Тюлинымъ (опыты 9—10).

[1] Громова и Григорьева. Zeitschrift für physiol. Chemie. 42, 299, 1904.
[2] Джандіери и Помаскій. Методы химическаго анализа. Петроградъ. 1913.

A. Вліяніе сахарозы.

Опытъ 1.

Зиминъ. Опредѣленіе общаго и бѣлковаго азота.

	Сухое вещество въ грам.	Количество N.			
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % общаго N.
Общій N.	1,0248 0,4189 0,7153	83,05 33,75 57,98	8,10 8,05 8,10	8,08	100,0
Бѣлковый N.	0,7846 0,9556 1,0118 1,3078	53,84 65,76 69,99 90,71	6,86 6,88 6,92 6,93	6,90	85,39

Опытъ 2.

Зиминъ. Автолизъ на водѣ (по 40 к. см.). Температура 17—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшагося бѣлка въ % бѣлков. азота контр. порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода 24 часа	1,1731 0,6583	64,37 36,15	5,48 5,49	5,48	79,42	20,58
Вода 48 часовъ	1,0986 0,5600	55,59 28,36	5,06 5,06	5,06	73,33	26,67
Вода 168 часовъ	0,9417 0,7240	31,54 24,08	3,35 3,33	3,34	48,40	51,60

Опытъ 3.

Зиминъ. Автолизъ на 25% растворѣ сахарозы (по 40 к. см.). Температура 17—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшагося бѣлка въ % бѣлков. N контр. порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Сахароза 24 час.	0,7534 0 8691	46,51 53,84	6,17 6,19	6,18	89,56	10,44
Сахароза 168 час.	0,6930 0,8479	39,51 48,27	5,70 5,69	5,69	82,46	17,54

Опытъ 4.

Зиминъ. Автолизъ на водѣ 1 и 2 дня, послѣ чего прибавлено 10 гр. сахарозы (на 40 кб. см. жидкости) въ видѣ порошка и оставлено еще на 6 и 5 дней.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшагося бѣлка въ $^0/_0$ бѣлков. N ковтр. порціи.
		Въ мгр.	Въ $^0/_0$ сухого вещества.	Средвее.	Въ $^0/_0$ бѣлков. N ковтр. порціи.	
Вода 24 час. и затѣмъ сахароза $25^0/_0$ 144 час.	0,8404 1,0556	40,81 50,83	4.85 4,81	4,83	70,0	30,0
Вода 48 час. и затѣмъ сахароза $25^0/_0$ 120 час.	0,7220 0,9296	31,95 42,06	4.42 4,52	4,47	64,78	35,22

Б. Вліяніе глицерина.

Опытъ 5.

Опредѣленіе общаго и бѣлковаго азота въ сухихъ дрожжахъ Лебедева.

	Сух. вещест. въ грам.	Количество N.			
		Въ мгр.	Въ $^0/_0$ сух. вещества.	Средн.	Въ $^0/_0$ общаго N.
Общій N.	0,5864 0,4519 0,6179 0,5753	53,66 41,69 57,23 53,62	9,15 9.22 9,26 9,32	9,24	100,0
Бѣлковый N.	0,6660 0,6277 0,5450 0,4756	53,52 50,37 43,72 38,64	8,04 8,03 8.02 8,12	8,05	87,12

Опытъ 6.

Сухія дрожжи Лебедева. Автолизъ на водѣ и на глицеринѣ (по 50 к. см.) въ теченіе 7 сутокъ. Температура 16°.

	Сух. вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Колич. распавш. бѣлк. N въ % контр. порціи.
		Въ мгр.	Въ % сух. вещ.	Средн.	Въ % бѣл. N контр. порц.	
Вода	1,2290 1,2763 0,9257	81,88 84,52 63,47	6,66 6,62 6,85	6,71	83,35	16,65
10% глицеринъ	0,9796 1,0816 0,9906	74,95 81,12 76,28	7,65 7,50 7,70	7,62	94,66	5,34
20% глицеринъ	1,1090 0,9814 0,9528	88,74 77,54 75,23	8,00 7,90 7,89	7,93	98,51	1,49
30% глицеринъ	1,0603 0,9784 1,0820	82,86 76,42 85,45	7,82 7,81 7,90	7,84	97,39	2,61
40% глицеринъ	0,9784 1.0820	78,03 86,14	7,97 7,96	7,96	98,88	1,12

B. Вліяніе этиленгликоля.

Опытъ 7.

Сухія дрожжи Лебедева. Автолизъ на водѣ и на этиленгликолѣ (по 50 к. см.) въ теченіе 7 сутокъ. Температура 16°.

	Сух. вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавш. бѣлк. N въ % контр. порц.
		Въ мгр.	Въ % сух. вещ.	Средн.	Въ % бѣл. N контр. порц.	
Вода	1,0862 1,3074 0,9860	72,36 85,00 65,96	6,66 6,50 6,69	6,62	82,24	17,76
5% этил.-гликоль	1,0220 0,8923 1,1331	73,73 63,93 83,32	7,21 7,18 7,35	7,25	90,06	9,94
10% этил.-гликоль	0,9500 0,9720 0,9770	73,26 74,18 74,53	7,71 7,63 7,63	7,65	95,03	4,97
20% этил.-гликоль	1,0826 0,9050 0,9740	85,17 71,03 76,41	7,86 7,84 7,84	7,85	97,51	2,49
40% этил.-гликоль	0,9194 0,9825	72,64 78,38	7,90 7,97	7,93	98,51	1,49

Г. Вліяніе пировиноградной кислоты.

Опытъ 8.

Зиминъ. Автолизъ на 1% растворѣ пировиноградной кислоты, нейтрализованной ѣдкимъ кали, въ теченіе 1, 2 и 7 сутокъ. Температура 17—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N. Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	Количество распавшагося бѣлка въ % N контр. порціи.
24 часа	0,7508 0,7654 0,7538	42,53 43,02 42,95	5,66 5,62 5,69	5,66	82,03	17,97
48 часовъ	0,6529 0,5292	32,00 25,32	4,91 4,78	4,85	70,29	29,71
168 часовъ	0,5324 0,4760	19,48 17,48	3,66 3,67	3,67	53,19	46,81

Д. Вліяніе формалина.

Опытъ 9.

Опредѣленіе общаго и бѣлковаго азота въ дрожжахъ Лебедева.

	Сухое вещество въ грам.	Количество N. Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % общаго N.
Общій N.	0,7278 0,6332 0,7700	65,27 56,42 54,00	8,97 8,91 8,82	8,9	100,0
Бѣлковый N.	0,6762 0,4724 0,5456	52,99 37,41 42,91	7,84 7,92 7,86	7,87	87,3

Опытъ 10.

Сухія дрожжи Лебедева. Автолизъ въ водѣ и въ растворѣ формалина (по 100 к. см.) въ теченіе 5 сутокъ. Температура 16—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшихся бѣлковъ въ % N контр. порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода.	0,4914 0,6588	28,35 35,70	5.77 5,42	5,60	71,16	28,84
Формалинъ 0,1% .	0,4584 0,4626	30,48 29,19	6,65 6,30	6,47	82,21	17,79
Формалинъ 0,2% .	0,7046 0,4624	48,33 31.74	6,86 6,86	6,86	87,17	12,83
Формалинъ 1% .	0,6054 0,7382	46,23 54,21	7,64 7,34	7,49	95,20	4,80
Формалинъ 4% .	0,5954 0,5670	46,20 44,24	7,76 7,80	7,78	98,86	1,14

E. Вліяніе крѣпкихъ растворовъ хлористаго натра.

Опытъ 11.

Гефанолъ. Опредѣленіе общаго и бѣлковаго азота.

	Сух. вещ. въ грам.	Количество азота.			
		Въ мгр.	Въ % сух. вещ.	Средн.	Въ % общаго N.
Общій N.	0,5178 0,5846 0,5292	47,99 53,84 48,36	9,25 9,21 9,14	9,20	100,0
Бѣлковый N. . .	0,5156 0,5294 0,5036	41,50 42,51 39,98	8,05 8,03 7,95	8,01	87,07

Опытъ 12.

Гефанолъ. Четырехдневный автолизъ въ водѣ и въ 25% раствора NaCl (по 20 к. см.). Температура 17—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшихся бѣлковъ въ % N ковтр. ворціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода	0,5078 0,4964 0,4036	28,89 27.84 22,39	5,69 5,61 5,55	5,62	70,16	29,84
25% NaCl. . .	0,6768 0,5974 0,5046	41,96 37,75 31,68	6,20 6,32 6,28	6,27	78,20	21,80

Опытъ 13.

Гефанолъ. Семидневный автолизъ въ водѣ и въ 25% растворѣ NaCl (по 20 к. см.). Температура 17—18°.

	Сухое вещество въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшихся бѣлковъ въ % N контр. порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода	1,4926 0,4986 0,5546	26.45 26,31 45,74	5,37 5.28 5,18	5,27	15,7	34.3
25% NaCl. . .	0,4816 0,4960 0,5470	27,98 29,41 31,46	5,81 5,93 5,97	5,90	73,6	26,1

Опытъ 14.

Зародыши пшеницы. Опредѣленіе общаго и бѣлковаго азота.

	Навѣска сухого вещества въ грам.	Количество азота.			
		Въ мгр.	Въ % сух. вещ.	Средн.	Въ % общаго N.
Общій N.	0,4424 0,4772 0,5076	25,17 26,67 28,67	5,69 5,59 5,65	5,64	100,0
Бѣлковый N. . .	0,5516 0,4556 0.5970	27,96 22,55 30,08	5,07 4.95 5.01	5,02	89,00

Опытъ 15.

Зародыши пшеницы. Четырехдневный автолизъ въ водѣ и въ 25% растворѣ NaCl. Температура 17—18°.

	Навѣска въ грам.	Количество бѣлковаго N.				Количество распавшагося бѣлковаго N въ % контрольной порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода	0,5306 0,4268 0,4958	19,04 16,02 18,07	3,59 3,67 3,66	3,64	64,53	35,47
25% NaCl. . .	0,3624 0,4800 0,4892	14,96 20,11 19,81	4,13 4,19 4,05	4,12	73,05	26,95

Опытъ 16.

Зародыши пшеницы. Семидневный автолизъ въ водѣ и въ 25% растворѣ NaCl.

	Навѣска въ грам.	Количество бѣлковаго азота.				Количество распавшагося бѣлковаго N въ % контрольной порціи.
		Въ мгр.	Въ % сухого вещества.	Среднее.	Въ % бѣлков. N контр. порціи.	
Вода	0.4182 0,5448 0,4963	14,13 18,57 17,02	3,38 3,41 3,43	3,41	60,46	39,54
25% NaCl. . .	0,5106 0,4529 0,5172	22,51 19,92 22,49	4,41 4,40 4,25	4,35	77,12	22,88

Изложенные опыты дали слѣдующіе результаты:

1) Формалинъ дѣйствуетъ очень ядовито на протеолитическіе ферменты дрожжей согласно съ данными прежнихъ изслѣдованій[1]. Калійная соль пировиноградной кислоты въ 1% растворѣ почти не оказываетъ никакого (слабое задерживающее) вліянія. Слѣдовательно образованіе во время автолиза незначительныхъ количествъ уксуснаго алдегида не вліяетъ на ходъ автолиза.

[1] Price. Centralblatt f. Bacteriol. 2 Abt. 14. Kikkoji. Zeitschrift. f. physiol. Chemie. 63, 109, 1909.

2) Остальныя изслѣдованныя вещества распадаются на двѣ группы: на электролиты и на неэлектролиты. Неэлектролиты задерживаютъ работу протеолитическихъ ферментовъ тѣмъ сильнѣе, чѣмъ болѣе концентрація ихъ. Оптимума не наблюдается. Сравнивая дѣйствія глицерина и этиленгликоля, мы видимъ, что задерживающее дѣйствіе ихъ совершенно одинаково и увеличивается по мѣрѣ увеличенія количества молекулъ въ растворѣ:

	Количество неэлектролита.	Количество распавшихся бѣлковъ въ %.
1.	75% этиленгликоль (0,08 норм.)	9,94
2.	10% глицеринъ (0,108 норм.)	5,34
3.	10% этиленгликоль (0,16 норм.)	4,97
4.	20% этиленгликоль (0,32 норм.)	2.49
5.	30% глицеринъ (0,324 норм.)	2,61
6.	40% глицеринъ (0,432 норм.)	1,12
7.	40% этиленгликоль (0,64 норм.)	1,49

Эти данныя изображены графически на 1-мъ рисункѣ.

Какъ форма кривой (особенно ея второй части), такъ и отсутствіе оптимута показываютъ, что присутствующій въ растворѣ неэлектролитъ (вмѣсто соотвѣтствующаго количества воды), не оказывающій никакого химическаго вліянія на работу протеолитическихъ ферментовъ, дѣйствуетъ повидимому только физически, измѣняя какъ электропроводность раствора, такъ и способность бѣлковъ къ гидратаціи.

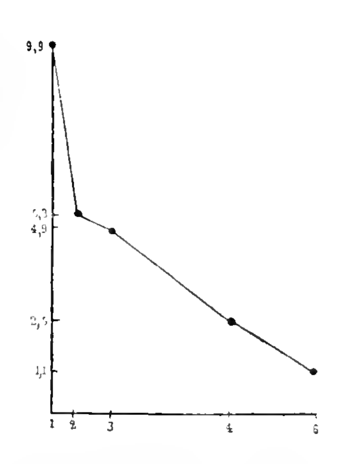


Рис. 1. Количество распавшихся бѣлковыхъ веществъ на растворахъ неэлектролитовъ различной концентраціи.

Такое же физическое дѣйствіе оказываетъ и сахароза. Но дѣйствіе сахарозы этимъ не ограничивается. Растворы углеводовъ вызываютъ въ то же время синтетическіе процессы. Сахароза не поддается сравненію съ другими неэлектролитами, потому что подвергается инвертированію, вслѣдствіе чего количество молекулъ увеличивается.

3. Иначе вліяютъ на работу протеолитическихъ ферментовъ безвредные электролиты. Въ слабыхъ растворахъ они увеличиваютъ электропроводность и стимулируютъ работу протеолитическихъ ферментовъ, какъ показали, напримѣръ, Громова и Григорьева. Крѣпкіе растворы хлористаго натра, какъ показали наши опыты, задерживаютъ

работу протеолитическихъ ферментовъ, но въ значительно болѣе слабой степени, чѣмъ неэлектролиты. Существованіе оптимума показываетъ, что дѣйствіе электролита на работу протеолитическаго фермента болѣе сложный процессъ, чѣмъ дѣйствіе неэлектролита, не участвующаго въ синтезѣ бѣлковъ.

4. На основаніи описанныхъ опытовъ слѣдуетъ, что введеніе безвредныхъ неэлектролитовъ, задерживая работу протеолитическихъ ферментовъ, должно оказывать полезное вліяніе на работу ферментовъ спиртоваго броженія. Это подтверждается какъ опытами Громовой и Григорьевой, такъ и дополняющими ихъ слѣдующими опытами.

Опытъ 17.

3 порціи по 6 гр. зимина, бѣднаго гликогеномъ. 1) 100 к. см. 15% раствора сахарозы. 2) 75 к. см. 15% сахарозы и 25 к. см. глицерина. 3) 50 к. см. 15% сахарозы и 50 к. см. глицерина. Температура 17,5°—18°.

Первая порція за 20 часовъ выдѣлила болѣе 207 мгр. CO_2 (баритовая вода въ Петтенкоферовскихъ трубкахъ была вполнѣ нейтрализована).

Вторая порція за 20 часовъ выдѣлила 157,3 мгр. CO_2.

Третья порція за $25\frac{1}{2}$ часовъ выдѣлила только 37,5 мгр. CO_2.

Опытъ 18.

3 порціи по 6 гр. зимина, по 5 гр. сахарозы и по 3 к. см. толуола. 1) 50 к. см. 50% (по объему) воднаго раствора этиленгликоля, 2) 50 к. см. 10% этиленгликоля, 3) 50 к. см. воды. Температура 16—19°.

Продолжительность опытовъ.	50% этиленгликоль.	10% этиленгликоль.		Вода.	
	Общее количество CO_2.	Общее количество CO_2.	CO_2 въ 1 часъ.	Общее количество CO_2.	CO_2 въ 1 часъ.
6 ч.		123,2	20,5	150,0	25,0
3 ч.		136,8	45,6	159,0	53,0
12 ч. 45 м.		394,0	30,7	410,3	32,4
3 ч.		97,2	32,4	81,2	27,1
3 ч. 10 м.		107,2	33,8	76,2	24,0
20 ч. 15 м.	15,8	516,3	25,5	303,3	15,0
4 ч. 45 м.		70,8	14,9	32,8	6,9
4 ч.		58,8	14,7	28,8	7,2
24 ч.		216,8	9,0	77,2	3,2
24 ч.		76,8	3,2	2,0	0.1
24 ч.		8,4	0,3	—	—
		1806,3		1320,8	

Опытъ 19.

3 порціи по 3 гр. гефанола въ 50 к. см. раствора каждая. 1) сахароза 50%, 2) сахароза 30%, 3) сахароза 10%. Температура 16—19°.

Продолжительность опытовъ.	1. Сахароза 50%.		2. Сахароза 30%.		3. Сахароза 10%.	
	Общее количество CO_2.	CO_2 въ 1 часъ.	Общее количество CO_2.	CO_2 въ 1 часъ.	Общее количество CO_2.	CO_2 въ 1 часъ.
6 ч.	57,2	9,5	68,0	11,3	87,2	14,5
6 ч.	40,0	6,6	64,4	10,7	77,2	12,9
6 ч. 10 м.	38,4	6,2	67,0	10,8	51,6	8,4
6 ч.	33,6	5,6	43,4	7,2	23,8	3,9
6 ч.	29,8	4,9	34,0	5,7	13,0	2,2
5 ч. 50 м.	26,4	4,5	27,6	4,7	10,4	1,7
12 ч.	47,4	3,9	30,8	2,6	8,0	0,7
12 ч.	46,4	3,8	20,0	1,7	2,8	0,2
12 ч.	35,2	2,9	9,2	0,8	3,2	0,2
12 ч.	24,0	2,0	5,6	0,5	—	—
12 ч.	17,6	1,5	4,8	0,4	—	—
24 ч.	20,6	0,8	—	—	—	—
24 ч.	13,6	0,6	—	—	—	—
48 ч.	14,0	0,3	—	—	—	—
	444,2		374,8		277,2	

Сравнивая въ двухъ послѣднихъ опытахъ количества углекислоты, выдѣленныя за первые шесть часовъ, мы видимъ, что неэлектролиты задерживаютъ также и работу зимазы:

Количество сахарозы.	Количество углекислоты:
10%	87,2
30%	68,0
50%	57,0

Сравнивая же общее количество выдѣленной углекислоты, мы видимъ обратное отношеніе:

Количество сахарозы.	Количество углекислоты.
10%	277,2
30%	374,8
50%	499,0

Слѣдовательно зависимость зимазы отъ неэлектролита сложная: несмотря на задержку работы зимазы общій выходъ углекислоты получается тѣмъ болѣе, чѣмъ концентрированнѣе растворъ неэлектролита, потому что онъ тѣмъ сильнѣе задерживаетъ работу протеолитическаго фермента дѣйствующаго вредно на зимазу. За наступленіемъ оптимума концентраціи дальнѣйшее увеличеніе ея можетъ вызвать остановку работы зимазы, какъ видно изъ слѣдующаго опыта.

Опытъ 20.

3 порціи по 5 гр. сухихъ дрожжей Лебедева съ 5 гр. глюкозы. 1) 50 к. см. глицерина, 2) 50 к. см. 50% раствора глицерина въ водѣ, 3) 50 к. см. 30% раствора глицерина. Черезъ 48 часовъ выдѣлилось углекислоты при 16—19°.

$$1. \ \frac{\text{Чистый глицеринъ}}{0}, \quad 2. \ \frac{50\% \text{ глицеринъ}}{133{,}0 \text{ мгр.}}, \quad 3. \ \frac{30\% \text{ глицеринъ}}{318{,}0 \text{ мгр.}}.$$

5. Гарденъ и Зильва[1] нашли, что скорость возстановленія метиленовой синьки при помощи редуктазы изъ *Bacillus coli communis* находится въ зависимости отъ количества прибавленнаго глицерина. Извѣстная средняя концентрація оказывается наиболѣе благопріятной. Существованіе оптимума концентраціи показываетъ, что зависимость работы редуктазы отъ индиферентнаго неэлектролита сложная и вѣроятно такого же характера, какъ и у зимазы.

Ботаническій кабинетъ
Петроградскаго Университета.

[1] Harden and Zilva. The biochemical Journal. **9**. 382, 1915.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Новая рукопись пятаго тома исторіи Ибн-Мискавейха.

И. Ю. Крачковскаго.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Историческихъ наукъ и Филологіи 9/22 марта 1916 г.).

Имя Ибн-Мискавейха хорошо извѣстно арабистамъ, хотя біографическія данныя о немъ крайне скудны[1], а многочисленныя произведенія до послѣдняго времени были извѣстны только по отрывкамъ или по упоминаніямъ библіографовъ[2]. Персъ по происхожденію, видный чиновникъ въ администраціи буидской династіи — Ибн-Мискавейхъ извѣстенъ очень разностороннеі литературной дѣятельностью. По времени жизни (ум. 421/1030 г.) онъ стоитъ на рубежѣ двухъ литературныхъ періодовъ — эпохи расцвѣта и упадка, но сочиненія его во многомъ представляютъ интересные памятники, неуступающіе лучшимъ произведеніямъ классическаго времени. Въ полной мѣрѣ это можно сказать о его шеститомной исторіи. По литературной манерѣ она примыкаетъ не столько къ направленію строгихъ анналистовъ, крупнѣйшимъ представителемъ котораго является ат-Ṭабарӣ, сколько обнаруживаетъ стремленіе къ болѣе прагматическому изложенію. Конечно, Ибн-Мискавейхъ не былъ уже новаторомъ, по-видимому это второе теченіе арабской исторіографіи и въ самомъ началѣ обязано своимъ развитіемъ персамъ: однимъ изъ первыхъ представителей его можно считать Абӯ-Ḥанӣфу изъ Дӣнавера съ его «Длинными исторіями»[3].

[1] Главнымъ образомъ, см. H. F. A[medroz] y L. Caetani, The Tajârib al-Umam or History of Ibn Miskawayh, reprod. in facsimile. I. Leyden, London 1909 (= E. J. W. Gibb Memorial Series, VII), стр. XVII–XXVII.

[2] Brockelmann, Geschichte der arabischen Literatur. I. Weimar 1898, стр. 342. Списокъ рукописей исторіи надо дополнить ссылкой на парижскую Schefer № 5838 = ar. 21. О другихъ продолженіяхъ исторіи ср. теперь Amar, Prolegomènes à l'étude des historiens arabes par Khalil ibn Aibak aṣ-Ṣafadi. Paris 1912 (оттискъ изъ JA), стр. 191—192 № 103—105. Цитата изъ Sprenger'a (ZDMG XIII, 514) относится не къ исторіи, а къ этикѣ Ибн-Мискавейха). Дата «ок. 982», приводимая А. Крымскимъ. Исторія арабовъ. I. М. 1911, стр. 84, можетъ вызвать недоразумѣніе: она указываетъ не дату смерти Ибн-Мискавейха или время окончанія его исторіи, а тотъ годъ, до котораго исторія доведена.

[3] Ср. Seybold въ ZDMG LXVII (1913) 539, прим. 1.

Ибн-Мискавейхъ придерживается, правда, въ послѣднемъ періодѣ своей исторіи изложенія по годамъ, но все же у него есть извѣстное стремленіе къ органической цѣлости и основной идеѣ. Онъ не отказывается и отъ творческаго элемента, вызываемаго собственнымъ представленіемъ о долгѣ историка. Считая исторію исторіей фактовъ и дѣйствительности, онъ, напримѣръ, совершенно сознательно отказывается отъ всего легендарнаго и чудеснаго, сокращая болѣе чѣмъ до минимума доисламскую исторію съ ея библейскими и талмудическими сюжетами. Національныя симпатіи автора сказываются въ томъ, что онъ удѣляетъ особое вниманіе старой Персіи съ ея расцвѣтомъ въ эпоху сасанидовъ, а равнымъ образомъ и буидской династіи, современникомъ которой онъ самъ былъ[1].

Для современной исторической науки важенъ, конечно, не столько общій характеръ труда Ибн-Мискавейха, сколько привлеченный имъ матеріалъ. Въ этомъ отношеніи, онъ не можетъ считаться исчерпаннымъ даже при наличіи громаднаго свода ат-Ṭабарӣ, хотя тотъ и составленъ почти вѣкомъ раньше. Конечно, у Ибн-Мискавейха есть цѣлый рядъ данныхъ, находящихся въ прямой зависимости отъ ат-Ṭабарӣ или его источниковъ: изслѣдованія спеціалистовъ показали, напримѣръ, что по сравненію съ послѣднимъ онъ не даетъ ничего новаго для исторіи византійско-арабскихъ отношеній[2]. Съ другой стороны, послѣ того періода, до котораго доведена исторія ат-Ṭабарӣ, Ибн-Мискавейхъ является почти единственнымъ источникомъ, относящимся къ такому раннему періоду. Кромѣ того, можно считать установленнымъ, что среди его матеріаловъ по исторіи халифата съ эпохи ал-Муḳтадира (295—320/908—932) была какая-то полная хроника, неизвѣстная намъ ближе. Его административная дѣятельность, наконецъ, не мало облегчала пользованіе оффиціальными документами, благодаря чему въ послѣднихъ частяхъ историческаго труда находится цѣлый рядъ существенныхъ данныхъ по исторіи администраціи, бюджета и налоговой системы въ эпоху упадка ʿаббāсидской династіи[3]. Въ свое время на арабскомъ востокѣ исторія Ибн-Мискавейха вызвала нѣкоторое литературное движеніе: извѣстно нѣсколько продолжателей ея, хотя вопросъ объ ихъ соотношеніи крайне запутанъ, благодаря совпаденію именъ[4].

---

[1] Ср. характеристику у Caetani, op. cit. I, xi–xiii.

[2] Васильевъ, Византія и арабы I, СПБ. 1900, приложенія, стр. 81—86.

[3] Ср. Caetani, op. cit. V, xii–xiii.

[4] Ср. Amar, l. cit. Существованіе рукописи дополненія везӣря Абӯ-Шуджāʿ (ум. 488/1095) недавно отмѣчено Зейдāномъ въ собраніи Аḥмеда-Зекӣ паши (см. تاريخ آداب اللغة العربية т. II. Каиръ 1912, стр. 317). Быть можетъ на это самое дополненіе ссылается Ибн-Ḫалликāнъ (изд. Wüstenfeld) № 197, стр. 115.

До 1906 года европейскіе ученые могли знать объ исторіи Ибн-Мискавейха только по отрывкамъ, существовавшимъ въ Европѣ: болѣе или менѣе значительныя части находятся въ Эскуріалѣ, Амстердамѣ, Оксфордѣ и Парижѣ[1]. Амстердамская рукопись была издана de Goeje[2]; отрывокъ изъ парижской, касающійся біографіи ал-Халлāджа, напечатанъ имъ же въ приложеніи къ тексту 'Арӣба[3].

Открытіемъ полнаго списка этого труда Ибн-Мискавейха наука обязана графу Caetani, имя котораго въ исторіи исламовѣдѣнія всегда будетъ связано не только съ колоссальными томами Annali dell' Islam, но и съ цѣлымъ рядомъ научныхъ предпріятій и экспедицій. Въ 1906 году по его порученію проф. Horowitz обозрѣвалъ книжныя собранія Константинополя и, между прочимъ, въ библіотекѣ св. Софіи нашелъ полную рукопись въ шести томахъ, датированную 505/1111—1112 годомъ. т. е. только вѣкомъ моложе автора[4]. Рукопись была сфотографирована и воспроизведеніе ея предпринялъ фондъ Gibb'a: до настоящаго времени появились томъ I (въ 1909 году) и томъ V (въ 1913-мъ) съ указателями собственныхъ именъ.

Распространившаяся за послѣдніе годы система механическаго воспроизведенія рукописей имѣетъ, конечно, большія преимущества, доставляя ученымъ возможность быстро знакомиться съ новымъ памятникомъ, но несомнѣнно, что такое воспроизведеніе не можетъ замѣнить критическаго изданія, которое въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ остается по прежнему pium desiderium науки. Тѣмъ болѣе это приходится сказать о такихъ случаяхъ, когда даже формальное чтеніе рукописи представляетъ извѣстныя затрудненія и требуетъ большого навыка въ палеографіи. Именно, такимъ примѣромъ служитъ константинопольская рукопись: несомнѣнно, что по своимъ внутреннимъ достоинствамъ она стоитъ довольно высоко, но написана неразборчивой скорописью, иногда совершенно затрудняющей чтеніе. Если прибавить, что негативы были сдѣланы не особенно удачно, какъ дважды отмѣчаетъ самъ Caetani[5], и въ воспроизведеніи цѣлыя слова и даже

[1] Caetani, I, xiii.

[2] Fragmenta historicorum arabicorum, II. Lugd. Bat. 1871. Изданную имъ часть de Goeje имѣлъ неосторожность назвать pars sexta (въ значеніи $^1/_6$), почему большинство ученыхъ считаетъ ее шестымъ томомъ. (Ср. Huart, Litterature arabe². Paris 1912, стр. 205: le sixième livre). Самъ de Goeje видѣлъ въ ней третій томъ (Fragmenta II, i); въ дѣйствительности она представляетъ четвертый (См. Caetani — I, xiv).

[3] Arib Tabari continuatus. Lugd. Bat. 1897, стр. 86 слѣд.

[4] Caetani, I, xiv. (По христіанской эрѣ годъ указанъ здѣсь по какому-то недоразумѣнію 1303-мъ).

[5] Op. cit. I, xiv прим. и V, xiii.

строки совершенно не переданы, то станетъ ясно, что одного воспроизведенія будетъ недостаточно для критическаго изданія.

Съ чувствомъ нѣкотораго удовлетворенія можно отмѣтить, что въ Россіи находится теперь рукопись — правда только пятаго тома, — которая дѣлаетъ эту задачу вполнѣ достижимой. Рукопись эта пріобрѣтена Азіатскимъ Музеемъ Императорской Академіи Наукъ въ составѣ большой коллекціи мусульманскихъ рукописей, собранныхъ В. А. Ивановымъ въ Бухарѣ лѣтомъ 1915 года[1]. Рукопись представляетъ томъ большого формата въ хорошемъ восточномъ переплетѣ, содержитъ 251 листъ по 15 строкъ на страницѣ, написана великолѣпнымъ четкимъ крупнымъ почеркомъ съ почти полной огласовкой. Повидимому, она была сличена самимъ переписывавшимъ съ оригиналомъ, такъ какъ на поляхъ имѣется много поправокъ той же рукой (напр. л. 8, 68v, 84v, 118v, 151, 164v, 197v, 209v). Однимъ изъ послѣднихъ владѣльцевъ ея былъ нѣкій ʻАбд-ал-ʻАзӣмъ ал-Бухӯрӣ, воспитанникъ или преподаватель المدرسة البهائية въ Бухарѣ, какъ объ этомъ говорятъ его приписки на л. 1 и 251, относящіяся къ 1291/1874–5 году; имъ сдѣланы нѣкоторыя вставки въ текстъ, обыкновенно rubrum (напр. л. 4v, гдѣ, при разсказѣ объ Исмаʻилѣ-ибн-Ахмедѣ, добавлено امير بخارا السامانى). Одно время рукопись принадлежала какой-то общественной или крупной частной библіотекѣ: на лѣвой сторонѣ нѣкоторыхъ листовъ въ началѣ тетрадокъ (куррāсовъ) можно усмотрѣть слѣды тщательно замазанныхъ печатей. Даты рукописи, къ сожалѣнію, нѣтъ: она находилась, вѣроятно, какъ и въ константинопольскомъ спискѣ въ концѣ шестого тома. Даты въ припискахъ какъ владѣльцевъ, такъ и читателей довольно разнообразны: на л. 1 есть 768 годъ, на 251 нѣсколько относящихся къ VII вѣку (цифры десятковъ обыкновенно стерты; одна приписка, повидимому 602 года). Самой ранней, судя по письму, является замѣтка нѣкоего Мухаммеда-ибн-Йахйи ал-Мустауфӣ на томъ же л. 251^a; къ сожалѣнію она написана съ такими лигатурами, что кромѣ имени почти ничего разобрать нельзя. Нельзя установить и цифры, находящейся въ концѣ этой приписки, хотя въ числѣ сотенъ соблазнительно видѣть пять.

По палеографическимъ соображеніямъ рукопись не позднѣе VI вѣка и относится, вѣроятно, къ тому же времени, какъ константинопольская. По достоинствамъ своимъ она несомнѣнно ее превосходитъ: написанная болѣе четкимъ почеркомъ петроградская рукопись не даетъ повода къ искаженіямъ,

[1] Cod. Ivanov no. 673 (Buchārā 22. IX. 1915). 30×21 cm. 2+251+1 fol. 15 lin. (22×15 cm.). На л. 1: المجلد الخامس من تاريخ تجارب الامم لابى على احمد بن محمد بن مسكويه المتوفى سنة ٤٢١ — О поѣздкѣ В. А. Иванова см. Отчетъ И. А. Н. за 1915 г., стр. 122.

легко возникающимъ при разборѣ константинопольской[1]. Въ ней нѣтъ стертыхъ мѣстъ, какихъ много въ константинопольской; она является единственнымъ источникомъ для установленія текста въ тѣхъ случаяхъ, когда негативы передаютъ оригиналъ неясно или въ видѣ бѣлыхъ лакунъ.

По характеру текста обѣ рукописи восходятъ, несомнѣнно, къ одному оригиналу или, во всякомъ случаѣ, къ одной редакціи. Варіанты въ текстѣ встрѣчаются крайне рѣдко и не представляютъ существеннаго значенія. Для примѣра я приведу результаты сличенія двухъ отрывковъ: письма халифа ал-Муктадира[2], какъ образецъ эпистолярнаго стиля, наиболѣе легко подвергающагося искаженію въ рукописяхъ, и разсказы о первыхъ успѣхахъ буидовъ[3], при династіи которыхъ Ибн-Мискавейхъ занималъ впослѣдствіи разнообразныя административныя должности[4].

К 313,10	لاصحابِنَا	П 133,10	اصحابُنا
К 315,3	استحقاقكم	П 133v,12	استحقاقاتكم
К 316,11	وكما سلّم	П 134v,5	وما سلّم
К 433,3	اتّفقت	П 183v,11	وقعت
К 433,4	يزل	П 183v,14	تزل
К 433,5	جيلًا	П 183v,14	جبلة
К 439,6	ويرفق به	П 186v,11	ورفق
К 440,7	فابى على ابى طالب وتمنّع عليه	П 187,6	فابى على بن بويه
К 442, ult.	التدبير السيّئ	П 188,2 сн.	التدبير
К 443,9	خزاينه	П 188v,11	خزانته
К 445,3	سنكتبه فى موضعه	П 189v,1	سنكتبه

Для удобства пользованія Петроградской рукописью я привожу списокъ ея заголовковъ со ссылками (въ скобкахъ) на страницы воспроизведенія Caetani[5].

---

[1] Въ особенности часто это происходитъ съ собственными именами, какъ легко судить по обоимъ указателямъ въ изданіи Gibb'a; если принять во вниманіе отзывъ G. Le S[trange] объ ихъ неудовлетворительности въ другихъ отношеніяхъ (ср. т. V, xiv), то ими не безопасно пользоваться теперь, не привлекая Петроградскую рукопись.

[2] К(онстантинопольская) стр. 313,1—317,2=П(етроградская) л. 133,1—134v,7.

[3] К 433,3—445,3=П 183v,10—189v,1.

[4] Въ сличеніи я не отмѣчаю разницы въ огласовкѣ; не оговариваю тѣхъ случаевъ, когда собственныя имена, легко дешифрируемыя при сличеніи съ П, были невѣрно переданы въ указателѣ и, наконецъ, не возстанавливаю мѣстъ К, плохо переданныхъ фотографіей.

[5] Я опускаю стереотипные заголовки ذكر السبب فى ذلك и т. п., которые ничего не говорятъ о содержаніи слѣдующаго отдѣла, если ихъ взять безъ связи съ предшествующимъ контекстомъ; обычныя указанія годовъ دخلت سنة كذا я замѣняю цифрой.

1v II (K 2) دخلت سنة أربع وثمنين ومائتين 3 (6) ٢٨٥ — 3v (7) ٢٨٦ —— 4v (9) ٢٨٧ — 7 (16) ذكر مقتله [يعنى محمّد بن زيد العلوىّ] — 7v (17) ٢٨٨ — 8 (18) ٢٨٩ — 13 (30) ذكر خبر القرامطة ومبدأ أمرهم ومآله — 14 (32) ٢٩٠ — 15v (36) ٢٩١ — 15v (37) ذكر مسيره وظفره بالقرمطىّ — 18 (42) ٢٩٢ — 18v (43) ٢٩٣ — 21v (51) ٢٩٤ — 24 (56) ٢٩٥ — 26 (60) ٢٩٦ — 28 (65) ذكر الخبر عن الظفر بعبد الله بن المعتزّ — 28v (66) ذكر ما عمله القنائىّ فى امر محمد بن داود — 33 (76) ٢٩٧ — 34v (80) ذكر ما جرى على سبكرى من الأسر — 35 (81) ٢٩٩ — 36 (83) ذكر ما دبّره ابن ابى البغل وانعكاسه عليه — 36 (85) ذكر فساد تدبير الخاقانىّ لأمر الوزارة —

38v (88) ٣٠٠ — 39 (90) ٣٠١ — 43v (101) ٣٠٢ — 44 (102) ٣٠٣ — 45v (105) ٣٠٤ — 46v (108) وزارة ابى الحسن علىّ بن محمّد بن الفرات الثانيه — 48v (113) ذكر ما جرى من ابن ابى الساج — 49 (113) ذكر ما دبّر ابن أبى الساج واحتال به — 51v (119) ونعود إلى الحديث ابن الفرات — 52 (121) ٣٠٥ — 54 (125) ٣٠٦ — 56v (132) ذكر ما عامل به حامد بن العبّاس — 61 (143) وعُدْنا إلى خبر حامد فى وزارته — 61v (144) ٣٠٧ — 63v (149) ذكر ما اضطرب لأجله أمر حامد بن العبّاس — 65 (152) ٣٠٨ — 65v (153) ٣٠٩ — 65v (153) ذكر خبر الحسين بن منصور الحلّاج وما آل اليه أمره من القتل والمثلة —

69 (162) ٣١٠ — 70v (165) ٣١١ — 70v (165) ذكر صرف حامد وعلى بن عيسى وردّ الوزارة إلى ابن الفرات — 73 (172) ذكر الخبر عن وزارة ابى الحسن ابن الفرات الثالثة — 75 (176) ذكر الخبر فى قبض الوزير ابن الفرات على حامد بن العبّاس — 78 (182) ذكر ما عومل به حامد وما عمله هو — 81 (190) ذكر ما جرى فى امر على بن عيسى — 81v (191) ذكر مناظرة ابن الفرات على بن عيسى — 84v (198) ونعود الى تمام خبر علىّ بن عيسى — 87 (204) ذكر ما دبّره ابن الفرات فى امر مونس حتى ابعده — 88 (206) ما دبّره ابن الفرات بعد مونس فى امر الحاشية — 89 (208) ٣١٢ — 90 (211) ذكر السبب فى ضعف امر ابن الفرات بعد تناهيه فى القوّة والاستقامة — 91v (215) ذكر ما عامل به المحسّن المنكوبين — 92 (215) ذكر قبض على ابى الحسن بن الفرات — 94 (221) ذكر توصّل ابى القاسم . . .

الخاقانيّ الى الوزارة — 94v (222) ذكر ما جرى عليه امر ابن الفرات — 96v (227) ذكر اتّفاق سيّىء اتّفق على المحسن — 100 (235) ذكر مقتل ابى الحسن بن الفرات — 102v (241) ذكر الأسباب الّتى اتّفقت على الخاقانيّ حتى صرف عن الوزارة — 103v (244) ذكر وزارة ابى العبّاس الخصيبيّ — 105 (247) ذكر الخبر عن دخول القرمطيّ الكوفة — 105v (248) ٣١٣ — 106 (249) ٣١٤ — 106v (250) ذكر تدبير سيّىء دبّره الخصيبيّ — 107v (253) ذكر الخبر عن القبض على الخصيبيّ — 108 (254) ذكر خلافة ابى القاسم الكلوذانيّ لعلّى بن عيسى وتمشيته للامور — 108v (255) ٣١٥ —

110 (258) ذكر ما جرى بين الوزير أبى الحسن علىّ بن عيسى وبين ابن العبّاس أحمد بن عبيد الله من المناظرة — 112 (264) ذكر ما دبّره علىّ بن عيسى من الأمور — 113v (267) وعُدْنا الى تمام حديث علىّ بن عيسى — 115 (271) ظهور الديلم — 122 (288) ذكر وقعة بن أبى الساج مع القرمطيّ — 128 (302) ٣١٦ — 129 (304) ذكر الحال الّتى آدتْ الى صَرْف علىّ بن عيسى وتقليد علىّ بن مقلة — 130 (306) ذكر القبض على علىّ بن عيسى وتقليد ابن مقلة — 132 (311) ظهور الوحشة بين مونس والمقتدر — 132 (312) ٣١٧ — 132v (312) ذكر فتنة نازوك وأبى الهيجاء — 135 (317) ذكر الخبر عن خلع المقتدر بالله — 135v (319) ذكر حزم استعمل فانتفع به — 136 (320) ذكر السبب فى ردّ المقتدر الى الخلافة — 139v (329) ذكر الخبر عن إيقاع القرمطيّ بالحاجّ وتغريبه مكّة — 140 (329) ٣١٨ — 141v (333) ذكر ما جرى فى أمر الوزارة بعد أبى على وتقلّد سليمان بن الحسن لها — 144 (338) ٣١٩ — 144v (339) ذكر استيحاش مونس وخروجه — 147 (346) ذكر اتّفاق حسن لأحمد بن كيغلغ — 147v (347) ذكر السبب فى تقلّد الحسين بن القسم الوزارة — 158 (373) ٣٢٠ — 163 (385) خلافة القاهر بالله — 166 (391) ٣٢١ — 170v (403) ذكر ما جرى فى أمر الّذين هربوا من قوّاد المقتدر وما آل أمرهم إليه — 179 (423) ذكر مقتل مونس ويلبق وعلىّ ابنه — 180 (425) ذكر السبب فى تقليد ابى العبّاس الخصيبى الوزارة — 183v (433) ذكر السبب فى ظهور علىّ بن بويه — 185 (436) ذكر السبب تمّ به لعلىّ بن بويه ولايته — 186v (439) ذكر حيلة مرداويج الّتى لم يتمّ له — 188 (442) ٣٢٢ — 188v (442)

ذكر تدبير دبّره ياقوت — 190v (448) ذكر السبب فى القبض على القاهر — 193 (453)
خلافة الراضى بالله — 195v (459) ذكر ابتداء أمر أبى الحسن علىّ بن بويه —
202 (473) ونعود الى ذكر الاحوال الجارية بمدينة السلام — 408 (472) ٣٢٣
204v (479) ذكر السبب فى قتل مرداويج — 213v (508) ٣٢٤ — 217 (509)
ذكر هذه الحيلة على أبى علىّ بن مقلة — 218v (513) وزارة عبد الرحمن بن عيسى —
219v (515) ذكر وزارة ابى جعفر محمّد بن القسم — 219v (515) ذكر مقتل ياقوت —
221 (518) ذكر الخديعة الّتى نفذت على ياقوت — 226v (531) وعُدْنا إلى ذكر
أخبار الحضرة وتدبير الوزراء لها — 227 (532) ذكر استيلاء ابن رائق على الخلافه
وسائر الممالك — 230v (540) ذكر ما اتّفق له من الخروج الى البلدان العراق —
231 (541) ٣٢٥ — 232v (545) ذكر حيلة أبى بكر بن مقاتل — 235 (549) ذكر
الخبر عمّا احتالوا به واتّفق ايضًا لهم — 241 (563) ذكر اتّفاق سيّئ اتّفق على ابن
رايق حتّى انهزم إلى الأهواز وأحرق سواده — 241v (564) ذكر حكاية عن بجكم تدلّ
على حصافةٍ وبعد غور وهمّة — 243 (568) شرح حال أبى الحسين أحمد بن بويه —
243v (568) ٣٢٦ — 248 (579) ذكر السبب فى ذلك يعنى قطع يد أبى علىّ بن
مقلة — 245 (572) ذكر السبب فى هرب البريدىّ —

251 تمّ الجزء الخامس من كتاب تجارب الأمم ويتلوه إن شاء الله فى الجزء
السادس حكاية عن بجكم تدلّ على دهاء ومكر

Несомнѣнно, что при рѣдкости произведеній Ибн-Мискавейха, въ Европѣ рукопись Азіатскаго Музея представляетъ весьма цѣнное пріобрѣтеніе. Для изданія пятаго тома она совершенно необходима и даже болѣе важна, чѣмъ константинопольская. Появленіе ея даетъ поводъ отмѣтить, что солидный старый фондъ Азіатскаго Музея продолжаетъ за послѣдніе годы обогащаться важными рукописями и въ области арабской литературы. Трудъ Ибн-Мискавейха въ этомъ отношеніи можетъ быть поставленъ на ряду съ «Хронологіей» ал-Бӣрӯнӣ, описанной нѣсколько лѣтъ тому назадъ[1].

---

[1] ИАН. за 1912 годъ, стр. 861—870.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Химическая сторона кристаллическаго строенія[1].

Е. С. Федорова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Хотя понятіе химическаго сродства и не принадлежитъ къ числу настолько точныхъ, чтобы могло быть выражено численно, однако обыкновенный химическій опытъ, хотя качественно, научаетъ оцѣнять сравнительное сродство разныхъ атомовъ.

Первѣе всего съ этимъ понятіемъ связывается самъ процессъ химическаго соединенія, внѣшнимъ образомъ выражающейся въ особомъ протяженіи, то есть пространственномъ приближеніи. Два газообразныхъ элемента обыкновенно въ результатѣ соединенія даютъ жидкость или твердое тѣло, но два твердыхъ тѣла послѣ соединенія не даютъ ни жидкости, ни газа[2].

Если же разстояніе двухъ атомовъ связано (обратно) съ ихъ химическимъ сродствомъ, то теперь, когда мы имѣемъ строеніе атомовъ для веществъ разнаго состава, у насъ является новый факторъ сродства — ближайшее разстояніе, который сулитъ со временемъ дать и численное выраженіе сродства.

Съ этою цѣлью я пересмотрѣлъ установленные, хотя бы только съ вѣроятностью, случаи структуры, и опредѣлилъ для нихъ относительныя разстоянія разныхъ атомовъ.

По самой сущности поставленной задачи соединенія, заключающія

---

[1] См. ИАН., стр. 435.

[2] Выдѣленіе газа знаменуетъ собою разложеніе.

атомы только одного рода, интереса вовсе не представляютъ и сравнительно малый интересъ имѣютъ соединенія изъ атомовъ двоякаго рода. Однако уже въ послѣднихъ мы можемъ сравнивать ближайшія разстоянія атомовъ однородныхъ и разнородныхъ, а также опредѣлять число однородныхъ атомовъ, находящихся отъ даннаго того или другого рода, на равномъ разстояніи.

Начну съ такихъ.

Для ClNa конечно ближайшее разстояніе имѣютъ атомы Cl и Na. Считая его за 1-цу, найдемъ, что разстояніе однородныхъ атомовъ есть $\sqrt{2}$, причемъ къ каждому атому примыкаетъ 6 разнородныхъ съ нимъ и 12 однородныхъ.

Въ соединеніи Cu_2O (купритъ) ближайшее разстояніе относится также къ разнороднымъ атомамъ (его всегда будемъ принимать за 1-цу); и тогда разстояніе атомовъ Cu $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, причемъ къ каждому атому примыкаетъ 6, а разстояніе атомовъ O есть $\sqrt{3}$, и къ каждому примыкаетъ 8 атомовъ. Къ атому O примыкаетъ 4 атома Cu, а къ атому Cu только 2 атома кислорода.

Въ соединеніи SZn (сфалеритъ) разстояніе атомовъ Zn $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, и къ каждому атому примыкаетъ 12; для S имѣемъ также $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и 12. Къ Zn примыкаетъ 4 атома S, а къ S 4 атома Zn; словомъ, взаимныя отношенія этихъ атомовъ одинаковы.

Въ соединеніи CaF_2 (флюоритъ) разстояніе атомовъ Ca $\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ и къ каждому атому примыкаетъ 12; для F имѣемъ $\frac{2}{\sqrt{3}}$ и 6. Къ Ca примыкаетъ 8 атомовъ F, а къ F 4 атома Ca.

Въ соединеніи FeS_2 (пиритъ) разстояніе атомовъ S 0,73 и къ каждому атому примыкаетъ всего 1; для Fe имѣемъ 1,51 и 12. Къ Fe примыкаетъ 6 атомовъ S, а къ S только 3 атома Fe.

Въ соединеніи ZnO (цинкитъ) разстояніе разнородныхъ атомовъ лишь немного меньше, чѣмъ однородныхъ[1]. Къ атомамъ Zn и O примыкаетъ по шести однородныхъ съ ними атомовъ.

Въ соединеніи Fe_2O_3 (гематитѣ) разстояніе атомовъ O 1,07 и къ каждому атому примыкаетъ 4; для Fe имѣемъ 1,52 и къ нему примыкаетъ

---

[1] И то при условіи, если правильною плоскостью атомовъ O окажется та, которая лишь намѣчена въ нижней части фиг. 18, (стр. 340).

всего одинъ однородный атомъ. Къ атому Fe примыкаетъ 6 атомовъ O, а къ атому O два атома Fe.

Въ соединеніи SiO_2 (кварцъ) разстояніе атомовъ Si 1,60 и къ каждому примыкаетъ два; для атомовъ O имѣемъ 0,58 и только одинъ примыкающій атомъ. Къ атому Si примыкаетъ 4 атома O, а къ атому O два атома Si.

Изъ приведенныхъ чиселъ усматриваются поразительныя исключенія даже основному и, казалось бы, необходимому допущенію о ближайшемъ разстояніи между тѣми атомами, которыми обусловливается образованіе самого химическаго соединенія; вѣдь оно по самой сущности сводится къ наибольшему сближенію. Эти два исключенія ярко сказываются въ пиритѣ и кварцѣ. Въ нихъ пара атомовъ S въ первомъ, а пара атомовъ O во-второмъ оказываются въ большей мѣрѣ сближенными между собою, чѣмъ съ Fe въ первомъ и Si во второмъ случаѣ.

Исключительность такихъ явленій какъ бы подчеркивается тѣмъ обстоятельствомъ, что въ обоихъ случаяхъ къ соотвѣтственнымъ атомамъ примыкаетъ только по одному, тогда какъ во всѣхъ другихъ случаяхъ имѣемъ примыканіе нѣсколькихъ и не менѣе чѣмъ двухъ атомовъ.

Небольшое углубленіе въ сущность явленій дѣлаетъ эти исключенія больше чѣмъ понятными, а пожалуй и необходимыми.

Какъ въ одномъ случаѣ S, такъ въ другомъ случаѣ O являются двуатомными, то есть связанными съ разнородными атомами не одною, а двойною химическою связью. Какъ однородно наэлектризованные, атомы эти конечно стремятся отталкиваться другъ отъ друга; но съ другой стороны они подвергаются сильному притяженію со стороны двухъ разнородныхъ съ ними атомовъ; они образуютъ одну пару, а разнородные съ ними атомы— другую пару вершинъ дельтоида [1] и притяженіе ихъ къ другой парѣ атомовъ можно уподобить натяженію нитей, связывающихъ эти пары вершинъ. Совершенно ясно, что такое двойное натяженіе привело бы ихъ къ столкновенію, если бы между ними не было отталкиванія; въ присутствіи же этой второй силы должно установиться нѣкоторое состояніе равновѣсія, которое намъ и раскрывается въ кристаллѣ.

Это объясненіе было бы непримѣнимо, если бы атомы O или S были

---

[1] Это получится, если мы примемъ атомы O_1 и O_3 (на фиг. 2 предыдущей статьи) связанными съ одной стороны съ Si въ центрѣ параллелоэдра, а съ другой стороны съ тѣмъ, который находится въ нижнемъ параллелоэдрѣ, примыкающемъ къ изображенному только по близь лежащему горизонтальному ребру, параллельному прямой O_1O_3. Такъ какъ разстояніе отъ нижняго (и передняго) атома Si нѣсколько болѣе, чѣмъ отъ центральнаго, то получается дельтоидъ.

одноатомны; но въ разсматриваемыхъ случаяхъ этого нѣтъ. Въ кристаллахъ льда OH_2 вращенія плоскости поляризаціи не наблюдается какъ въ кварцѣ; въ послѣднемъ же это вращеніе существенно связывается съ расположеніемъ по отношенію къ Si атомовъ O.

Но если такимъ образомъ раскрывается реальное значеніе атомности въ кристаллическомъ строеніи, то являются непонятными тѣ случаи, когда къ одному атому, даже одноатомному, примыкаетъ нѣсколько атомовъ.

Такой фактъ рѣзче всего обрисовывается въ кристаллахъ ClNa и изоморфныхъ. Въ этомъ случаѣ къ каждому атому Na примыкаетъ 6 атомовъ Cl и къ каждому атому хлора 6 атомовъ Na. Въ силу одноатомности же такая связь должна бы существовать только между однимъ атомомъ Cl и однимъ атомомъ Na.

Полагаю, что единственное возможное объясненіе этого обстоятельства есть допущеніе быстраго перемѣщенія того добавочнаго электрона, который отдается однимъ атомомъ другому и дѣлаетъ его электроотрицательнымъ. Такимъ образомъ въ ClNa одинъ и тотъ же электронъ въ кратчайшіе промежутки времени 6 разъ перемѣняетъ свое положеніе въ предѣлахъ одного и того же атома.

Въ газовомъ состояніи для такихъ перемѣнъ не имѣется рѣшительно никакихъ основаній, а потому такое перемѣщеніе электроновъ можетъ служить характеристикою твердаго, то есть кристаллическаго состоянія.

И дѣйствительно, когда мы имѣемъ переходъ изъ газовой фазы въ жидкую, представляющую смѣсь твердой и газообразной фазъ? при данной температурѣ требуется такое сгущеніе, при которомъ въ значительной степени іоны напримѣръ Cl (въ ClNa) начинаютъ сближаться съ іонами Na другихъ прилегающихъ частицъ, что сцѣпляются въ кристаллическіе элементарные сростки: правда, что такіе сростки сейчасъ же и распадаются, но точка кипѣнія и есть та точка, при которой образованіе элементарныхъ кристаллическихъ частичекъ достигаетъ такой густоты, что введеніе кристаллическихъ пылинокъ (какъ извѣстно, при болѣе значительномъ переохлажденіи пара могущихъ быть замѣненными пылинками постороннихъ тѣлъ) вызываетъ образованіе капель. Въ предыдущей статьѣ я уже упоминалъ, что при дальнѣйшемъ пониженіи температуры мы дойдемъ до той точки (плавленія), когда кристаллическія тѣла получаютъ связь непрерывности.

Таковы слѣдствія изъ чиселъ, относящихся къ разстояніямъ атомовъ двухъ родовъ. Конечно, еще любопытнѣе сравнить относительныя разстоянія атомовъ большей разнородности.

Въ этомъ отношеніи матеріала еще мало.

Для $ClNH_4$ (нашатырь) примемъ за 1-цу разстояніе Cl и H; тогда получимъ такое же разстояніе 1-цы и для разстоянія N и H и разстояніе 2 для N и Cl.

Для CO_3Ca (кальцитъ) примемъ за 1-цу разстояніе между C и O и тогда для разстоянія CaO получаемъ 1,33, а для CCa получаемъ 1,94.

Приблизительно такія же относительныя разстоянія мы имѣемъ даже тогда, когда Ca замѣщается Mg отчасти.

Для ClO_3Na имѣемъ ближайшее разстояніе для O съ Cl и Na, а по отношенію и къ тѣмъ, и другимъ атомамъ между собою разстояніе $\sqrt{2}$.

Наконецъ для $Fe_2'''O_4Fe''$ (магнетита) имѣемъ ближайшее разстояніе для Fe'' и O, и если его примемъ за 1-цу, то для разстоянія $Fe'''O$ получимъ $\sqrt{2}$, а для $Fe''Fe'''$ разстояніе 3.

Вотъ и весь матеріалъ, какой сейчасъ имѣется въ нашемъ распоряженіи.

Внимательное разсмотрѣніе приведенныхъ чиселъ, полагаю, приводитъ къ заключенію о полномъ согласіи относительныхъ разстояній[1] разныхъ атомовъ съ ихъ относительнымъ сродствомъ, такъ что даже приведенный здѣсь незначительный матеріалъ даетъ право вывести еще нѣсколько основныхъ правилъ кристаллохиміи.

Въ кристаллическомъ строеніи какого-нибудь вещества порядокъ ближайшихъ разстояній между разнородными атомами есть порядокъ, обратный величинѣ ихъ химическаго сродства. Если два однородные атома играютъ въ химическомъ строеніи частицы разную роль (напримѣръ Fe въ видѣ Fe'' и Fe'''), *то и соотвѣтствующія разстоянія ихъ до другихъ атомовъ различны.*

Атомы однородные расположены другъ отъ друга дальше, чѣмъ разнородные; но если къ двумъ одинаковымъ двухатомнымъ атомамъ два другихъ атома проявляютъ сильное сродство, то они могутъ оказаться сближенными въ большей мѣрѣ, чѣмъ атомы разнородные.

По вопросу о выдѣленіи частицъ приходится сказать, что мы можемъ выдѣлить въ строеніи кристалла два элемента: 1) элементарный парадле-

---

[1] Нѣкоторое сомнѣніе можетъ вызвать большая близость O къ Cl и Na, чѣмъ послѣднихъ другъ къ другу. Но тутъ мы имѣемъ во-первыхъ другой типъ соединенія, а во-вторыхъ, если не допускать такой точки зрѣнія, мы могли бы принять, что именно отъ этого зависитъ неустойчивость соединенія, способнаго при извѣстной температурѣ саморазлагаться со взрывомъ.

лоэдръ, то есть наименьшую часть пространства, изъ которой можетъ быть выведено все строеніе кристалла, и потому вполнѣ соотвѣтственно принимать его за кристаллографическую частицу и 2) сложный параллелоэдръ, въ которомъ представлено все, что можетъ служить для характеристики кристалла и потому его можно признать за химическую частицу. Первый можетъ совпадать со вторымъ или только составлять его часть.

Въ соли ClNa полная частица состоитъ изъ двухъ параллелоэдровъ и имѣетъ составъ написанный, въ нашатырѣ тоже изъ двухъ, но имѣетъ составъ $(NH_4Cl)_2$, въ купритѣ тоже изъ двухъ и имѣетъ составъ $(Cu_2O)_2$, сфалеритъ изъ одного и имѣетъ составъ ZnS, флюоритъ изъ одного и имѣетъ составъ CaF_2, кальцитъ изъ двухъ и имѣетъ составъ $(CO_3Ca)_2$, доломитъ изъ двухъ и имѣетъ составъ (CO_3Ca) (CO_3Mg), пиритъ изъ четырехъ и имѣетъ составъ $(FeS_2)_4$, цинкитъ изъ одного и имѣетъ составъ ZnO, хлоратъ натрія изъ четырехъ $(ClO_3Na)_2$, гематитъ изъ двухъ и имѣетъ составъ $(FeO_3Fe)_2$, а ильменитъ изъ двухъ и имѣетъ составъ $(TiO_3Fe'')_2$, кварцъ изъ трехъ и имѣетъ составъ $(SiO_2)_3$, магнетитъ изъ двухъ и имѣетъ составъ $(Fe_2'''O_4Fe'')_2$. Такимъ образомъ, придерживаясь сдѣланныхъ опредѣленій, приходится сказать, что химическая частица рѣдко состоитъ изъ одной кристаллографической, а чаще изъ двухъ, трехъ или даже четырехъ.

Совершенно исключительнымъ представляется алмазъ, въ которомъ кристаллографическую частицу приходится признать составленной изъ двухъ химическихъ, то есть по просту изъ двухъ атомовъ C; въ мѣди же (какъ въ сфалеритѣ и флюоритѣ) химическую частицу нужно признать совпадающею съ частицею кристаллографическою.

Въ единственномъ до сихъ поръ изслѣдованномъ случаѣ полиморфизма лишь подъ нѣкоторымъ сомнѣніемъ можно признать переходъ отъ сфалерита къ вуртциту въ такомъ передвиженіи ближайшихъ параллельныхъ плоскостей съ атомами Zn и S [1], въ результатѣ котораго одни атомы прямо проэктируются другъ на друга по тройной оси симметріи, которая вслѣдствіе этого становится шестерною осью симметріи.

Въ случаѣ двухъ разнородныхъ атомовъ, представленныхъ въ равномъ числѣ, всегда расположеніе атомовъ одинаково по отношенію къ обоимъ. Но если атомы одноатомны (ClNa), то атомы одного рода находятся посрединѣ другихъ, а если двухатомны, то кромѣ такого же расположенія (PbS), имѣется другое, при которомъ однородные атомы сгруппировываются въ

---

[1] Въ плоскости, перпендикулярной къ тройной оси симметріи.

плоскія сѣтки (ZnO) и третье, при которомъ одни являются центрами тетраэдровъ, образуемыхъ другими (ZnS).

Если на одинъ двухатомный приходится два одноатомныхъ атома и если первый электроотрицателенъ, то получается наибольшее удаленіе однородныхъ двухатомныхъ, что можно усмотрѣть изъ таблички:

$$1)\ O - Cu\ 1; \quad O - O\ 2; \qquad Cu - Cu\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

$$2)\ Ca - F\ 1; \quad Ca - Ca\ \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}}; \quad F - F\ \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Первое сводится къ наибольшему сближенію разнородныхъ, что связывается съ дѣйствіемъ двухъ электроновъ двухатомнаго атома. Въ обоихъ случаяхъ разстояніе двухатомныхъ однородныхъ больше, чѣмъ одноатомныхъ.

Про аномалію, возникающую при соединеніи четырехатомнаго съ двумя двухатомными (случаи FeS_2 и SiO_2), рѣчь была раньше (стр. 549).

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ 15—31 марта 1916 года).

26) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 5, 15 марта. Стр. 267—390. Съ 1 табл. lex. 8⁰.—1616 экз.

27) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія (Bulletin....... VI Série). 1916. № 6, 1 апрѣля. Стр. 391—456. 1916. lex. 8⁰.—1616 экз.

28) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 3. Литій и его соединенія, ихъ техническое примѣненіе и нахожденіе въ русскихъ минералахъ. В. Г. Хлопина (I+38 стр.). 1916. 8⁰.—2016 экз.
Цѣна 15 коп.; 15 cop.

29) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 4. Соединенія барія въ Россіи. Е. В. Ереминой, совмѣстно съ В. С. Малышевой и М. И. Добрыниной (I+60 стр.). 1916. 8⁰.—2016 экз.
Цѣна 20 коп.; 20 cop.

30) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 5. Очеркъ мѣсторожденій вольфрамовыхъ и оловянныхъ рудъ въ Россіи. Н. Н. Сущинскаго (I+45 стр.). Съ 4 таблицами. 1916. 8⁰.—2016 экз.
Цѣна 40 коп.; 40 cop.

31) **Сборникъ Музея Антропологіи и Этнографіи при Императорской Академіи Наукъ.** (Publications du Musée d'Anthropologie et d'Ethnographie de l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd). Томъ IV,1. В. М. Іоновъ. Духъ-хозяинъ лѣса у якутовъ. Бāі хара тыа іччітā Бāі Баjанаі Бāі Барыллāх (I+43 стр.). 1916. lex. 8⁰.—615 экз. Цѣна 50 коп.; 50 cop.

32) **Образцы народной литературы якутовъ**, издаваемые подъ редакціей Э. К. Пекарскаго. III. Тексты. Образцы народной литературы якутовъ, записанные В. Н. Васильевымъ. Выпускъ 1. Сказка: 1) Курӯбаі Хāннāх Кулун Куллустӯр (V+196 стр.). 1916. 8⁰.—360 экз.
Цѣна 3 руб.; 3 rbl.

Оглавленie. — Sommaire.

Статьи:

Mémoires:

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Апрѣль 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 8.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

1 МАЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

1 MAI.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

---

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею формать, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ, — семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.

ИЗВЛЕЧЕНІЯ
ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ АКАДЕМІИ.

ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ.

II засѣданіе, 6 февраля 1916 года.

Избранные 29 декабря 1915 г. въ члены-корреспонденты Академіи В. А. Богородицкій и Ф.-У. Дайсонъ прислали на имя Непремѣннаго Секретаря письма съ изъявленіемъ признательности за избраніе, при чемъ Ф.-У. Дайсонъ напомнилъ, что дружественныя отношенія между русскими учеными и Обсерваторіей въ Гринвичѣ начались еще въ 1698 году, когда Петръ Великій дважды посѣтилъ Обсерваторію въ Гринвичѣ.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Доложено письмо баронессы М. Д. Врангель по вопросу о содѣйствіи передачѣ Академіи Наукъ коллекціи ея покойнаго сына Н. Н. Врангеля, находящихся временно въ Институтѣ Исторіи Искусствъ графа В. П. Зубова.

Положено принять коллекцію, благодарить жертвовательницу и просить академика А. А. Шахматова сдѣлать соотвѣтствующія сношенія.

Непремѣнный Секретарь просилъ ОС. выяснить общій вопросъ о печатаніи лишняго числа отдѣльныхъ оттисковъ каждой статьи, печатаемой въ изданіяхъ Академіи, въ виду просьбы Императорской Публичной Библіотеки о доставленіи

ей всѣхъ оттисковъ въ 2 экземплярахъ. Оттиски эти Библіотекѣ желательно имѣть въ виду постояннаго на нихъ требованія со стороны читателей, а равно и въ цѣляхъ осуществленія прямыхъ задачъ Библіотеки — быть хранительницей всѣхъ выходящихъ въ Россіи изданій, не исключая, конечно, и оттисковъ, наличность которыхъ въ Библіотекѣ для работающихъ въ какой либо спеціальной области представляетъ большое практическое удобство; между тѣмъ оттисковъ изъ академическихъ изданій Библіотека не получаетъ правильно ни изъ Главнаго Управленія по дѣламъ печати, куда они не поступаютъ, ни непосредственно изъ Академіи.

Положено печатать 5 лишнихъ оттисковъ каждой статьи всѣхъ періодическихъ изданій Академіи и посылать: по 2 экземпляра въ Императорскую Публичную Библіотеку, по 1 экземпляру русскихъ статей въ I Отдѣленіе Библіотеки Академіи, а иностранныхъ — во II Отдѣленіе, остальные оттиски хранить.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что 1) чиновникъ особыхъ порученій Академіи Вл. А. Рышковъ представилъ рапортъ о принятіи имъ отъ Гофмейстера Р. Ю. Константиновскаго двухъ тетрадей трудовъ въ Бозѣ почивающаго Августѣйшаго Президента Его Императорскаго Высочества Великаго Князя Константина Константиновича: 1) «Возрожденный Манфредъ», драматическій отрывокъ и 2) «Трагедія объ Отелло, Венеціанскомъ Маврѣ», и что 2) означенныя рукописи приняты въ Рукописномъ Отдѣленіи Библіотеки Академіи Наукъ 29 января.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ Н. В. Никитинъ доложилъ отъ имени своего и академиковъ В. В. Латышева и А. А. Шахматова предположенія Комиссіи по изданію трудовъ епископа Порфирія, на основаніи правилъ, утвержденныхъ Академіей 4 мая 1891 г., о печатаніи II-го тома составленнаго епископомъ Порфиріемъ и провѣреннаго и дополненнаго профессоромъ В. Н. Бенешевичемъ каталога греческихъ синайскихъ рукописей.

Положено утвердить предположенія Комиссіи, о чемъ сообщить академику Н. В. Никитину.

Академикъ А. А. Шахматовъ, съ согласія Директора Музея Антропологіи и Этнографіи, просилъ ОС. разрѣшить передать принадлежащій Музею старинный вертепъ съ куклами въ Литературно-Театральный Музей имени Алексѣя Бахрушина въ Москвѣ, такъ какъ въ послѣднемъ онъ будетъ болѣе отвѣчать своему назначенію.

Разрѣшено, о чемъ положено сообщить академику А. А. Шахматову и Директору Музея Антропологіи и Этнографіи.

III засѣданіе, 5 марта 1916 года.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ А. А. Шахматовъ доложилъ, что 18 февраля (2 марта н. ст.) въ Бухарестѣ скончалась почетный членъ Академіи (съ 16 іюля 1898 года) Ея Королевское Величество Вдовствующая Королева Румынская Елисавета (Карменъ Сильва).

Память почившей почтена вставаніемъ.

Положено выразить соболѣзнованіе Академіи Королю Румыніи черезъ Румынскаго посланника.

Министръ Народнаго Просвѣщенія отношеніемъ отъ 29 февраля за № 2432 сообщилъ Вице-Президенту Академіи:

«Государь Императоръ, по всеподданнѣйшему докладу моему, въ 24-ый день сего февраля Всемилостивѣйше соизволилъ на присвоеніе Его Императорскому Высочеству Великому Князю Николаю Николаевичу, согласно ходатайству Императорской Академіи Наукъ, званія почетнаго члена сей Академіи.

«О таковомъ Монаршемъ соизволеніи прошу Ваше Превосходительство довести до свѣдѣнія Императорской Академіи Наукъ».

Положено дипломъ на званіе почетнаго члена Академіи препроводить Его Императорскому Высочеству Великому Князю Николаю Николаевичу.

Предсѣдатель Бюро состоящаго подъ Высочайшимъ Государя Императора покровительствомъ Съѣзда по улучшенію отечественныхъ лечебныхъ мѣстностей при письмѣ на имя Вице-Президента отъ 21 февраля за № 5330 препроводилъ для Библіотеки Императорской Академіи Наукъ 1 полный экземпляръ (два тома) «Трудовъ состоявшаго подъ Высочайшимъ Государя Императора покровительствомъ Съѣзда по улучшенію отечественныхъ лечебныхъ мѣстностей».

Положено благодарить и книги передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Отъ профессора Бухарестскаго университета Н. Іорга (N. Jorga) присланъ (черезъ типографію «Gutenberg» Joseph Göbl S-sori. 20. Strada Doamnei. Bucuresti) его трудъ «Histoire des Roumains de Transylvanie et de Hongrie». Tome I et II. Bucarest, 1916.

Положено благодарить профессора Іоргу, а книги передать во II Отдѣленіе Библіотеки.

Отъ имени академика В. С. Иконникова поступило извѣщеніе, что въ теченіе 1915 года онъ былъ избранъ почетнымъ членомъ:

1) Императорскаго Московскаго Археологическаго Общества (17 февраля).

2) Императорскаго Новороссійскаго Университета (2 мая).

3) Императорскаго Петроградскаго Археологическаго Института (8 мая).

4) Императорскаго Московскаго Университета (въ сентябрѣ).

Положено принять къ свѣдѣнію и сообщить въ Правленіе для внесенія въ формулярный о службѣ В. С. Иконникова списокъ.

Во исполненіе постановленія Отдѣленія ИФ. за Непремѣннаго Секретаря академикъ А. А. Шахматовъ доложилъ, что въ Академію поступили и переданы въ Правленіе копія завѣщанія и расписка Государственнаго Банка по капиталу покойной дочери тайнаго совѣтника М. В. Безобразовой для выдачи изъ процентовъ преміи за сочиненіе по исторіи философіи въ Россіи.

Положено разрѣшить принять капиталъ.

ОТДѢЛЕНІЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

IV ЗАСѢДАНІЕ, 2 МАРТА 1916 ГОДА.

Императорское Русское Географическое Общество отношеніемъ отъ 23 февраля за № 1422, согласно постановленія Совѣта Общества отъ 6 февраля, препроводило въ Академію копіи плана и письма инородца Андреева на имя Правителя дѣлъ Якутскаго Отдѣла о нахожденіи въ Вилюйскомъ округѣ бивня и реберъ мамонта.

Положено передать Директору Зоологическаго Музея.

Академикъ О. А. Баклундъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія свою работу: O. A. Backlund. «La Comète d'Encke 1908—1918» (Комета Энке 1908—1918).

Вице-Президентъ внесъ предложеніе, единогласно принятое всѣмъ Отдѣленіемъ, о принесеніи академику О. А. Баклунду искренняго поздравленія съ окончаніемъ его многолѣтней работы.

Положено напечатать въ «Запискахъ» ФМ. Отдѣленія.

Академикъ О. А. Баклундъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью М. Вильева «Элементы кометы 1916 а Неуймина» (M. Viljev. Ephéméride de la Comète 1916 a Neouïmine).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Отъ имени академика князя Б. Б. Голицына доложена Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи его статья «Къ вопросу объ опредѣленіи эпицентровъ землетрясеній по наблюденіямъ одной сейсмической станціи» (Sur la détermination des épicentres des tremblements de terre d'après les données d'une seule station sismique).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія работу А. Державина (A. Deržavin) «Cumacea (Sympoda) Сибирскаго Сѣвернаго Ледовитаго Океана, собранныя Русской Полярной Экспе-

диціей 1900—1903 гг.» [Cumacées (Sympoda) de l'Océan Arctique de Sibérie, recueillies par l'Expédition Polaire Russe 1900—1903].

Къ статьѣ приложенъ рисунокъ.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Академіи, въ серіи «Научные результаты Русской Полярной Экспедиціи».

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Развитіе дыхательной полости Salpa fusiformis» (Sur le développement de la cavité respiratoire de Salpa fusiformis).

Къ статьѣ приложены 16 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. М. Ляпуновъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью: A. Liapounoff (Lĭapunov). «Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène. 1-ère Partie» (Новыя соображенія, относящіяся къ теоріи производныхъ отъ эллипсоидовъ формъ равновѣсія въ случаѣ однородной жидкости. 1-ая часть).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» работу С. С. Ганешина «Тератологическое измѣненіе *Gentiana triflora* Pall.» (S. S. Ganešin. Une modification tératologique de *Gentiana triflora* Pall.).

Къ статьѣ приложены 2 таблицы.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью Л. С. Берга (L. S. Berg) «A Catalogue of the freshwater Fishes of Russia» (Списокъ прѣсноводныхъ рыбъ Россіи).

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» («Мелкія извѣстія») статью В. Л. Біанки «Третье дополненіе къ списку птицъ С.-Петербургской губерніи 1907 г. и новыя данныя о болѣе рѣдкихъ видахъ» (V. Bianchi. Troisième supplément à la Liste des oiseaux du gouvernement de St. Pétersbourg 1907 et dates nouvelles concernant quelqes espèces plus rares).

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью С. С. Турова «Къ орнитофаунѣ Рязанской губерніи (1913—1915 гг.)» [S. S. Turov. Contributions à l'ornithofaune du Gouvernement Riazan. (1913—1915)].

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. К. Солдатова (V. K. Soldatov) «A new species of *Lycodes* from the Okhotsk Sea» (Новый видъ рода *Lycodes* изъ Охотскаго моря).

Къ статьѣ приложенъ 1 рисунокъ.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ П. И. Вальденъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью профессора П. П. Лазарева (въ Москвѣ) «О вліяніи давленія кислорода на скорость выцвѣтанія красокъ въ видимомъ спектрѣ» (P. P. Lazarev. Le rôle de la pression d'oxygène sur la vitesse de la décoloration des couleurs dans le spectre visible).

Къ статьѣ приложены 3 рисунка.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ П. И. Вальденъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью профессора И. С. Плотникова «О присоединеніи брома къ непредѣльнымъ углеводородамъ на свѣту» (I. S. Plotnikov. Sur l'addition de brome aux hydrocarbures non saturés sous l'influence de la lumière).

Къ статьѣ приложено 5 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychev» (Теорема замкнутости для полиномовъ Лапласа-Эрмита-Чебышева).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея читалъ:

«Въ виду необходимости для Геологическаго и Минералогическаго Музея при работахъ имѣть полный комплектъ «Горнаго Журнала» со времени начала его изданія и въ виду чрезвычайной затруднительности его пополненія путемъ покупки, въ особенности за старые годы, я имѣю честь просить Отдѣленіе обратиться съ просьбой въ библіотеки: Императорскую Публичную, Геологическаго Комитета и Минералоги-

ческаго Общества, не найдутъ ли онѣ возможнымъ уступить свои дублеты «Горнаго Журнала» въ библіотеку Геологическаго и Минералогическаго Музея, хотя бы въ обмѣнъ на наши дублеты. Кромѣ этого, было бы желательно обратиться въ Горный Департаментъ съ просьбой пополнить нашу библіотеку недостающими экземплярами. Списокъ такихъ недостающихъ экземпляровъ для разсылки въ указанныя учрежденія прилагается».

Положено сдѣлать соотвѣтствующія сношенія.

Академикъ А. П. Карпинскій представилъ экземпляръ своей статьи «Къ вопросу о природѣ спиральнаго органа Helicoprion», напечатанной въ «Запискахъ Уральскаго Общества Любителей Естествознанія».

Положено передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ экземпляръ своей статьи «Объ использованіи химическихъ элементовъ въ Россіи», напечатанной въ «Русской Мысли», книга I, 1916.

Положено передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ Н. И. Андрусовъ просилъ командировать профессора Университета Шанявскаго Алексѣя Павловича Иванова (Москва, Селезневская, 13) съ 1 мая по 1 сентября въ Ставропольскую губернію для раскопокъ костей млекопитающихъ на г. Куцай, выдать ему о томъ удостовѣреніе и сообщить объ этомъ Ставропольскому Губернатору.

Положено командировать А. П. Иванова, выдать ему удостовѣреніе, сдѣлать соотвѣтствующее сношеніе и сообщить въ Правленіе.

Академикъ Н. И. Андрусовъ читалъ:

«Предполагая послѣ посѣщенія южнаго побережья Карабугазскаго залива съѣздить также въ Ферганскую область для осмотра нѣкоторыхъ третичныхъ отложеній между Ходжентомъ и Маргелланомъ, покорнѣйше прошу Отдѣленіе о выдачѣ мнѣ удостовѣренія о цѣли моей поѣздки и объ извѣщеніи о томъ Туркестанскаго Генералъ-Губернатора».

Положено выдать просимое удостовѣреніе, увѣдомить Туркестанскаго Генералъ-Губернатора и сообщить въ Правленіе.

Академикъ Н. И. Андрусовъ просилъ командировать сотрудника Геологическаго и Минералогическаго Музея, студента Петроградскаго Университета, Нестора Алексѣевича Кулика въ Закаспійскую область, Красноводскій уѣздъ, для геологическихъ изслѣдованій срокомъ съ 1 марта по 1 сентября, выдать удостовѣреніе о ко-

мандировкѣ академику Н. И. Андрусову для передачи Н. А. Кулику и послать о томъ же извѣщеніе Начальнику Красноводскаго уѣзда.

Положено командировать Н. А. Кулика, выдать ему удостовѣреніе, сдѣлать соотвѣтствующее сношеніе и сообщить въ Правленіе.

Академикъ Н. И. Андрусовъ просилъ командировать въ текущемъ году въ качествѣ помощниковъ ученаго хранителя Н. В. Виттенбурга для геологическихъ изслѣдованій на Сѣверномъ Кавказѣ (въ Терскую и Кубанскую области и въ Тифлисскую и Черноморскую губ.) студентовъ Петроградскаго Университета Глѣба Степановича Рогозина, Сергѣя Кузьмича Иванова и Парфенія Андреевича Телишевскаго срокомъ съ 1 мая по 15 сентября и исходатайствовать открытыя предписанія на предметъ оказанія законнаго содѣйствія какъ отъ Августѣйшаго Намѣстника Его Величества на Кавказѣ, такъ и отъ начальниковъ областей Терской и Кубанской, а также и начальниковъ губерній Тифлисской и Черноморской.

Положено командировать указанныхъ лицъ, выдать имъ удостовѣренія и сдѣлать соотвѣтствующія сношенія.

Академикъ А. П. Карпинскій довелъ до свѣдѣнія Отдѣленія, что Лондонское Геологическое Общество присудило ему за геологическія и палеонтологическія работы почетную награду — Wollaston Medal.

Положено сообщить въ Правленіе.

V засѣданіе, 16 марта 1916 года.

Завѣдующій печатаніемъ изданій Общества изученія Амурскаго края Дмитрій Леонтьевичъ Тропанихинъ обратился въ Отдѣленіе ФМ. отъ имени Общества изученія Амурскаго края (во Владивостокѣ) съ нижеслѣдующей просьбой:

«Основанное въ 1884 г. группою лицъ изъ мѣстной интеллигенціи Общество имѣетъ цѣлью, какъ гласитъ его уставъ, всестороннее изученіе бассейна р. Амура, русскаго побережья Восточнаго океана и сопредѣльныхъ мѣстностей. Насчитывая въ рядахъ своихъ членовъ и въ прошломъ и въ настоящемъ немало идейныхъ работниковъ, безкорыстно отдававшихъ свои досуги и энергію дѣлу познанія далекой окраины нашего отечества, Общество за срокъ своего существованія опубликовало много статей и замѣтокъ самаго разнообразнаго содержанія. Въ изданіяхъ его въ разное время были помѣщены работы по флорѣ и фаунѣ края, по мѣстной археологіи, по изученію быта туземнаго населенія и проч. Многіе изъ этихъ матеріаловъ являются, по отзывамъ спеціалистовъ, весьма цѣнными, тѣмъ болѣе что источники нашихъ свѣдѣній о районѣ дѣятельности Общества весьма немногочисленны. Само собою разумѣется, печатаніе собранныхъ матеріаловъ сопряжено съ большими денежными за-

тратами, на которыя Общество однако охотно шло, насколько позволяли его скромныя средства.

«Въ настоящее время заканчивается печатаніемъ томъ XV-й Записокъ Общества, заключающій трудъ ученаго хранителя Геологическаго Музея Императорской Академіи Наукъ П. В. Виттенбурга, подъ названіемъ «Матеріалы къ геологіи полуострова Муравьева и архипелага Императрицы Евгеніи». Изслѣдованія, изложенныя въ упомянутой работѣ, были произведены авторомъ ея на средства и по иниціативѣ Общества, въ послѣднее время поставившаго себѣ цѣлью систематическое изученіе въ естественно-историческомъ отношеніи Южно-Уссурійскаго края. П. В. Виттенбургъ всецѣло выполнилъ возложенную на него задачу и представилъ Обществу подробный отчетъ, заключающій детальное геологическое описаніе изслѣдованнаго района, и собранныя коллекціи, при чемъ, согласно условія съ Обществомъ, петрографическіе сборы поступили въ музей послѣдняго, а тождественные экземпляры (полученные при расколкѣ штуфовъ) — въ Геологическій Музей Императорской Академіи Наукъ, куда переданы также всѣ обширные палеонтологическіе сборы по каменноугольной фаунѣ, тріасу, юрѣ и третичнымъ отложеніямъ. Нынѣ значительная часть этого матеріала обработана цѣлымъ рядомъ спеціалистовъ, и результаты этой научной обработки печатаются въ Трудахъ Геологическаго Музея Академіи. Издать всецѣло за свой счетъ палеонтологическую и петрографическую части Общество нашло для себя обременительнымъ, такъ какъ расходы на это изданіе лишили бы его возможности продолжать планомѣрное изслѣдованіе края въ другихъ отношеніяхъ. Такъ, пришлось бы совершенно оставить сборы и обработку матеріаловъ по мѣстной флорѣ и фаунѣ.

«Между тѣмъ для Общества крайне цѣнно имѣть въ серіи своихъ Записокъ естественное продолженіе труда П. В. Виттенбурга, потому, что это, во-первыхъ, объединило бы всѣ данныя, добытыя снаряженною Обществомъ экспедиціею, а во-вторыхъ, усилило бы его обмѣнъ изданіями съ другими учеными организаціями, каковое общеніе особенно необходимо для Общества, столь удаленнаго отъ крупныхъ культурныхъ центровъ страны.

«Въ виду всего вышеизложеннаго позволяю себѣ, отъ имени и по порученію Общества, представителемъ коего въ Петроградѣ я состою, обратиться въ Отдѣленіе Физико-Математическихъ наукъ съ покорнѣйшей просьбой разрѣшить Обществу воспользоваться наборомъ, которымъ будутъ печататься въ Трудахъ Геологическаго Музея палеонтологическіе и петрографическіе результаты экспедиціи Виттенбурга, съ тѣмъ, чтобы перепечатать то же въ Запискахъ Общества, при чемъ послѣднее оплачиваетъ стоимость бумаги и печати для своихъ 650 экземпляровъ. Само собою разумѣется, подъ заголовкомъ каждой перепечатанной статьи будетъ помѣчено: Съ разрѣшенія Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ Императорской Академіи Наукъ перепечатано изъ Трудовъ Геологическаго и Минералогическаго Музея имени Императора Петра Великаго, томъ (такой то), выпускъ (такой то)».

Разрѣшено, о чемъ положено сообщить Директору Геологическаго и Минералогическаго Музея, въ Типографію и г. Тропанихину.

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Бластомеры и калиммоциты *Salpa fusiformis*» (V. V. Zalenskij. Les blastomères et les calymmocytes de *Salpa fusiformis*).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью В. П. Дробова «Матеріалы къ систематикѣ сибирскихъ представителей рода *Agropyron* Gaertn.» (V. Drobov. Contributions à l'étude des espèces sibériennes du genre *Agropyron* Gaertn.).

Къ статьѣ приложена таблица.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. Н. Любименко «Табачная промышленность въ Россіи».

Положено напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экз.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью Н. И. Андрусова, Н. С. Курнакова, А. А. Лебединцева, Н. И. Подкопаева и І. Б. Шпиндлера «Карабугазъ и его практическое значеніе».

Положено напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экз.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. В. Аршинова «Алюминіевыя руды и возможность ихъ нахожденія въ Россіи».

Положено напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экз.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. Дорогостайскаго «О фаунѣ ракообразныхъ рѣки Ангары» (V. Dorogostajskij. Contributions à la faune des Crustacés du fl. Angara).

Къ статьѣ приложена таблица.

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью В. Солдатова (V. Soldatov) на

англійскомъ языкѣ: «Description of a new species of genus *Crossias* from Okhotsk Sea» (Описаніе новаго вида рода *Crossias* изъ Охотскаго моря).

Къ статьѣ приложена таблица

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью: W. Stekloff (V. Steklov). «Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébychef correspondant à la fonction caractéristique $p(x)=x^{\beta}e^{-x}$ (Теорема замкнутости для полиномовъ Чебышева, соотвѣтствующихъ характеристической функціи $p(x)=x^{\beta}e^{-x}$).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. С. Курнаковъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью В. Н. Бекетова «Іодъ, бромъ и борная кислота въ соночныхъ и нефтяныхъ водахъ окрестностей Керчи и Таманскаго полуострова» (V. N. Beketov. Iode, brome et l'acide borique dans les eaux des volcans de Kerč et de la presqu'île Tamane).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Н. Н. Иванова «О продуктахъ распада бѣлковыхъ веществъ» [N. N. Iwanoff (Ivanov). Sur les produits de décomposition des matières proteiques].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью С. Костычева и В. Бриллiанта «Синтезъ азотистыхъ веществъ послѣ автолиза дрожжей». II [S. Kostytschew (Kostyčev) et V. Brilliant. Synthèse des matières azotées après l'autolyse de la levûre. II].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью В. И. Палладина и Е. И. Ловчиновской «Разложеніе щавелевой кислоты растеніями» (V. Palladin et E. Lovčinovskaja. Sur la décomposition de l'acide axalique par les plantes).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ представилъ только что вышедшій изъ печати 3-й выпускъ II-го тома «Геофизическаго Сборника», содержащій слѣдующія статьи:

1) Н. Н. Калитинъ. Актинометрическія и электрическія измѣренія во время свободныхъ полетовъ 20 іюля и 24 ноября 1913 г.

2) Е. И. Тихомировъ. Методъ корреляціи и его примѣненія въ метеорологіи.

3) В. А. Ульянинъ. Электрическій способъ опредѣленія горизонтальной слагающей земного магнетизма.

4) А. А. Фридманъ и В. Я. Альтбергъ. Къ вопросу о скорости звука.

5) Б. П. Мультановскій. Вліяніе центровъ дѣйствія атмосферы на погоду въ Европейской Россіи въ теплое время года. I. Засухи. (Предварительный отчетъ).

6) С. И. Небольсинъ. Вліяніе тумана на яркость разсѣяннаго свѣта.

Положено передать Сборникъ въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ князь Б. Б. Голицынъ представилъ годовой отчетъ о дѣятельности Морковской Геофизической Обсерваторіи въ Нижнемъ Ольчедаевѣ, Подольской губ., за 1915 годъ и читалъ:

«Графъ Н. Д. Морковъ устроилъ въ 1904 г. на свои средства образцовую во всѣхъ отношеніяхъ Обсерваторію и все время содержитъ ее, пополняя дорогими приборами и самъ участвуя въ работахъ Обсерваторіи.

«Такая дѣятельность графа Моркова заслуживаетъ быть отмѣченной, и я прошу Конференцію выразить ему благодарность за его труды».

Положено отчетъ передать въ I Отдѣленіе Библіотеки и выразить графу Н. Д. Моркову благодарность.

Академикъ И. П. Бородинъ доложилъ, что имъ получено изъ Томска отъ Общественнаго Городского Управленія увѣдомленіе, что 25 марта исполнится 50 лѣтъ общественной и просвѣтительной дѣятельности почетнаго гражданина города Томска Петра Ивановича Макушина.

Положено привѣтствовать П. И. Макушина телеграммой.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея просилъ Отдѣленіе командировать въ составъ радіевой экспедиціи магистранта Петроградскаго Университета Константина Константиновича Матвѣева для продолженія минералогическихъ и радіевыхъ изслѣдованій въ Забайкальскую область и Нерчинскій округъ срокомъ съ 1 мая по 1 октября с. г. и вмѣстѣ съ тѣмъ просить снестись съ Военнымъ Губернаторомъ Забайкальской области и Кабинетомъ Его Императорскаго Величества объ оказаніи К. К. Матвѣеву содѣйствія съ разрѣшеніемъ ему въ предѣлахъ Нерчинскаго округа производить поиски и развѣдки, а также о присылкѣ открытыхъ листовъ на пользованіе обывательскими и междудворными лошадьми.

Положено командировать К. К. Матвѣева, выдать ему удостовѣреніе и сдѣлать соотвѣтствующія сношенія.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея просилъ командировать ученаго хранителя Геологическаго и Минералогическаго Музея Н. Н. Рачковскаго въ Урянхайскій край и сѣверо-западную Монголію для геологи-

ческихъ изслѣдованій срокомъ съ 1 мая по 15 сентября с. г. и возбудить ходатайство передъ Министерствомъ Иностранныхъ Дѣлъ о выдачѣ соотвѣтствующаго документа для производства геологическихъ изслѣдованій въ сѣверо-западной Монголіи, а также извѣстить о его предстоящей научной командировкѣ Енисейскаго Губернатора и комиссара Усинскаго пограничнаго округа, довести до свѣдѣнія Правленія до подписанія протокола и выдать назначенные г. Рачковскому на командировку 2000 руб.

Положено командировать И. И. Рачковскаго, выдать ему удостовѣреніе, возбудить соотвѣтствующія ходатайства и выдать ему 2000 руб., о чемъ сообщить въ Правленіе.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея просилъ командировать ассистента Минералогическаго Кабинета Петроградскаго Университета Сергѣя Михайловича Курбатова въ Пермскую губернію для изученія мѣсторожденій везувіана, срокомъ съ 15 мая по 1 сентября, выдать ему на эту поѣздку 600 руб. изъ средствъ Музея на поѣздки и снестись съ Пермскимъ Губернаторомъ на предметъ выдачи ему открытаго листа объ оказаніи содѣйствія мѣстными властями, а также съ Пермскимъ Губернскимъ Земствомъ о выдачѣ открытаго листа на пользованіе земскими лошадьми.

Положено командировать С. М. Курбатова, выдать ему удостовѣреніе, сдѣлать соотвѣтствующія сношенія и выдать ему 600 руб., о чемъ сообщить въ Правленіе.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея просилъ командировать въ Закавказье и Туркестанъ минералога Владимира Георгіевича Орловскаго для сбора минераловъ и для минералогическихъ изслѣдованій. В. Г. Орловскій командированъ Военнымъ Вѣдомствомъ.

Положено командировать В. Г. Орловскаго и выдать ему удостовѣреніе.

ОТДѢЛЕНІЕ РУССКАГО ЯЗЫКА И СЛОВЕСНОСТИ.

II засѣданіе, 11 февраля 1916 года.

Въ виду исполняющагося 10-го октября 1916 г. десятилѣтія со дня смерти акад. А. Н. Веселовскаго, положено устроить въ этотъ день публичное засѣданіе Отдѣленія. Выступить съ докладомъ согласились академики: А. И. Соболевскій, В. М. Истринъ и В. Н. Перетцъ.

Непремѣнный Секретарь Имп. Академіи Наукъ сообщилъ, что Общее Собраніе утвердило предположеніе Отдѣленія относительно объявленія новаго конкурса на соисканіе премій имени А. Н. Неустроева.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Акад. А. И. Соболевскій довелъ до свѣдѣнія Отдѣленія о томъ, что въ архивѣ Петроградской Казенной Палаты нашлись собственноручныя бумаги Императрицы Екатерины II, переданныя въ настоящее время въ Московскій Архивъ Старыхъ Дѣлъ.

Положено сообщить объ этомъ акад. Н. А. Котляревскому.

Управленіе работъ по постройкѣ Петрозаводскъ-Сороцкой и Мурманской желѣзныхъ дорогъ обратилось съ слѣдующимъ вопросомъ:

«Въ Архангельской губерніи на юго-западномъ побережьѣ Бѣлаго моря расположено село «Сорока», черезъ которое проходитъ строящаяся нынѣ Мурманская желѣзная дорога.

«Въ виду встрѣтившейся надобности Управленіе работъ по постройкѣ Мурманской желѣзной дороги имѣетъ честь почтительнѣйше просить Отдѣленіе Русскаго языка и словесности сообщить, какое производное слово отъ наименованія этого села — «Сороцкое» или «Сорокское», слѣдуетъ считать правильнымъ, такъ какъ въ литературѣ и обиходной рѣчи встрѣчается то и другое.

«Между прочимъ Управленіе работъ имѣетъ честь указать, что, по преданію мѣстныхъ жителей село «Сорока» получило будто свое названіе отъ расположенія на большомъ количествѣ острововъ, числомъ сорокъ».

Положено отвѣтить, что Отдѣленіе признаетъ предпочтительнымъ написаніе «Сорокское».

Н. К. Симони обратился къ Отдѣленію съ нижеслѣдующимъ ходатайствомъ.

«Отдѣленіемъ Русскаго языка и словесности нѣсколько лѣтъ тому назадъ былъ пріобрѣтенъ очень ветхій портретъ писателя М. Д. Чулкова, писанный масляными красками въ 1772 году, какъ отмѣчено чернилами на оборотной сторонѣ холста. Когда портретъ этотъ нужно было фотографировать фотографу Александрову въ особой мастерской въ Таврическомъ Дворцѣ во время Выставки историческихъ портретовъ, то и г. Дягилеву удалось видѣть этотъ портретъ и онъ по остаткамъ живописи призналъ его писаннымъ хорошимъ французскимъ художникомъ, какихъ не мало пріѣзжало тогда въ Петербургъ. Фототипическая копія съ означеннаго портрета въ очень уменьшенномъ видѣ приложена къ академическому изданію Сочиненій Чулкова (въ началѣ I-го тома).

«Въ виду того, что возбуждавшійся нѣсколько разъ въ Отдѣленіи вопросъ о реставраціи означеннаго портрета не привелъ ни къ какому положительному исходу, отчасти вслѣдствіе высокой оплаты труда надежнаго реставратора, то не найдетъ ли нынѣ возможнымъ Отдѣленіе поручить ему, Симони, переговорить съ рекомендованной Б. Л. Модзалевскимъ художницей Ел. Борис. Барсуковой, которая можетъ вполнѣ надежно[1] и умѣло перекопировать оставшіяся части портрета на новый холстъ и въ случаѣ надобности заполнить остальныя части холста реставрированными аксессуарами.

«Если того не сдѣлать въ настоящее время, то портретъ этотъ (хранящійся въ Рукописномъ Отдѣленіи Имп. Академіи Наукъ) совершенно истлѣетъ и краски осыплются и съ остальныхъ частей.

«Если бы Отдѣленіе (какъ собственникъ означеннаго портрета) не нашло бы нужнымъ ни реставрировать его, ни переписывать, то не разрѣшитъ ли оно передать его въ собственность какому-либо художественному или иному учрежденію, которое взяло бы на себя обязанность тѣмъ или инымъ способомъ сохранить на будущія времена это единственное *подлинное* изображеніе довольно виднаго писателя XVIII вѣка въ моментъ разцвѣта его дѣятельности».

Положено просить г. Симони войти въ переговоры съ г-жею Барсуковой.

---

[1] Она копировала портреты для Пушкинскаго Дома.

ОТДѢЛЕНІЕ ИСТОРИЧЕСКИХЪ НАУКЪ И ФИЛОЛОГІИ.

IV засѣданіе, 24 февраля 1916 года.

Академикъ В. В. Латышевъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія работу свою: «Меѳодія патріарха Константинопольскаго житіе преп. Ѳеофана Исповѣдника» (V. V. Latyšev. Vie de S. Théophane par Méthode patriarche de Constantinople).

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Несмотря на трудъ П. П. Пекарскаго, научная дѣятельность Г. Ф. Миллера, особенно въ качествѣ участника «Великой Сибирской экспедиціи 1733—1743 гг.», еще недостаточно обслѣдована; въ частности, одна изъ его работъ, составленная имъ уже на обратномъ пути изъ Сибири, въ 1740 году, а именно «Инструкція касательно того, что требуется для географическаго и историческаго описанія Сибири» (Instruction was zu geographischer und historischer Beschreibung von Sibirien erfordert wird), предназначенная для І. Э. Фишера, хотя и была извѣстна П. П. Пекарскому, но до сихъ поръ остается въ полномъ ея составѣ неизданной; лишь часть ея (VI) вмѣстѣ съ приложеніями была напечатана Ф. К. Руссовымъ по списку въ «Сборникѣ Музея по Антропологіи и Этнографіи» (Томъ I, стр. 37—109). Въ настоящее время приватъ-доцентъ Петроградскаго Университета Г. В. Вернадскій представилъ на мое разсмотрѣніе копію съ подлиннаго текста вышеозначенной инструкціи Г. Ф. Миллера, находящейся въ дѣлахъ Камчатской экспедиціи, съ предисловіемъ къ ней; желательно было бы, въ виду любопытнаго ея содержанія, напечатать ее въ одномъ изъ академическихъ изданій въ 400 экземплярахъ, въ форматѣ «Извѣстій», при чемъ академики В. В. Радловъ и К. Г. Залеманъ любезно выразили готовность наблюдать за ходомъ изданія».

Положено напечатать отдѣльнымъ изданіемъ въ 400 экземплярахъ подъ наблюденіемъ академиковъ В. В. Радлова и К. Г. Залемана.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи представилъ для свѣдѣнія Отдѣленія одобренную имъ, какъ обязательное руководство для регистраторовъ, инструкцію для регистраціи коллекцій въ Музеѣ и просилъ напечатать ее

въ приложеніи къ протоколу и 100 оттисковъ инструкціи предоставить въ распоряженіе Музея.

Положено принять къ свѣдѣнію, инструкцію напечатать въ приложеніи къ настоящему протоколу и выдать Музею 100 оттисковъ.

Отъ имени академика С. Ѳ. Ольденбурга представленъ № VI «Протоколовъ Русскаго Комитета для изученія Средней и Восточной Азіи» за 1915 г.

Положено передать въ Азіатскій Музей.

Академикъ М. А. Дьяконовъ читалъ:

«Для исполненія возложеннаго на профессора Ѳ. В. Тарановскаго порученія по подготовкѣ къ изданію Устава Благочинія представляется необходимымъ исходатайствовать для него въ Министерствѣ Народнаго Просвѣщенія командировку срокомъ съ 1 января 1917 г. до конца лѣтняго каникулярнаго времени того же года для занятій въ архивахъ Петрограда и Москвы».

Положено возбудить соотвѣтствующее ходатайство, о чемъ сообщить въ Правленіе для исполненія.

По этому же дѣлу Вице-Президентъ предложилъ сумму, оставшуюся отъ ассигнованной въ прошломъ году для уполномоченнаго отъ Академіи для западнаго района военныхъ дѣйствій Е. Ф. Шмурло, передать въ распоряженіе академика Н. Я. Марра для регистраціи и охраны памятниковъ въ Кавказскомъ районѣ.

Положено означенную сумму передать въ распоряженіе академика Н. Я. Марра, о чемъ сообщить въ Правленіе до подписанія протокола, и возбудить ходатайство передъ Главнокомандующимъ на Кавказскомъ фронтѣ о разрѣшеніи командировать уполномоченныхъ отъ Академіи въ Турецкій районъ.

Приложеніе къ протоколу IV засѣданія Отдѣленія Историческихъ наукъ и Филологіи Императорской Академіи Наукъ 24 февраля 1916 года.

Инструкція для регистраціи коллекцій въ Музеѣ Антропологіи и Этнографіи имени Императора Петра Великаго[1].

§ 1. Всякое поступленіе, будь то личная передача, почтовая посылка, желѣзнодорожный или пароходный грузъ, за исключеніемъ писемъ и бандеролей, вносится въ день поступленія, въ обычное время — особымъ лицомъ, на которое это будетъ возложено, а въ вакаціонное время — дежурнымъ, за ихъ подписями, въ особую книгу подъ названіемъ «Входящая книга поступленій».

§ 2. Всякое новое поступленіе вносится во Входящую книгу подъ соотвѣтствующимъ нумеромъ въ хронологическомъ порядкѣ, и этотъ же нумеръ красками или чернилами наносится на этикетку, которая наклеивается на полученный пакетъ (или ящикъ), при чемъ, если въ одномъ поступленіи нѣсколько пакетовъ, № въ книгѣ и на пакетѣ обозначается дробью, числитель которой обозначаетъ № поступленія, а знаменатель — число пакетовъ.

§ 3. Во Входящую книгу заносятся свѣдѣнія: а) о времени полученія; б) о мѣстѣ, откуда получено; в) объ имени отправителя; г) о числѣ мѣстъ; д) о пути полученія (жел. дорога, пароходъ, почта, личная передача и т. п.); е) объ отдѣлѣ поступленія (Китай, Индія и т. п.).

§ 4. Если пріемщику затруднительно опредѣлить самому, къ какому отдѣлу данное полученіе относится, онъ вскрываетъ пакетъ и, по характеру заключающихся въ немъ предметовъ, самъ или съ помощью лицъ, завѣдующихъ отдѣлами, рѣшаетъ вопросъ.

§ 5. Кромѣ указаннаго случая, пакеты вскрываются лишь тогда, когда вещи требуютъ мѣръ предохраненія отъ моли. Въ сомнительныхъ случаяхъ коллекціи отправляются еще до вскрытія въ дезинфекціонную камеру.

---

[1] Составлена, на основаніи принятой въ Музеѣ системы регистраціи, старшимъ этнографомъ Л. Я. Штернбергомъ, обсуждалась въ собраніи лицъ ученаго персонала и утверждена Директоромъ Музея.

§ 6. О полученіи новыхъ вещей сообщается завѣдующему соотвѣтствующимъ отдѣломъ, который расписывается въ свою очередь въ пріемѣ и при первой возможности приступаетъ къ регистраціи, отмѣтивъ во «Входящей книгѣ» тотъ № или №№, подъ которыми новое поступленіе регистрируется.

§ 7. Если новое поступленіе заключаетъ въ себѣ коллекціи, относящіяся къ разнымъ отдѣламъ, то оно распредѣляется между завѣдующими; каждая изъ такихъ коллекцій регистрируется въ соотвѣтствующемъ отдѣлѣ подъ особымъ нумеромъ, а во «Входящей книгѣ» отмѣчаются всѣ №№, подъ которыми новое поступленіе зарегистрировано.

§ 8. До регистраціи пакеты хранятся въ кладовой.

§ 9. Въ первыхъ числахъ ноября каждаго года завѣдующій первоначальной пріемкой просматриваетъ всѣ поступленія этого года и подъ графой послѣдняго поступленія красными чернилами отмѣчаетъ, какіе №№ еще не поступили въ регистрацію, сообщая объ этомъ Директору.

§ 10. Каждое новое поступленіе даннаго отдѣла, идущее отъ одного лица или учрежденія, заносится какъ одно цѣлое въ «Инвентарную книгу коллекцій» въ отдѣльную графу, подъ особымъ №, въ хронологическомъ порядкѣ. Книга эта имѣетъ сплошную нумерацію, начиная съ № 1 вплоть до № 9999, послѣ чего, во избѣжаніе слишкомъ большой многозначности нумеровъ, нумерація вновь начинается съ начала, но передъ каждымъ нумеромъ ставится прописная буква А и такъ до слѣдующаго десятка тысячъ.

§ 11. Въ графѣ каждаго №, въ раздѣленныхъ по рубрикамъ клѣткахъ, отмѣчается: отъ кого и когда получена коллекція; когда и кѣмъ зарегистрирована; изъ какой мѣстности и отъ какого народа; общій составъ коллекціи; способъ пріобрѣтенія (даръ, покупка, по командировкѣ); число нумеровъ и вещей; документы, относящіеся къ коллекціи, и № коллекціи по «Входящей книгѣ». Въ случаѣ исключенія предмета впослѣдствіи, это отмѣчается въ соотвѣтствующемъ мѣстѣ въ книгѣ, гдѣ для этого имѣется особая рубрика.

§ 12. Послѣ занесенія коллекціи въ «Инвентарную книгу», для нея на особомъ листѣ составляется *регистраціонный списокъ*.

§ 13. Въ заголовкѣ списка выставляется тотъ №, подъ которымъ коллекція занесена въ Инвентарную книгу, а внизу, подъ №, заносятся схематически тѣ общія свѣдѣнія о коллекціи, которыя отмѣчены въ Инвентарной книгѣ: отъ такого-то, тогда-то; въ даръ или по командировкѣ, или по покупкѣ (цѣна); мѣстность (общее названіе), народъ; составъ коллекціи (напр., предметы культа, быта, орнамента и т. п.); количество №№ и вещей; документы и № по Входящей книгѣ.

§ 14. До внесенія въ списокъ каждаго предмета въ отдѣльности, необходимо разложить предметы въ извѣстномъ порядкѣ: если въ коллекціи предметы разныхъ народностей, то разложить на группы по этимъ послѣднимъ, а внутри каждой такой группы распредѣлить предметы согласно ихъ назначенію (одежда, утварь, передвиженіе, орудія, культъ и т. п.); въ каждой такой подгруппѣ распредѣлить предметы

по тѣмъ или другимъ характернымъ признакамъ (напр., предметы деревянные, кожаные, плетеные; идолы, шаманскіе костюмы и пр.); въ нѣкоторыхъ случаяхъ приходится распредѣлять предметы на группы по районамъ — территоріально. Послѣ этого въ порядкѣ разгруппировки начинается самая регистрація.

§ 15. Каждый предметъ заносится въ списокъ подъ особымъ нумеромъ въ порядкѣ внесенія, а на самомъ предметѣ выставляются двѣ цифры разныхъ шрифтовъ: первая цифра (крупнымъ шрифтомъ) — общій № коллекціи и списка, вторая (мелкимъ шрифтомъ, подведеннымъ чертой) — порядковый № предмета въ спискѣ. Если примѣненіе разныхъ шрифтовъ представится въ томъ или другомъ случаѣ неудобнымъ, можно цифры №№ отдѣлять посредствомъ тире. Желательно №№ на предметахъ ставить на опредѣленныхъ, наиболѣе удобныхъ для нахожденія мѣстахъ и по возможности не на выставочной сторонѣ, напр.: на кафтанѣ, шубѣ, рубахѣ — у ворота, на юбкѣ, штанахъ — у пояса, на платкѣ — въ углу, на сапогахъ — у верхняго края голенища, внутри и т. д.

§ 16. Подъ каждымъ порядковымъ нумеромъ заносится только *одинъ* предметъ, но подъ «однимъ предметомъ» должно понимать предметъ не какъ нѣчто единичное, а какъ индивидъ, т. е. все то, что по своему назначенію и характеру составляетъ одно цѣлое, хотя бы состояло изъ нѣсколькихъ отдѣльныхъ вещей, какъ, напр.: пара сапогъ, сосудъ и крышка, бубенъ и колотушка, чубукъ и трубка, кій и шары, колода картъ, черепки одного и того же горшка и т. п. Но, напримѣръ, колчанъ и стрѣлы регистрируются отдѣльно, ибо опредѣленнаго комплекта стрѣлъ для колчана нѣтъ. Если такимъ образомъ подъ однимъ нумеромъ приходится заносить нѣсколько предметовъ, то на каждомъ отдѣльномъ предметѣ выставляется общій № съ прибавленіемъ той или другой буквы въ порядкѣ русскаго алфавита. Такъ, напримѣръ, если рѣчь идетъ о чашкѣ съ крышкой, какъ третьемъ предметѣ коллекціи 543, то на чашкѣ будетъ нумеръ $543\frac{3а}{}$ или 543—3а, а на крышкѣ — $543\frac{3б}{}$ или 543—3б, а общій № предмета въ спискѣ будетъ 543—3а, б.

§ 17. Если на главномъ предметѣ имѣются неотдѣлимые отъ него второстепенные предметы, которые необходимо выдѣлить при описаніи, то на каждомъ такомъ предметѣ желательно ставить нумеръ главнаго предмета съ прибавленіемъ заглавныхъ буквъ французскаго алфавита.

§ 18. Способы зафиксированія нумера на предметѣ: 1) на предметахъ изъ камня или металла — жидкой эмалевой краской; 2) на тканяхъ, кожѣ, деревѣ — ниткомъ на самомъ предметѣ, предпочтительно не на выставочной сторонѣ; 3) на особыхъ прикрѣпленныхъ къ предмету этикеткахъ, если иные способы нанесенія № представляются неудобными, — чернилами. Для удобства отысканія предмета, а также въ видахъ возможнаго стиранія надписей на самихъ предметахъ рекомендуется, кромѣ надписей на предметахъ, дополнительно прикрѣплять и этикетки.

§ 19. За № слѣдуетъ описаніе предмета. Оно начинается съ названія, при чемъ, если извѣстенъ туземный терминъ, онъ ставится впереди, а за нимъ — по возможности буквальный переводъ его на русскій языкъ. Далѣе идетъ внѣшнее опи-

саніе — форма, составныя части, размѣры, матеріалъ, окраска, наиболѣе характерныя особенности, типъ и детали орнамента, назначеніе, при чемъ въ описаніе вносятся всѣ тѣ свѣдѣнія о предметѣ и туземные термины, которые имѣются въ документахъ или литературѣ. Если въ литературѣ или въ спискахъ Музея имѣется подробное описаніе такого же предмета, то въ спискѣ даются только схематическія данныя со ссылкой на то или другое сочиненіе или соотвѣтствующій нумеръ списка. Если матеріалъ, изъ котораго изготовленъ предметъ, требуетъ точнаго научнаго опредѣленія (напр., перья, растенія, мѣхъ), то регистраторъ обращается за разъясненіями въ соотвѣтствующій Музей Академіи. Описаніе каждаго предмета заканчивается точнымъ указаніемъ мѣстности и народа.

§ 20. Если при коллекціи не имѣется никакихъ документовъ, и не имѣется данныхъ для ея опредѣленія, то составляется провизорный списокъ, и регистраторъ принимаетъ возможныя мѣры къ выясненію ея происхожденія и опредѣленію. Такую коллекцію впредь до опредѣленія слѣдуетъ выставить въ особомъ шкапу неопредѣленныхъ предметовъ.

§ 21. Если въ коллекціи почему-либо зарегистрированъ предметъ изъ другого отдѣла, то дѣлается особая выписка изъ списка и передается вмѣстѣ съ предметомъ завѣдующему соотвѣтствующимъ отдѣломъ.

§ 22. Если завѣдующій отдѣломъ находитъ, что тѣ или другіе дублетные предметы, безъ ущерба для научнаго значенія коллекціи и интересовъ выставленія, могутъ быть выдѣлены въ число дублетныхъ серій для обмѣна, то такіе предметы регистрируются въ особую дублетную книгу и отдаются на храненіе спеціально завѣдующему такими собраніями лицу.

§ 23. Въ концѣ списка указываются дата начала и конца регистраціи и число страницъ, за подписью регистратора.

§ 24. По окончаніи регистраціи списокъ вкладывается въ папку установленнаго образца, при чемъ заполняются напечатанныя на наружной сторонѣ рубрики, и затѣмъ представляется Директору на подпись, послѣ чего списокъ присоединяется къ остальнымъ спискамъ отдѣла, хранимымъ подъ отвѣтственностью завѣдующаго. Документы къ данному списку вкладываются въ особую папку подъ тѣмъ же нумеромъ, подъ которымъ зарегистрирована коллекція. Папка эта хранится вмѣстѣ съ такими же папками по другимъ коллекціямъ у завѣдующаго соотвѣтствующимъ отдѣломъ. Въ случаѣ отъѣзда завѣдующаго ключъ отъ шкапа со списками передается Директору Музея.

§ 25. Въ случаѣ, если тотъ или другой предметъ за ненадобностью исключается изъ списка или, какъ дублетный, былъ переданъ другому Музею въ обмѣнъ, то объ этомъ отмѣчается какъ въ спискѣ, такъ и въ Инвентарной книгѣ и, кромѣ того, заносится въ особую книгу исключенныхъ предметовъ. Къ концу года всѣ нумера такихъ предметовъ представляются Директору для доклада Конференціи.

§ 26. Негативы регистрируются отдѣльно отъ позитивовъ, но при регистраціи тѣхъ и другихъ отмѣчается при каждомъ нумерѣ, какой именно нумеръ негатива (и

обратно) ему соотвѣтствуетъ. — Желательно соотвѣтствіе порядковыхъ нумеровъ негативовъ и позитивовъ.

§ 27. Для справокъ завѣдующіе отдѣлами пользуются не общей регистраціонной книгой, а особой книгой, въ которой скопированы только коллекціи даннаго отдѣла.

§ 28. Для регистраціи фонограммъ ведется спеціальная книга съ особой нумераціей, различаемой по буквѣ F, которая ставится впереди №.

Карточный каталогъ.

§ 29. Цѣль карточнаго каталога — дать возможность систематизировать и собрать воедино однородный въ томъ или другомъ отношеніи матеріалъ, разбросанный въ различныхъ по времени и составу регистраціонныхъ спискахъ. Систематизація производится: 1) по народностямъ, а внутри каждой народности по тѣмъ или другимъ рубрикамъ (жилище, одежда, утварь, орудія, орнаментъ, культъ и пр.), при чемъ въ каждой рубрикѣ предметы располагаются въ алфавитномъ порядкѣ; 2) типологически, въ зависимости отъ тѣхъ или другихъ научныхъ требованій, для цѣлей сравнительнаго изученія группъ или видовъ объектовъ культуры одной этнографической области или всей эйкумены человѣка. Въ этихъ видахъ желательно каждую карточку имѣть въ нѣсколькихъ копіяхъ, каковыя изготовляются по мѣрѣ дѣйствительной въ нихъ надобности.

§ 30. Карточка раздѣлена на двѣ половины. На одной дается изображеніе предмета въ видѣ фотографіи или рисунка, на другой приводятся описательныя данныя, которыя излагаются въ схематическомъ видѣ, но должны заключать въ сжатой формѣ тотъ минимумъ свѣдѣній, которыя въ научномъ отношеніи наиболѣе важны и характерны для описываемаго предмета. Главнымъ же источникомъ для подробнаго изученія является регистраціонный списокъ.

§ 31. Карточный каталогъ обязательно составлять одновременно съ составленіемъ регистраціоннаго списка. При составленіи карточнаго каталога къ старымъ коллекціямъ необходимо, помимо списковъ, заново внимательно ознакомиться съ описываемымъ предметомъ.

§ 32. На карточкѣ должны быть дата составленія и, кромѣ подписи составителя карточки, фамилія регистратора, если это разныя лица.

§ 33. Въ каждомъ отдѣлѣ карточки располагаются въ алфавитномъ порядкѣ по народамъ, а внутри каждой народности — по категоріямъ культуры (§ 29), но сверхъ того, рекомендуется изготовить двѣ серіи копій карточекъ: одну — для включенія ея въ обще-музейный каталогъ, другую — для расположенія карточекъ въ порядкѣ №№ коллекцій, дабы этой серіей возможно было пользоваться, въ нужныхъ случаяхъ, не прибѣгая къ оригинальнымъ спискамъ.

§ 34. Кромѣ указаннаго основного карточнаго каталога, составляются карточные каталоги по шкапамъ. На карточку въ $^1/_{16}$ долю листа наносится № шкапа,

въ которомъ хранится данный предметъ, № предмета, его названіе (русское), назначеніе и мѣстопроисхожденіе. Въ каждомъ шкапу хранится комплектъ карточекъ предметовъ, въ немъ заключающихся. Въ случаѣ перенесенія предмета въ другой шкапъ, вмѣстѣ съ предметомъ переносится и его карточка, на которой отмѣчается новый № шкапа. Въ случаѣ же временнаго изъятія предмета (для фотографированія или изученія), на его мѣсто помѣщается карточка, на которой отмѣчается карандашомъ временное его мѣстонахожденіе.

§ 35. Регистраціонные списки составляются на особой документной бумагѣ.

V засѣданіе, 9 марта 1916 года.

Вице-Президентъ отъ имени всѣхъ членовъ Отдѣленія привѣтствовалъ присутствующаго впервые въ засѣданіяхъ Академіи академика П. Г. Виноградова.

Генеральный Консулъ на Родосѣ А. Д. Калмыковъ сообщилъ:

«Имѣю честь представить при семъ фотографію греко-финикійской надписи, найденной на Родосѣ, близъ города, на предполагаемомъ мѣстѣ храма Зевса Атабирійскаго во время экскурсіи, предпринятой мною въ сопровожденіи г. Maiuri, хранителя древностей, и Оксфордскаго профессора Myres, нашедшаго эту надпись на поверхности земли. Одинъ снимокъ отправленъ въ Римъ, а другой въ Оксфордъ.

«До сихъ поръ, за исключеніемъ Кипра, финикійскія надписи почти не встрѣчались на островахъ восточной половины Средиземнаго моря.

«На верху плиты сохранилось только послѣднее слово греческаго вотивнаго текста ΧΑΡΙΣΤΗΡΙΟΝ, далѣе слѣдуетъ финикійскій текстъ, который не могъ быть прочитанъ на Родосѣ».

Положено передать академику П. К. Коковцову и благодарить А. Д. Калмыкова.

Академикъ К. Г. Залеманъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью привать-доцента И. Ю. Крачковскаго «Новая рукопись пятаго тома исторіи Ибн-Мискавейха» (I. J. Kračkovskij. Un nouveau manuscrit de V-e volume de l'histoire d'Ibn-Miskawayh), основанную на матеріалахъ, привезенныхъ В. А. Ивановымъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Въ виду того, что «Инструкція для регистраціи коллекцій въ Музеѣ Антропологіи и Этнографіи имени Императора Петра Великаго» могла бы быть полезной для устройства музеевъ Губернскихъ Ученыхъ Архивныхъ Комиссій, желательно было бы предоставить 50 экземпляровъ въ распоряженіе «Постоянной Исторической Комиссіи» для разсылки въ архивныя комиссіи».

Разрѣшено.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ докладъ о научной дѣятельности нѣкоторыхъ Губернскихъ Ученыхъ Архивныхъ Комиссій по ихъ отчетамъ, преимущественно — за 1911—1914 гг.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій просилъ напечатать найденную въ бумагахъ А. А. Куника Грамоту царей Іоанна Алексѣевича и Петра Алексѣевича шведскому королю Карлу XI не въ «Извѣстіяхъ» Академіи, какъ было постановлено Отдѣленіемъ, а въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Разрѣшено.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Игнатій Георгіевичъ Габліани, одинъ изъ сотрудниковъ моихъ по записи сванскихъ текстовъ на нарѣчіи верхне-ингурской Сванів, именно на мулахскомъ говорѣ, прислалъ 15 статей (стр. 1—18), представляющихъ описаніе цикла годичныхъ народныхъ праздниковъ съ Новаго года по день «Поминовенія въ скоромные дни»,— праздниковъ языческихъ и тогда, когда они пріурочены къ днямъ, освященнымъ христіанской религіею, и даже носятъ христіанскія названія. Въ доставленныхъ описаніяхъ имѣемъ праздники въ большинствѣ тѣ же, что̀ описаны священникомъ Арс. Оніаномъ на ла̄шхскомъ нарѣчіи. Описаніе И. Г. Габліани отличается сравнительной краткостью, но верхне-ингурское нарѣчіе для записи представляетъ значительныя трудности, особенно по наличію въ немъ ряда разновидностей гласныхъ, и съ этой стороной записыватель очень тщательно считается. И. Г. Габліани продолжаетъ работу. Въ письмѣ отъ 20 февраля онъ пишетъ: «Остальные постараюсь прислать въ скоромъ будущемъ. Очень я радъ, что на новомъ мѣстѣ у меня есть возможность работать, и надѣюсь въ будущемъ сдѣлать больше, чѣмъ до сихъ поръ»».

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ДОКЛАДЫ О НАУЧНЫХЪ ТРУДАХЪ.

В. П. Дробовъ. Матеріалы къ систематикѣ сибирскихъ представителей рода *Agropyron* Gaertn. (V. Drobov. Contributions à l'étude des espèces sibériennes du genre *Agropyron* Gaertn).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 16 марта 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Авторъ возстановляетъ два забытыхъ вида, *Agropyron boreale* и *A. macrourum*, и описанныхъ (подъ *Triticum*) Турчаниновымъ, и устанавливаетъ 3 новыхъ: *A. mutabile* (съ разновидностями *scabrum* и *glabrum*), *A. jacutense* и *A. viluicum*.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

С. Ганешинъ. Сезонныя расы *Melampyrum nemorosum* L. (Съ 3 таблицами рисунковъ). [S. S. Ganešin. Les races de saison de *Melampyrum nemorosum* L.].

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 30 марта 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Въ Шлиссельбургскомъ уѣздѣ Петроградской губерніи авторомъ найдена несомнѣнно весенняя луговая раса *Melampyrum nemorosum* L., гомологичная описанной для горныхъ луговъ Моравіи и Венгріи *M. Moravicum* H. Braun., отличающейся болѣе густымъ соцвѣтіемъ, широкими сильно покрашенными прицвѣтниками и болѣе широкими листьями. Въ томъ же уѣздѣ была найдена на крутомъ склонѣ съ кустарниками и другая — поздноцвѣтущая, по всей вѣроятности, исходная раса *M. nemorosum* L. Изъ нея пу-

темъ отбора при помощи покоса выработалась рано цвѣтущая луговая, которой дано названіе subsp. *Zingeri* (въ честь проф. Ново-Александрійскаго Института С. Х. и Л. — Н. В. Цингера), а другой (первоначальной) — subsp. *typicum*. Такимъ образомъ, Линнеевскій *M. nemorosum* распадается на 3 сезонныя расы: subsp. *Zingeri*, subsp. *moravicum* и subsp. *typicum*.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Дробовъ, В. Новыя растенія для флоры Туркестана, съ 2 таблицами рисунковъ. (V. Drobov. Nouvelles plantes du Turkestan).

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 30 марта 1916 г. академикомъ **И. П. Бородинымъ**).

Авторъ даетъ описаніе 24 новыхъ формъ, собранныхъ имъ лѣтомъ 1915 г. въ Ферганской области; изъ нихъ 9 новыхъ видовъ, остальныя разновидности.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О вліяніи давленія кислорода на скорость выцвѣтанія красокъ въ видимомъ спектрѣ.

П. П. Лазарева.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г.).

Въ моихъ работахъ, посвященныхъ вліянію давленія кислорода на выцвѣтаніе[1] красокъ, было доказано, что при измѣненіи концентраціи кислорода въ окружающей средѣ скорость реакціи выцвѣтанія измѣняется по уравненію

$$-\frac{dC}{dt} = M(C' + C_0'), \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \text{(I)}$$

гдѣ C есть концентрація краски, C' — концентрація кислорода, C_0' — постоянная, зависящая отъ способа приготовленія выцвѣтающей пленки, и M — величина постоянная при постоянныхъ условіяхъ поглощенія свѣта въ выцвѣтающей пленкѣ и равная $\alpha J\left(1 - e^{-kC}\right)$ [k есть коэффиціентъ поглощенія, J — яркость свѣта, и α — постоянная фотохимической реакціи].

Формула (I) оказалась прекрасно оправдывающейся на опытѣ для ряда красокъ при давленіи отъ нѣсколькихъ миллиметровъ ртутнаго столба до одной атмосферы. Представлялось далѣе интереснымъ распространить то же изслѣдованіе до давленій значительно бо́льшихъ атмосфернаго, и въ настоящей работѣ приведены результаты изслѣдованія выцвѣтанія красокъ въ атмосферѣ кислорода вплоть до давленій около ста атмосферъ.

---

[1] См. P. Lasareff. Zeitschr. f. physik. Chemie Bd. **78**. p. 657, 1912, а также П. Лазаревъ. Выцвѣтаніе красокъ и пигментовъ въ видимомъ спектрѣ. Опытъ изученія основныхъ законовъ химическаго дѣйствія свѣта. Москва [изъ «Извѣстій Императорскаго Техническаго Училища»], стр. 67, 1911.

Методъ и аппараты.

При опредѣленіи вліянія давленія кислорода на ходъ выцвѣтанія прокрашенныя коллодійныя пленки на стеклѣ помѣщались въ стальной сосудъ, въ которомъ давленіе могло быть доведено до 125 атмосферъ, и у котораго двѣ противуположныя стѣнки дѣлались изъ толстаго стекла, позволявшаго внутрь сосуда пропускать свѣтъ опредѣленной длины волны, вызывающій выцвѣтаніе въ пленкѣ, и одновременно измѣрять спектрофотометрически количество разложившейся краски[1].

Приготовленіе пленокъ производилось такъ, какъ это было описано въ первыхъ работахъ[2].

Приборъ, въ которомъ производилась реакція, состоялъ изъ стальной четырехгранной призмы *AAAA*, вдоль которой былъ просверленъ каналъ O_1O_2 для помѣщенія пленки *F*. [См. рис. 1].

Перпендикулярно къ каналу O_1O_2 имѣлся второй сквозной каналъ, находящійся противъ того мѣста, гдѣ помѣщалась пленка *F*. Въ одно отверстіе канала ввинчивалась стальная пробка P_3, въ другое стальная передаточная часть *BB*, ведущая къ бомбѣ съ сжатымъ кислородомъ [отверстіе B_1] и къ манометру [трубка *C*]. Плотное герметическое закрѣпленіе пробки *BB* достигалось свинцовыми прокладками. Для плотнаго закрѣпленія пробки P_3 вкладывалась фибровая пластинка.

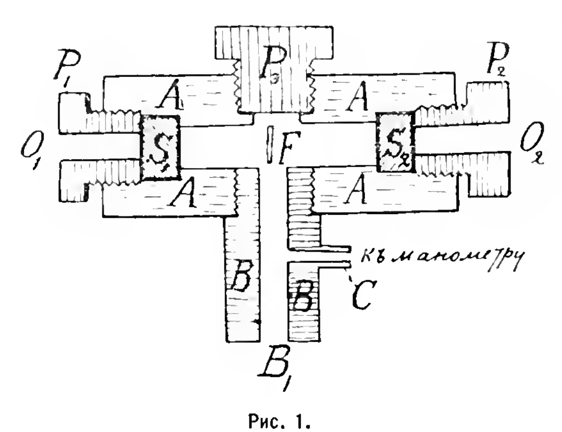


Рис. 1.

Отверстія O_1 и O_2 закрывались толстыми шлифованными стеклянными цилиндрами S_1 и S_2, которые при помощи винтовъ P_1 и P_2, имѣвшихъ въ себѣ каналы, плотно прижимались къ выточкамъ въ стальномъ цилиндрѣ. Для герметическаго закрытія и здѣсь примѣнялись свинцовыя кольцеобразныя прокладки. Свѣтъ въ аппаратѣ свободно проходитъ, какъ видно изъ описанія, въ пространствѣ O_1O_2. Общее расположеніе приборовъ видно изъ рис. 2.

[1] См. P. Lasareff. Ann. d. Physik. Bd. 24, p. 661, 1907.
P. Lasareff. Ann. d. Physik. Bd. 37. p. 812, 1912.

[2] P. Lasareff. Ann. d. Phys. loc. cit.

Лучи свѣта отъ Нернстовскаго штифта N, служившаго линейнымъ источникомъ свѣта, проходили черезъ спектроскопъ à vision directe $L_1 P L_2$ и давали спектръ. Ширма съ линейной щелью Sp вырѣзала изъ спектра пучокъ расходящихся однородныхъ лучей, которые обращались въ параллельные линзой L_3 и въ такомъ видѣ проходили вышеописанный приборъ для выцвѣтанія A. Далѣе при помощи зеркала S_1 и линзы L_4 лучи соединялись на щели

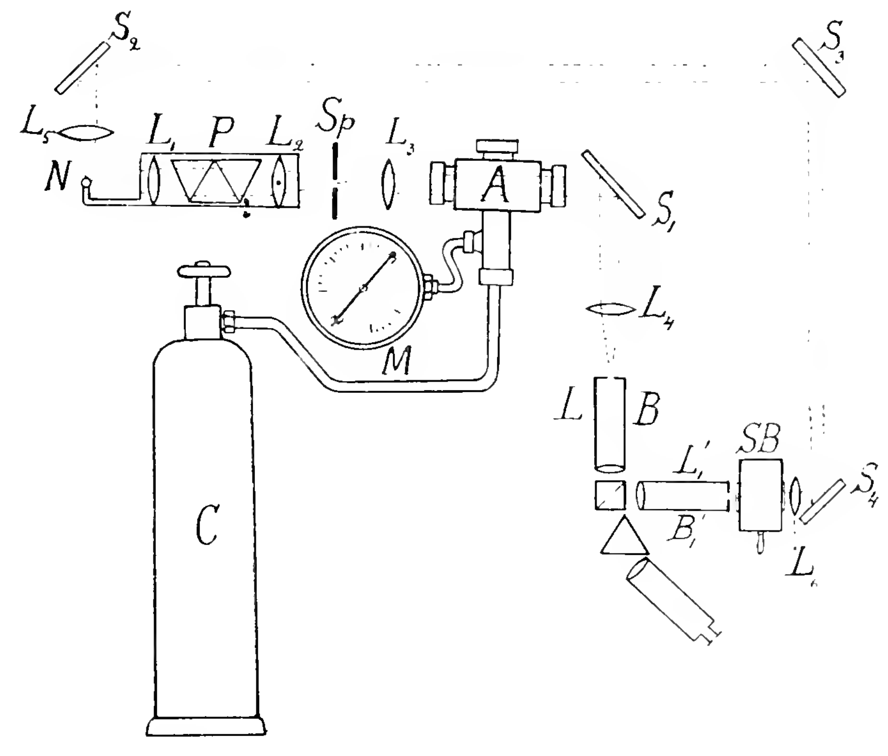


Рис. 2.

Люммеръ-Бродхуновскаго спектрофотометра[1], которымъ и измѣрялось выцвѣтаніе. Пучокъ свѣта, освѣщающій вторую щель спектрофотометра и проходящій для соотвѣтствующаго ослабленія черезъ бродхуновскій секторъ[2] SB, получался отъ того же источника свѣта N и рядомъ линзъ L_5 и L_6 и зеркалъ S_2, S_3, S_4 соединялся на второй щели. Всѣ ошибки, зависящія отъ колебанія въ яркости источника свѣта N, такимъ образомъ исключались вполнѣ.

Для контроля постоянства яркости лампъ въ теченіе выцвѣтанія параллельно лампѣ N включался вольтметръ, позволявшій во время опыта строго

[1] O. Lummer u. E. Brodhun. Zeitschr. f. Instrumentenk. Bd. 12. p. 132. 1892.

[2] E. Brodhun. Zeitschr. f. Instrumentenk. Bd. 14, p. 310. 1894.

слѣдить за постоянствомъ вольтажа и поддерживать, путемъ тонкаго регулированія при помощи реостатовъ, постоянное напряженіе на борнахъ лампы.

Камера для выцвѣтанія A соединялась толстостѣнными мѣдными трубками съ манометромъ M и бомбой съ сжатымъ кислородомъ C.

Ходъ опыта былъ такой: послѣ того какъ всѣ приборы были установлены и аппаратъ A герметически закрытъ, осторожно открывался вентиль бомбы C, и въ сосудѣ A получалось желаемое давленіе[1], которое отсчитывалось по манометру M.

При этомъ производился отсчетъ по спектрофотометру, дававшій отношеніе яркостей лучей попадавшихъ въ ту и другую щель спектрофотометра. Послѣ этого вентиль бомбы закрывался, у сосуда A отвинчивалась крышка, и въ каналъ F (рис. 1) помѣщалась выцвѣтающая пленка; вторично открывался вентиль, получалось прежнее же давленіе, и производился второй отсчетъ по спектрофотометру, дававшій степень поглощенія свѣта въ пленкѣ.

Наконецъ, послѣ пребыванія пленки въ теченіе опредѣленнаго времени на свѣту производился окончательный отсчетъ по спектрофотометру, позволявшій судить объ измѣненіи поглощенія въ пленкѣ отъ выцвѣтанія въ теченіе времени τ и опредѣлять разложеніе за это время ΔC въ доляхъ первоначальной концентраціи C $\left[\text{т. е. величину } \frac{\Delta C}{C}\right]$. Отсюда находилась величина $\frac{\Delta C}{C.\tau}$, приведенная въ таблицѣ.

Длина волны свѣта, дѣйствующаго на пленку, опредѣлялась такъ, что у спектрофотометра, предварительно градуированнаго на длинѣ волнъ, труба съ гауссовскимъ окуляромъ устанавливалась такъ, чтобы въ полѣ зрѣнія была видна освѣщенная однородными лучами щель Sp (рис. 2). Производя опредѣленіе положенія трубы, найдемъ и соотвѣтствующую длину волны.

Для поддержанія вполнѣ постояннаго давленія имѣлся рядъ бомбъ съ сгущеннымъ кислородомъ, полученнымъ изъ одного баллона, при чемъ давленіе газа въ бомбахъ было различно. Въ теченіе всего опыта вентиль бомбы былъ открытъ, и такимъ образомъ реакціонный сосудъ соединялся съ большимъ резервуаромъ, служившимъ для поддержанія постоянства давленія.

Разсчеты производились такъ, какъ это было указано въ моихъ вышецитированныхъ работахъ, и всѣ пленки приготовлялись разрѣзываніемъ изъ одного большого стекла, покрытаго окрашеннымъ коллодіемъ.

---

[1] Во время одного изъ опытовъ по неосторожности механика, открывшаго сразу вентиль, произошелъ сильный взрывъ, сопровождавшійся расплавленіемъ части стального цилиндра, сплавившагося въ этихъ мѣстахъ съ мѣдными надставными трубками.

Въ заключеніе необходимо обратить особое вниманіе на необходимость самой тщательной очистки сосуда отъ слѣдовъ масла и жировъ, могущихъ вызвать при быстромъ впускѣ кислорода взрывъ.

Результаты.

Изъ найденныхъ отсчетовъ по спектрофотометру вычислялась величина $\frac{\Delta C}{C}$[1], которая дѣлилась на τ, и эти величины и приведены на таблицѣ I и II.

Таблица I.

Cyanin ($\lambda = 603\ \mu\mu$).

Время выцвѣтанія τ въ секундахъ.	Давленіе p въ атмосферахъ.	$\frac{\Delta C}{C.\tau}$.
330	1	$0{,}95 \cdot 10^{-4}$
264	30	$4{,}1 \cdot 10^{-4}$
180	54	$5{,}8 \cdot 10^{-4}$
240	80	$5{,}4 \cdot 10^{-4}$
180	110	$4{,}3 \cdot 10^{-4}$.

Таблица II.

Cyanin ($\lambda = 590$).

Время выцвѣтанія τ въ секундахъ.	Давленіе p въ атмосферахъ.	$\frac{\Delta C}{C.\tau}$.
600	12	$2{,}8 \cdot 10^{-4}$
364	22	$3{,}4 \cdot 10^{-4}$
303	46	$8{,}4 \cdot 10^{-4}$
294	72	$7{,}6 \cdot 10^{-4}$
180	116	$11{,}1 \cdot 10^{-4}$
189	120	$9{,}4 \cdot 10^{-4}$.

Приведенные въ таблицѣ I и II результаты, выбранные изъ большого числа опытовъ, протекавшихъ съ одинаковыми данными, сопоставлены графически на рис. 3, гдѣ по оси абсциссъ отложено p и по оси ординатъ $\frac{\Delta C}{C\tau}$.

[1] Разсчеты см. P. Lasareff. Ann. d. Phys. u. Zeitschr. f. physik. Chemie loc. cit.

Какъ видно изъ рис. 3, скорость реакціи фотохимическаго разложенія краски съ увеличеніемъ давленія не возрастаетъ пропорціонально концентраціи, а стремится къ нѣкоторому стаціонарному состоянію, когда разложеніе не зависитъ отъ давленія.

Объясненіе этому факту мы можемъ найти въ томъ, что свѣтъ освобождаетъ въ каждую единицу времени электроны изъ небольшого числа нейтральныхъ молекулъ, которыя превращаются при этомъ въ іоны. Чтобы іонъ далъ новое вещество, соединившись съ кислородомъ, необходимо, чтобы онъ испыталъ соудареніе съ молекулой кислорода, и мы можемъ допустить, что при малыхъ давленіяхъ число образующихся іоновъ болѣе, чѣмъ число іоновъ, испытавшихъ соудареніе съ молекулами кислорода за тотъ же промежутокъ времени; съ увеличеніемъ давленія это послѣднее число растетъ, и мы можемъ себѣ легко представить, что когда число іоновъ испытавшихъ за единицу времени превращеніе подъ вліяніемъ соударенія съ молекулами кислорода, сдѣлается равнымъ числу вновь образовавшихся іоновъ, мы по-

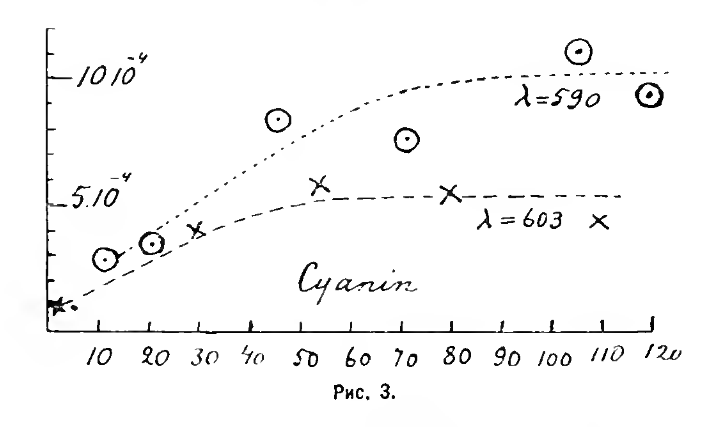


Рис. 3.

лучимъ стаціонарное состояніе и независимость реакціи отъ давленія, такъ какъ дальнѣйшее увеличеніе давленія, вызывая увеличеніе столкновеній молекулъ кислорода съ нейтральными молекулами краски за единицу времени, не внесетъ измѣненія въ скорость реакціи.

Настоящая работа выполнена мною въ Физическомъ Институтѣ Императорскаго Техническаго Училища при матеріальной поддержкѣ со стороны Общества имени Х. С. Леденцова. Позволяю себѣ и здѣсь принести Обществу мою глубокую благодарность за поддержку моихъ изслѣдованій.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène.

Par A. Liapounoff (Lĭapunov).

Seconde Partie *.

(Présenté à l'Académie le 30 mars/12 avril 1916).

15. Revenons aux formules du n° 11 et considérons de plus près la connexion qui existe entre les fonctions ζ et ξ.

En désignant ces fonctions, quand il faudra mettre en évidence leur argument a, par $\zeta(a)$ et $\xi(a)$, nous pouvons écrire l'équation

$$(R+c)\zeta = \frac{1}{a^2} F\left(a\sqrt{1+\zeta}\right),$$

dont la résolution donne la fonction ζ, sous la forme suivante:

(1) $$\zeta = (1+\zeta)\,\xi\left(a\sqrt{1+\zeta}\right).$$

Or, si nous posons

$$a\sqrt{1+\zeta} = v,$$

cette équation pourra s'écrire

(2) $$v^2\left[1-\xi(v)\right] = a^2.$$

Donc, si les deux fonctions ζ et ξ sont déjà connues, la formule $v = a\sqrt{1+\zeta}$ donnera une solution par rapport à v de l'équation (2).

De même, la formule $a = v\sqrt{1-\xi(v)}$ donnera une solution par rapport à a de l'équation $a^2\left[1+\zeta(a)\right] = v^2$, en sorte que, a étant remplacé par sa valeur, on aura

$$\xi(v) = \left[1-\xi(v)\right]\zeta\left(v\sqrt{1-\xi(v)}\right).$$

* *Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences*, 1916, page 471.

Or, cette égalité étant une identité par rapport à x, on peut y remplacer x par a. On aura donc

(3) $$\xi = (1 - \xi)\zeta\left(a\sqrt{1-\xi}\right).$$

De cette façon la résolution de l'équation (1), quand la fonction ξ est connue, donnera la fonction ζ, et la résolution de l'équation (3), quand la fonction ζ est connue, donnera la fonction ξ.

Remplaçons l'équation (1) par celle-ci:

$$\zeta = \varepsilon(1+\zeta)\xi\left(a\sqrt{1+\zeta}\right),$$

où ε est un paramètre arbitraire, et considérons la solution ζ de cette dernière équation s'annulant pour $\varepsilon = 0$. En la développant suivant les puissances de ε, nous aurons, d'après la formule de Lagrange,

$$\zeta = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon^n}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}a^{2n}\xi^n}{\partial(a^2)^{n-1}}.$$

Cette formule sera valable, tant que $|\varepsilon|$ reste au-dessous d'une certaine limite dépendant de α; mais cette limite pourra être rendue aussi grande qu'on veut en faisant $|\alpha|$ suffisamment petit. On peut donc supposer $|\alpha|$ assez petit pour qu'on puisse poser $\varepsilon = 1$, et, en le faisant, on arrive à la formule (26) du n° 11, savoir

(4) $$\zeta = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot\frac{\partial^{n-1}a^{2n}\xi^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

qui donne la solution de l'équation (1) s'annulant pour $\alpha = 0$.

En traitant de même l'équation

$$\xi = \varepsilon(1-\xi)\zeta\left(a\sqrt{1-\xi}\right),$$

on aura, pour la solution ξ de l'équation (3) s'annulant pour $\alpha = 0$, l'expression suivante:

(5) $$\xi = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}a^{2n}\zeta^n}{\partial(a^2)^{n-1}}.$$

De cette façon chacune des deux formules (4) et (5) sera une inversion de l'autre, et ces formules pourront être considérées comme des formules de transformation qui ont pour but de remplacer l'une des deux fonctions ζ et ξ par une autre.

Cela posé, nous allons transformer l'équation (23) du n° 11 de manière à y introduire, au lieu de ζ, la fonction ξ.

16. Pour effectuer ladite transformation, reportons-nous à la formule (25) du n° 11.

En y remplaçant $F(a)$ par son expression, nous pouvons écrire cette formule comme il suit:

$$(6)\qquad (R+c)\,a^2\xi = J(a) - J(0) - J'(0)\,a + \left(\frac{\eta}{2\Delta}\Theta + c\right)a^2.$$

Or, a étant plus petit que 1, on a

$$J(a) = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\overline{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a,\sqrt{u})}.$$

Il ne reste donc qu'à remplacer $\overline{\zeta}'$ par son expression qu'on déduit de la formule (4) en y faisant $a=1$, $\theta=\theta'$, $\psi=\psi'$, ce qui donne

$$\overline{\zeta}' = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1} a^{2n}\xi^n(a,\theta',\psi')}{\partial(a^2)^{n-1}}\right\}_{a=1},$$

où

$$\xi^n(a,\theta',\psi') = \left[\xi(a,\theta',\psi')\right]^n,$$

$\xi(a,\theta,\psi)$ étant la notation de ξ comme fonction de a, θ, ψ.

Après ce remplacement, la formule (6) représentera l'équation transformée. Mais, pour la rendre maniable, il faut encore y développer $J(a)$ suivant les ordres relatifs à la fonction ξ, ce qui revient à développer $J(a)$, après y avoir remplacé $\overline{\zeta}'$ par la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1} a^{2n}\xi^n(a,\theta',\psi')}{\partial(a^2)^{n-1}}\right\}_{a=1}$$

suivant les puissances de ε et à poser ensuite $\varepsilon=1$.

Or cette série est une solution de l'équation

$$x = \varepsilon(1+x)\,\xi(\sqrt{1+x},\theta',\psi').$$

La question se réduit donc à développer suivant les puissances de ε l'intégrale

$$\int_1^{1+x} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a,\sqrt{u})},$$

x étant la racine de l'équation précédente qui s'annule pour $\varepsilon=0$, et c'est ce qu'on peut faire à l'aide de la formule de Lagrange qui donnera

$$\int_1^{1+x} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(a,\sqrt{u})} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}\,\frac{u^{n+\frac{1}{2}}\xi^n(\sqrt{u},\theta',\psi')}{D(a,\sqrt{u})}\right\}_{u=1}.$$

Cela étant, le développement de $J(a)$ qu'il fallait obtenir sera

$$J(a) = \frac{1}{4\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1}}{\partial u^{n-1}}\int\frac{u^{n+\frac{1}{2}}\xi^n(\sqrt{u},\theta',\psi')}{D(a,\sqrt{u})}d\sigma'\right\}_{u=1}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$(7) \qquad \frac{u^{n+\frac{1}{2}}}{4\pi}\int\frac{\xi^n(\sqrt{u},\theta',\psi')\,d\sigma'}{D(a,\sqrt{u})} = I_n(a,u).$$

Alors, le terme correspondant à $n=1$ étant écrit à part, il viendra

$$J(a) = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\overline{\xi}'\,d\sigma'}{D(a,1)} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1}I_n(a,u)}{\partial u^{n-1}}\right\}_{u=1},$$

en convenant de poser

$$\xi(1,\theta,\psi) = \overline{\xi}, \qquad \xi(1,\theta',\psi') = \overline{\xi}'.$$

On en déduira ensuite immédiatement les expressions de $J(0)$ et de $J'(0)$. Mais, pour ce qui va suivre, il suffit de savoir que $J(0)$ est une constante par rapport à θ et ψ et que $J'(0)$ est égal à $\sin\theta\cos\psi$ multiplié par une constante.

D'après tout cela, l'équation (6) prendra la forme

$$(8) \qquad (R+c)a^2\xi = \frac{1}{4\pi}\int\frac{\overline{\xi}'\,d\sigma'}{D(a,1)} + h + h'a\sin\theta\cos\psi$$
$$+\left(\frac{\eta}{2\Delta}\Theta + c\right)a^2 + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1}I_n(a,u)}{\partial u^{n-1}}\right\}_{u=1},$$

où h et h' sont des constantes qu'il faudra déterminer de manière à rendre le second membre divisible par a^2.

Telle sera la transformée de l'équation (23) du n° 11.

Remarquons que le calcul de la formule (7) doit être effectué dans l'hypothèse $a < \sqrt{u}$. Par suite, le symbole

$$\left\{\frac{\partial^{n-1}I_n(1,u)}{\partial u^{n-1}}\right\}_{u=1}$$

représentera la limite vers laquelle tend la dérivée

$$\frac{\partial^{n-1}I_n(1,u)}{\partial u^{n-1}}$$

quand u tend vers 1 par une suite de valeurs plus grandes que 1.

A cette condition, l'équation (8) aura lieu pour toutes les valeurs de a dans l'intervalle $(0,1)$, y compris la valeur $a=1$, pourvu que le paramètre α soit assez petit en valeur absolue.

17. En présentant la fonction ξ sous la forme de la série

$$\xi = \xi_1 \alpha + \xi_2 \alpha^2 + \xi_3 \alpha^3 + \cdots.$$

nous avons vu au nº 12 que $a^2\xi_r$ sera une fonction entière des arguments

$$(9)\qquad a\sin\theta\cos\psi, \qquad a\sin\theta\sin\psi, \qquad a\cos\theta$$

de degré ne dépassant pas mr. A présent, en considérant l'équation (8), nous pouvons arriver, au sujet de ce degré, à une conclusion plus précise.

Formons, en partant de cette équation, les équations que doivent vérifier les ξ_r.

Substituons dans l'équation (8) l'expression ci-dessus de ξ et posons

$$\begin{aligned}
\eta &= \eta_1 \alpha + \eta_2 \alpha^2 + \eta_3 \alpha^3 + \cdots,\\
c &= c_1 \alpha + c_2 \alpha^2 + c_3 \alpha^3 + \cdots,\\
h &= h_1 \alpha + h_2 \alpha^2 + h_3 \alpha^3 + \cdots,\\
h' &= h'_1 \alpha + h'_2 \alpha^2 + h'_3 \alpha^3 + \cdots.
\end{aligned}$$

Alors, en égalant les coefficients des mêmes puissances de α, nous obtiendrons les équations suivantes:

$$Ra^2\xi_1 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi_1'\,d\sigma'}{D(a,1)} + h_1 + h'_1 a\sin\theta\cos\psi + \frac{\eta_1}{2\Delta} a^2\Theta + c_1 a^2.$$

$$(10)\qquad Ra^2\xi_2 = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi_2'\,d\sigma'}{D(a,1)} + h_2 + h'_2 a\sin\theta\cos\psi + \frac{\eta_2}{2\Delta} a^2\Theta + c_2 a^2$$
$$- c_1 a^2 \xi_1 + \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\int \frac{u^{\frac{5}{2}}\xi_1^2(\sqrt{u},\theta',\psi')\,d\sigma'}{D(a,\sqrt{u})}\right\}_{u=1}$$

et, en général, avec le symbole K_r du nº 9,

$$(11)\qquad Ra^2\xi_r = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi_r'\,d\sigma'}{D(a,1)} + h_r + h'_r a\sin\theta\cos\psi + \frac{\eta_r}{2\Delta} a^2\Theta + c_r a^2$$
$$- a^2 K_r c\xi + \sum_{n=2}^{n=r} \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1} K_r I_n(a,u)}{\partial u^{n-1}}\right\}_{u=1}.$$

A l'aide de ces équations et de certaines conditions, on pourrait déterminer, sans rien connaître préalablement, les fonctions ξ_r et toutes les constantes qui figurent dans ces équations. Mais ce n'est pas de cela que nous voulons nous occuper à présent.

Nous savons déjà que $a^2\xi_r$ est une fonction entière des arguments (9), et tout ce que nous voulons déterminer en ce moment c'est le degré de cette fonction ou, du moins, une limite supérieure que ce degré ne pourra jamais dépasser. C'est ce que nous ferons à l'aide des équations précédentes, en supposant que les fonctions ξ_r jouissent de toutes les propriétés qui ont été indiquées au n° 12.

18. En ce qui concerne $a^2\xi_1$, le degré de cette fonction sera précisément égal à m. On doit donc commencer par la recherche du degré de $a^2\xi_2$.

En se reportant à l'équation (10), on voit immédiatement que le premier terme du second membre sera de degré dépendant de celui de la fonction ξ_2, et que les degrés des autres termes, à l'exception du dernier, seront inférieurs ou égals à m, puisque m sera toujours plus grand que 2.

Voyons donc quel sera le degré du dernier terme.

Le produit

$$u^2\xi_1^2(\sqrt{u}, \theta', \psi')$$

représentera une fonction entière des arguments

$$(12) \qquad \sqrt{u}\sin\theta'\cos\psi', \qquad \sqrt{u}\sin\theta'\sin\psi', \qquad \sqrt{u}\cos\theta'$$

de degré $2m$, et cette fonction sera paire par rapport à chacun des trois arguments. Par suite, si l'on ordonne cette fonction suivant les puissances décroissantes de $\sqrt{u}$, elle sera de la forme

$$u^m H_{2m}(\sin\theta'\cos\psi', \cos\theta') + u^{m-1} H_{2m-2}(\sin\theta'\cos\psi', \cos\theta') + \cdots,$$

$H_n(x, y)$ désignant, d'une manière générale, une fonction entière de x et y de degré ne dépassant pas n, paire par rapport à y et paire ou impaire par rapport à x, selon que n est pair ou impair.

Or, d'après ce que nous avons vu au n° 9, l'intégrale

$$\int \frac{\sqrt{u}\, H_n(\sin\theta'\cos\psi', \cos\theta')}{D(a, \sqrt{u})}\, d\sigma',$$

en supposant $a < \sqrt{u}$, représentera une fonction entière des arguments

$$\frac{a}{\sqrt{u}}\sin\theta\cos\psi, \qquad \frac{a}{\sqrt{u}}\sin\theta\sin\psi, \qquad \frac{a}{\sqrt{u}}\cos\theta$$

de degré n, paire par rapport à chacun des deux derniers arguments et paire ou impaire par rapport au premier, selon que n est pair ou impair. Nous aurons donc, en ordonnant suivant les puissances décroissantes de $\frac{a}{\sqrt{u}}$, et en posant, pour abréger, $\sin\theta\cos\psi = s$, $\cos\theta = t$, $\sin\theta'\cos\psi' = s'$, $\cos\theta' = t'$,

$$\int \frac{\sqrt{u}\, H_n(s',t')}{D(a,\sqrt{u})} d\sigma' = \left(\frac{a}{\sqrt{u}}\right)^n G_n(s,t) + \left(\frac{a}{\sqrt{u}}\right)^{n-2} G_{n-2}(s,t) + \cdots,$$

$G_i(s,t)$ étant une fonction entière de la même nature que $H_i(s,t)$.

Cela posé, on aura pour l'intégrale

$$\int \frac{u^{\frac{5}{2}} \xi_1^2(\sqrt{u}, \theta', \psi')\, d\sigma'}{D(a,\sqrt{u})}$$

une expression de la forme

$$\begin{aligned} a^{2m} G_{2m}(s,t) &+ a^{2m-2} G_{2m-2}(s,t)\, u + a^{2m-4} G_{2m-4}(s,t)\, u^2 + \cdots \\ &+ a^{2m-2} G'_{2m-2}(s,t) \quad + a^{2m-4} G'_{2m-4}(s,t)\, u + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad + a^{2m-4} G''_{2m-4}(s,t) \quad + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots, \end{aligned}$$

$G_i'(s,t)$, $G_i''(s,t)$, ... étant des fonctions de la même nature que $G_i(s,t)$.

Donc la dérivée de cette intégrale par rapport à u sera une fonction entière des arguments (9) de degré au plus égal à $2m-2$. Il en sera donc aussi de même du terme en question de l'équation (10).

Or, s'il en est ainsi, l'équation (10), en y posant $a=1$, prendra la forme

$$R\xi_2 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi_2' d\sigma'}{D(1,1)} = H_{2m-2}(\sin\theta\cos\psi, \cos\theta),$$

et cette équation, qui est du type des équations étudiées dans le Travail *Sur les figures d'équilibre*, fait voir que ξ_2 sera une fonction entière des arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré ne dépassant pas $2m-2$.

Donc l'intégrale

$$\int \frac{\xi_2' d\sigma'}{D(a,1)}$$

et, par suite, la fonction $a^2\xi_2$ seront, par rapport aux arguments (9), de degré au plus égal à $2m-2$.

Les nombres m et $2m-2$, qui se rapportent aux fonctions $a^2\xi_1$ et $a^2\xi_2$, s'obtiennent en faisant dans la formule $(m-2)i+2$ respectivement

$i = 1$ et $i = 2$, et nous allons maintenant montrer que cette formule donne une limite supérieure pour le degré de la fonction $a^2\xi_i$, quel que soit i.

Pour cela, supposons qu'il en soit ainsi pour toutes les valeurs de i qui sont inférieures à un nombre r et voyons quel sera le degré de $a^2\xi_r$.

Reportons-nous donc à l'équation (11) et examinons les termes du second membre.

En laissant d'abord de côté le premier terme, dont le degré dépend du degré de ξ_r, on voit que l'expression

$$h_r + h_r' a \sin\theta \cos\psi + \frac{\eta_r}{2\Delta} a^2 \Theta + c_r a^2 - \mathrm{K}_r c a^2 \xi,$$

où

$$\mathrm{K}_r c a^2 \xi = c_1 a^2 \xi_{r-1} + c_2 a^2 \xi_{r-2} + \cdots + c_{r-1} a^2 \xi_1,$$

représentera, dans l'hypothèse admise, une fonction entière des arguments (9) de degré ne dépassant pas $(m-2)(r-1)+2$. Il ne reste donc à examiner que les termes de la somme

$$\sum_{n=2}^{n=r} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^{n-1} \mathrm{K}_r I_n(a, u)}{\partial u^{n-1}} \right\}_{u=1}. \tag{13}$$

On a, d'après la formule (7),

$$\mathrm{K}_r I_n(a, u) = \frac{\sqrt{u}}{4\pi} \int \frac{\mathrm{K}_r u^n \xi^n (\sqrt{u}, \theta', \psi')}{D(a, \sqrt{u})} d\sigma',$$

et l'expression $\mathrm{K}_r u^n \xi^n (\sqrt{u}, \theta', \psi')$ représentera une fonction entière des arguments (12) de degré ne dépassant pas $(m-2)r + 2n$, laquelle fonction, tout en étant paire par rapport à chacun des deux derniers arguments, sera paire ou impaire par rapport à $\sqrt{u} \sin\theta' \cos\psi'$, selon que mr est un nombre pair ou impair. Donc, en posant, pour abréger,

$$(m-2)r + 2n = N$$

et en ordonnant cette fonction d'après les puissances décroissantes de $\sqrt{u}$, on aura une expression de la forme

$$u^{\frac{N}{2}} H_N(\sin\theta'\cos\psi', \cos\theta') + u^{\frac{N}{2}-1} H_{N-2}(\sin\theta'\cos\psi', \cos\theta') + \cdots.$$

On en conclut que $\mathrm{K}_r I_n(a, u)$ sera de la forme

$$\begin{aligned} a^N G_N(s,t) &+ a^{N-2} G_{N-2}(s,t)\, u + a^{N-4} G_{N-4}(s,t)\, u^2 + \cdots \\ &+ a^{N-2} G'_{N-2}(s,t) \quad + a^{N-4} G'_{N-4}(s,t)\, u + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\quad + a^{N-4} G''_{N-4}(s,t) \quad + \cdots \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + \cdots, \end{aligned}$$

ce qui représente une fonction entière de u où le coefficient de u^i est une fonction entière des arguments (9) de degré au plus égal à $N - 2i$.

De là on voit que la dérivée

$$\frac{\partial^{n-1} K_r I_n(a, u)}{\partial u^{n-1}}$$

sera, par rapport aux arguments (9), de degré au plus égal à

$$N - 2n + 2 = (m-2)r + 2,$$

et il en sera, par suite, aussi de même de la somme (13).

D'après tout cela, si l'on pose dans l'équation (11) $a = 1$, elle deviendra de la forme

$$R\xi_r - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\xi_r' \, d\sigma'}{D(1,1)} = H_{(m-2)r+2}(\sin\theta\cos\psi, \cos\theta).$$

Donc ξ_r sera une fonction entière des arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré ne dépassant pas $(m-2)r+2$, et, s'il en est ainsi, l'équation (11) fait voir que $a^2\xi_r$ sera une fonction entière des arguments (9) de degré au plus égal à $(m-2)r+2$.

Par suite, le nombre $(m-2)r+2$ représente une limite supérieure du degré de $a^2\xi_r$, quel que soit r.

19. Voyons maintenant ce qu'on peut conclure de ce qui précède au sujet des fonctions ζ_r.

D'après (4) on a

$$\zeta_r = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{n=r} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} K_r a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-1}}$$

et, de ce que nous venons de montrer, il résulte que $K_r a^{2n} \xi^n$ sera une fonction entière des arguments (9) de degré ne dépassant pas $(m-2)r+2n$. Cette fonction n'aura pas d'ailleurs de termes au-dessous du degré $2n$.

Par suite, il viendra

$$\frac{1}{n!}\frac{1}{a^2}\frac{\partial^{n-1} K_r a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-1}} = \frac{\Pi_n}{a^{2n}},$$

où Π_n représente encore une fonction entière des arguments (9), dont le degré ne dépasse pas $(m-2)r+2n$, et qui ne renferme pas de termes au-dessous du degré $2n$.

Il est difficile de décider en général si le degré de Π_n est égal ou s'il est inférieur à sa limite $(m-2)r+2n$. Mais, dans le cas de $n = r$, ce

degré sera certainement égal à cette limite, qui se réduira alors à mr. En effet,

$$\Pi_r = \frac{a^{2r-2}}{r!} \frac{\partial^{r-1} a^{2r} \xi_1^r}{\partial (a^2)^{r-1}}$$

et $a^2 \xi_1$ est précisément de degré m par rapport aux arguments (9).

D'ailleurs ξ_1, qui n'est autre chose que ζ_1, se réduira, pour $a=1$, à $\bar{\zeta}_1$, qui représente une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré précisément égal à m. Par suite, Π_r, présenté sous la forme d'une fonction entière des arguments

$$(14) \qquad a, \qquad \sin\theta\cos\psi, \qquad \cos\theta,$$

sera, par rapport aux deux derniers arguments, encore de degré mr.

On en conclut que

$$a^{2r}\zeta_r = a^{2r-2}\Pi_1 + a^{2r-4}\Pi_2 + \cdots + a^2\Pi_{r-1} + \Pi_r$$

sera une fonction entière des arguments (9) de degré mr et que ζ_r se réduira à une fonction entière des arguments (14) de degré $(m-2)r$ par rapport à a et de degré mr par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$.

Il est d'ailleurs facile d'obtenir l'ensemble des termes de ζ_r qui sont, par rapport à ces derniers arguments, de degré mr.

En effet, ces termes ne peuvent provenir que de l'expression

$$\frac{\Pi_r}{a^{2r}} = \frac{1}{r!} \frac{1}{a^2} \frac{\partial^{r-1} a^{2r} \xi_1^r}{\partial (a^2)^{r-1}},$$

et ils s'en déduiront en remplaçant ξ_1 par l'ensemble des termes de cette fonction qui sont, par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, de degré m.

Or cet ensemble sera de la forme

$$a^{m-2} v(\sin\theta\cos\psi, \cos\theta),$$

v étant une fonction entière et homogène des deux arguments indiqués de degré m.

Donc l'ensemble des termes de ζ_r qui sont de degré mr par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ se représentera par l'expression

$$\frac{1}{r!} \frac{v^r}{a^2} \frac{\partial^{r-1} a^{mr}}{\partial (a^2)^{r-1}} = \frac{mr(mr-2)(mr-4)\ldots(mr-2r+4)}{4.6.8\ldots 2r} a^{(m-2)r} v^r.$$

Dans le cas de $a=1$, cette formule a déjà été signalée dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (page 91).

Du reste on peut aller dans cette voie aussi loin qu'on veut.

Supposons que toutes les fonctions considérées soient exprimées à l'aide

des arguments (14) et, en parlant des degrés de leurs termes, entendons par là les degrés par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$.

Cela posé, comme la connaissance de ξ_1 permet de déterminer, pour la fonction ζ_r, quel que soit r, tous les termes de degré mr, de même la connaissance de ξ_1 et ξ_2 permettra de déterminer tous les termes de cette fonction qui sont des degrés mr et $mr-2$, et, en général, la connaissance des fonctions

(15) $$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_s$$

permettra de déterminer tous les termes de ζ_r qui sont des degrés

$$mr, \quad mr-2, \quad \ldots, \quad mr-2s+2.$$

En effet, comme les degrés des fonctions

$$\Pi_1, \qquad \Pi_2, \qquad \ldots, \qquad \Pi_{r-s}$$

(en supposant $r > s$) sont inférieurs à ces nombres, tous les termes en question s'obtiendront en considérant l'expression

$$\frac{1}{a^2}\sum_{n=r-s+1}^{n=r}\frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}\mathrm{K}_r a^{2n}\xi^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

laquelle ne dépend évidemment que des fonctions (15).

De cette façon, ξ_1 et ξ_2 étant connus, si l'on veut déterminer, pour $r > 2$, tous les termes de ζ_r qui sont des degrés mr et $mr-2$, il suffira de considérer l'expression

$$\frac{1}{(r-2)!}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^{r-2}a^{2r-2}\xi_1^{\,r-2}\xi_2}{\partial(a^2)^{r-2}}+\frac{1}{r!}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^{r-1}a^{2r}\xi_1^{\,r}}{\partial(a^2)^{r-1}}.$$

Remarquons que, pour le calcul des ζ_r, quand les ξ_r sont connus, on peut se servir, avec la même simplicité, de la formule (5).

En effet, comme cette formule, que l'on peut écrire

$$\zeta-\xi=\frac{1}{a^2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}a^{2n}\zeta^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

donne

(16) $$\zeta_r-\xi_r=\frac{1}{a^2}\sum_{n=2}^{n=r}\frac{(-1)^n}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}\mathrm{K}_r a^{2n}\zeta^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

où le second membre ne dépend que des fonctions

$$\zeta_1, \qquad \zeta_2, \qquad \ldots, \qquad \zeta_{r-1};$$

elle permettra de calculer successivement tous les ζ_r en partant de $\zeta_1=\xi_1$.

On voit que, si l'on ne veut déterminer, pour ζ_r, que les termes des degrés

$$mr, \qquad mr-2, \qquad \ldots, \qquad mr-2r+4,$$

on les obtiendra tous par la seule considération de l'expression qui se trouve au second membre de l'égalité (16). De cette façon, en voulant, par exemple, déterminer tous les termes de ζ_3 qui sont des degrés $3m$ et $3m-2$, on pourra se borner à la considération de la formule

$$\frac{1}{2a^3}\frac{\partial a^4\zeta_1\zeta_2}{\partial a}-\frac{1}{24a^3}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a^6\zeta_1^3}{\partial a}\right).$$

20. Nous allons maintenant former les équations des surfaces de niveau en coordonnées rectangulaires x, y, z.

Reportons-nous, pour cela, aux équations (5) du n° 4, où nous poserons, pour abréger,

$$\beta\sqrt{\rho+1}=\lambda,$$

en sorte qu'elles s'écriront

$$(17)\qquad \begin{cases} x=a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi+\lambda,\\ y=a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi,\\ z=a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta.\end{cases}$$

En posant, comme au n° 15,

$$a\sqrt{1+\zeta}=v,$$

on aura, d'après l'équation (2),

$$v^2-v^2\xi(v)=a^2,$$

et l'on sait que $v^2\xi(v)$ est une fonction analytique uniforme des arguments

$$v\sin\theta\cos\psi, \qquad v\sin\theta\sin\psi, \qquad v\cos\theta.$$

Donc, en désignant cette fonction par $\Phi(v\sin\theta\cos\psi,\, v\sin\theta\sin\psi,\, v\cos\theta)$, on aura

$$v^2-\Phi(v\sin\theta\cos\psi,\, v\sin\theta\sin\psi,\, v\cos\theta)=a^2,$$

ce qui, en vertu des équations (17), prend la forme

$$(18)\qquad \frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}-\Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\rho+1}},\frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)=a^2.$$

Telle sera donc l'équation de la famille des surfaces de niveau qui se trouvent à l'intérieur de la figure d'équilibre.

Quant à la fonction Φ qui figure dans cette équation, si l'on pose

$$v^2 \zeta_i(v) = \Phi_i(v \sin\theta \cos\psi,\ v \sin\theta \sin\psi,\ v \cos\theta),$$

on aura

$$\Phi\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\rho+1}}, \frac{y}{\sqrt{\rho+q}}, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Phi_i\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\rho+1}}, \frac{y}{\sqrt{\rho+q}}, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right),$$

où les coefficients des puissances de α seront des fonctions entières des arguments indiqués, le degré de Φ_i étant au plus égal à $(m-2)i+2$. Toutes ces fonctions seront paires par rapport à y et par rapport à z, et, pour ce qui concerne l'argument $x-\lambda$, Φ_i en sera une fonction paire ou impaire, selon que mi est pair ou impair. Enfin ces fonctions ne renfermeront pas de termes au-dessous du deuxième degré, en sorte que, si mi est impair, Φ_i ne contiendra pas de termes au-dessous du troisième degré.

Tant que $x-\lambda$, y, z sont assez petits en valeurs absolues, la fonction Φ pourra être développée suivant les puissances entières et positives de ces trois arguments. D'ailleurs on pourra rendre $|\alpha|$ assez petit pour que cette représentation de Φ soit valable dans un domaine aussi large qu'on veut.

D'après ce que nous venons de dire, ce développement de Φ ne contiendra pas de termes au-dessous du second degré et, quant aux termes de ce degré, leur ensemble sera de la forme

$$L\frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1} + M\frac{y^2}{\rho+q} + N\frac{z^2}{\rho},$$

où L, M, N sont des constantes dépendant de α et s'annulant pour $\alpha=0$. Ces constantes se représenteront d'ailleurs par des séries procédant suivant les puissances entières et positives de α, lesquelles séries, dans le cas de m impair, ne contiendront que des puissances paires de α.

Les surfaces de niveau considérées sont des surfaces fermées convexes qui deviennent de plus en plus petites, à mesure que a décroît. Voyons ce qu'elles sont pour a infiniment petit.

Quand a tend vers zéro, $x-\lambda$, y et z tendent encore vers zéro et, a étant infiniment petit, représentent des infiniment petites du même ordre.

Par suite, en négligeant les termes d'ordre plus élevé que celui de a^2, l'équation (18) deviendra

$$(1-L)\frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1} + (1-M)\frac{y^2}{\rho+q} + (1-N)\frac{z^2}{\rho} = a^2,$$

ce qui représente un ellipsoïde, ayant pour demi-axes

$$\frac{a\sqrt{\rho+1}}{\sqrt{1-L}}; \quad \frac{a\sqrt{\rho+q}}{\sqrt{1-M}}; \quad \frac{a\sqrt{\rho}}{\sqrt{1-N}}.$$

Cet ellipsoïde a les mêmes directions des axes que l'ellipsoïde E_0, mais il ne lui est pas concentrique en général et a, pour centre, le point de l'axe des x où $x = \lambda$.

Du reste, dans le cas de m pair, on aura $\lambda = 0$, et l'ellipsoïde précédent sera concentrique avec E_0. Il en sera aussi de même dans le cas de m impair, si E_0 est un ellipsoïde de révolution et si l'équation caractéristique $T_{m,2k} = 0$ correspond à une valeur de k plus grande que 1.

21. Nous avons obtenu l'équation de la famille de surfaces de niveau sous la forme résolue par rapport à a^2.

Parmi les autres formes de cette équation, méritent d'être signalées les deux suivantes:

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1} + \frac{y^2}{\rho+q} + \frac{z^2}{\rho} = a^2 + Z(x-\lambda,\ z,\ a), \tag{19}$$

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1} + \frac{y^2}{\rho+q} + \frac{z^2}{\rho} = a^2 + Y(x-\lambda,\ y,\ a), \tag{20}$$

où Z et Y sont des fonctions analytiques uniformes des arguments indiqués et du paramètre α, données par des séries de la forme

$$Z(x-\lambda,\ z,\ a) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i Z_i(x-\lambda,\ z,\ a),$$

$$Y(x-\lambda,\ y,\ a) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i Y_i(x-\lambda,\ y,\ a).$$

Voyons ce que représenteront, dans ces séries, les coefficients Z_i et Y_i.

Comme la fonction entière

$$\Phi_i\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\rho+1}},\ \frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\ \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)$$

est, par rapport à chacun des deux derniers arguments, paire, on peut la présenter, en posant, pour abréger,

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\rho+1} + \frac{y^2}{\rho+q} + \frac{z^2}{\rho} = v^2,$$

comme une fonction entière soit des arguments $x-\lambda$, z, v, soit des arguments $x-\lambda$, y, v, paire par rapport à v.

En nous arrêtant à la première représentation, posons

$$\Phi_i\left(\frac{x-\lambda}{\sqrt{\rho+1}}, \frac{y}{\sqrt{\rho+q}}, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right) = \varphi_i(x-\lambda, z, v).$$

Alors φ_i sera une fonction entière de $x-\lambda$, z, v de degré au plus égal à $(m-2)i+2$, et cette fonction, tout en étant paire tant par rapport à v que par rapport à z, sera paire ou impaire par rapport à $x-\lambda$, selon que mi est pair ou impair.

Avec ces notations, l'équation (18) s'écrira

$$v^2 - \sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \varphi_i(x-\lambda, z, v) = a^2$$

et, pour la réduire à la forme (19), il n'y aura qu'à la résoudre par rapport à v^2.

Faisons-le à l'aide de la formule de Lagrange.

En posant

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \varphi_i(x-\lambda, z, v) = \varphi(v),$$

nous aurons alors

$$v^2 = a^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} \varphi^n(a)}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

où $\varphi^n(a) = [\varphi(a)]^n$ et les dérivées sont prises par rapport à a^2.

Par suite, il viendra

$$Z(x-\lambda, z, a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} \varphi^n(a)}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

d'où l'on tire

$$Z_i(x-\lambda, z, a) = \sum_{n=1}^{n=i} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} \mathrm{K}_i \varphi^n(a)}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

Or, de ce que nous savons au sujet des fonctions $\varphi_i(x-\lambda, z, a)$, il résulte que $\mathrm{K}_i\varphi^n(a)$ sera une fonction entière des arguments $x-\lambda$, z, a de degré au plus égal à $(m-2)i+2n$. Donc, comme ce sera une fonction paire de a, la dérivée

$$\frac{\partial^{n-1} \mathrm{K}_i \varphi^n(a)}{\partial(a^2)^{n-1}}$$

représentera une fonction entière des mêmes arguments de degré ne dépassant pas $(m-2)i+2$.

On voit donc que $Z_i(x-\lambda, z, a)$ représentera une fonction entière des trois arguments indiqués de degré au plus égal à $(m-2)i+2$, que cette fonction n'aura pas de termes au-dessous du second degré, qu'elle sera paire tant par rapport à a que par rapport à z et qu'elle sera paire ou impaire par rapport à $x-\lambda$, selon que mi est un nombre pair ou impair.

En considérant la transformée (20), on parviendra, au sujet des fonctions $Y_i(x-\lambda, y, a)$, aux mêmes conclusions, le rôle de z étant remplacé par y.

Dans le cas de m pair, on aura, pour l'équation des surfaces de niveau, encore une troisième forme analogue à celles (19) et (20). Comme alors λ se réduira à zéro, cette forme sera

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=a^2+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i X_i(y, z, a),$$

$X_i(y, z, a)$ étant une fonction entière de y, z, a de degré ne dépassant pas $(m-2)i+2$, paire par rapport à chacun des trois arguments.

22. Si m est un nombre impair, λ pourra ne pas être nul et alors ce sera une fonction de α, définie par une série de la forme

$$\lambda=\lambda_1\alpha+\lambda_3\alpha^3+\lambda_5\alpha^5+\cdots$$

où il n'y aura que des puissances impaires de α (nº 6).

On peut se proposer alors de développer tous les termes des équations (18), (19) et (20) suivant les puissances de α.

Supposons donc qu'on ait effectué ce développement et qu'on ait ordonné ensuite les termes d'après les puissances croissantes de α.

Ces équations prendront alors la forme

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=a^2+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\bar{\Phi}_i\left(\frac{x}{\sqrt{\rho+1}}, \frac{y}{\sqrt{\rho+q}}, \frac{z}{\sqrt{\rho}}\right),$$

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=a^2+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\bar{Z}_i(x, z, a),$$

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=a^2+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\bar{Y}_i(x, y, a),$$

où $\overline{\Phi}_i$, $\overline{Z}_i$, $\overline{Y}_i$ seront évidemment des fonctions entières de leurs arguments de degré ne dépassant pas, comme précédemment, le nombre $(m-2)i+2$, et ces fonctions seront paires tant par rapport à a, que par rapport à y et à z. Quant à l'argument x, elles en seront des fonctions paires ou impaires, selon que i est pair ou impair. En effet, λ ne contenant que des puissances impaires de α, les équations (18), (19) et (20) ne changeront pas si l'on y remplace α par $-\alpha$ et x par $-x$. Donc les équations que nous venons d'écrire doivent posséder la même propriété.

De cette façon les fonctions $\overline{\Phi}_i$, $\overline{Z}_i$, $\overline{Y}_i$ jouiront de toutes les propriétés des fonctions Φ_i, Z_i, Y_i dans le cas de $\lambda=0$, à la seule exception de ce que ces dernières fonctions n'avaient pas de termes au-dessous du deuxième degré, tandis que les fonctions $\overline{\Phi}_i$, $\overline{Z}_i$, $\overline{Y}_i$ pourront en avoir, si i est impair, un terme en x et, si i est pair, un terme constant.

En posant, dans les équations précédentes, $a=1$, on obtiendra, sous telle ou telle forme, l'équation de la surface de la figure d'équilibre.

Ainsi, en écrivant $Z_i(x,z)$ au lieu de $\overline{Z}_i(x,z,1)$, on aura par exemple, pour cette surface, une équation de la forme

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=1+\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i Z_i(x,z),$$

à laquelle nous sommes arrivés par une autre voie dans le Mémoire *Sur les équations qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre etc.*

On voit que la méthode actuelle a l'avantage de conduire à une conclusion plus précise au sujet du degré des fonctions $Z_i(x,z)$, car, dans le Mémoire cité, nous avons pu seulement conclure que le degré de $Z_i(x,z)$ ne dépassera pas le nombre mi, tandis que maintenant nous savons que ce degré sera au plus égal à $(m-2)i+2$.

23. Dans ce qui précède, nous avons supposé que la figure d'équilibre soit déjà connue et nous nous sommes seulement occupé de la recherche des surfaces de niveau qui lui correspondent à l'intérieur du liquide. Mais les considérations dont nous nous sommes servi conduisent naturellement à une nouvelle méthode pour la recherche des figures mêmes d'équilibre.

Cette méthode, à laquelle nous avons déjà fait allusion au n° 17, consiste à commencer par le calcul des fonctions ξ_r pour en déduire ensuite les ζ_r.

Quant au calcul des ξ_r, nous avons donné au n° 17 les équations qui permettent de le faire successivement pour $r=1, 2, 3, \ldots$, en considérant chaque équation, d'abord, pour $a=1$ et puis, pour une valeur quelconque

de a entre 0 et 1, et ces équations permettront aussi de calculer toutes les constantes qui y figurent, pourvu que l'on s'arrête à un choix déterminé du paramètre α et que l'on fasse une hypothèse déterminée au sujet du volume de la figure d'équilibre.

Cependant quelques détails des calculs devraient être examinés de plus près. Mais nous ne nous arrêterons pas, pour cela, aux équations du n° 17, puisque, dans la recherche actuelle, ces équations pourront être remplacées par des équations plus simples que nous allons former aussitôt.

Tout d'abord, lorsqu'il ne s'agit de déterminer que la surface d'une figure d'équilibre, on peut se borner à la considération des surfaces de niveau aussi voisines de cette surface qu'on veut. En d'autres termes, on peut ne considérer, pour a, que des valeurs aussi peu différentes de 1 qu'on veut.

Or s'il en est ainsi, il n'est pas nécessaire de présenter les équations des surfaces de niveau sous la forme admise précédemment et, au lieu des équations (5) du n° 4, on peut admettre, dans tous les cas, les équations

$$(21)\qquad \begin{cases} x = a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+1}\,\sin\theta\cos\psi, \\ y = a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho+q}\,\sin\theta\sin\psi, \\ z = a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho}\,\cos\theta, \end{cases}$$

auxquelles celles-là se réduisent dans le cas de m pair.

D'autre part, on pourra simplifier les calculs en prenant, pour figure de comparaison, au lieu de l'ellipsoïde E_0, pour lequel $T_{m,2k}=0$, un ellipsoïde variable E, correspondant à la même vitesse angulaire que la figure d'équilibre cherchée, et pour lequel $T_{m,2k}$ est une fonction de η tendant vers zéro pour $\eta=0$. D'ailleurs, en procédant ainsi, on pourra utiliser certains résultats qui ont été obtenus dans le Travail *Sur les figures d'équilibre,* ce qui simplifiera l'exposition.

Cela posé, venons à la formation des équations dont nous nous servirons.

24. Nous allons maintenant supposer que les quantités

$$\sqrt{\rho+1},\qquad \sqrt{\rho+q},\qquad \sqrt{\rho}$$

représentent les demi-axes non pas de l'ellipsoïde E_0, mais de l'ellipsoïde E dont nous venons de parler. Quant aux demi-axes de l'ellipsoïde E_0, nous les désignerons par

$$\sqrt{\rho_0+1},\qquad \sqrt{\rho_0+q_0},\qquad \sqrt{\rho_0}.$$

De cette façon ρ et q seront des fonctions déterminées de η, tendant vers ρ_0 et q_0 pour $\eta = 0$. Ces fonctions, qui seront définies par les équations connues de la théorie des figures ellipsoïdales d'équilibre, seront d'ailleurs développables, $|\eta|$ étant assez petit, suivant les puissances entières et positives de η.

Cela étant, nous représenterons les surfaces de niveau par les équations (21), en supposant, comme auparavant, que, pour la surface de la figure d'équilibre, on ait $a = 1$ et que les valeurs de a plus petites que 1 correspondent à des surfaces de niveau intérieures à cette figure. Mais nous ne considérerons que des valeurs de a suffisamment peu différentes de 1.

Nous définirons ensuite le paramètre α, comme nous l'avons fait dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre*, par la formule

$$\alpha^2 = \int \bar{\zeta}^2 \, d\tau,$$

où $\bar{\zeta}$ est la valeur de ζ pour $a = 1$, et, pour ce qui concerne le volume de la figure d'équilibre, nous le supposerons être égal au volume de l'ellipsoïde E.

Pour les figures d'équilibre, α sera une fonction de η. Mais nous allons considérer un problème plus général que la recherche de ces figures, où l'on pourra envisager α comme un paramètre indépendant de η.

Pour cela, au lieu de l'équation

$$U + \Omega(x^2 + y^2) = \text{fonction de } a,$$

nous partirons d'une équation plus générale, savoir

$$(22) \qquad U + \Omega(x^2 + y^2) - \mathrm{K}\left(\frac{x^2}{\rho + 1} + \frac{y^2}{\rho + q} + \frac{z^2}{\rho}\right) = \text{fonction de } a,$$

où K est une constante inconnue que l'on suppose indépendante de a.

A l'aide de cette équation, on pourra déterminer la fonction ζ et la constante K en fonction du paramètre α. En posant ensuite $\mathrm{K} = 0$, on aura la relation entre α et η qui correspond à la série considérée de figures d'équilibre.

Passons donc à la transformation de l'équation (22).

25. Reportons-nous au n° 4 et observons que maintenant, au lieu de l'égalité

$$U_0 + \Omega_0 a^2 \Theta = 2\Delta(C - R a^2),$$

que nous y avions en supposant $a < 1$, nous aurons celle-ci:

$$U_0 + \Omega a^2 \Theta = 2\Delta(C - R a^2).$$

Par suite, en remarquant que, d'après les équations (21), on a

$$\frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}=a^2(1+\zeta)$$

et en posant

$$\frac{K}{2\Delta}=L,$$

nous parviendrons, au lieu de l'équation (8) du numéro cité, à la suivante:

$$(23)\qquad (R+L)a^2\zeta=C\zeta+S+f(a),$$

où S aura la même expression qu'auparavant.

Pour $a=1$, cette équation se réduit à celle que nous avons étudiée dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (n^{os} 8—13, 22—25), où nous avons montré comment on peut déterminer la fonction $\bar\zeta$ et les constantes L et $f(1)$ sous la forme des séries

$$\begin{aligned}\bar\zeta&= \qquad+\bar\zeta_1\alpha+\bar\zeta_2\alpha^2+\bar\zeta_3\alpha^3+\ldots,\\ L&=L_0+L_1\alpha+L_2\alpha^2+L_3\alpha^3+\ldots,\\ f(1)&= \qquad+f_1\alpha+f_2\alpha^2+f_3\alpha^3+\ldots.\end{aligned}$$

Nous y avons vu que, dans les hypothèses admises, $\bar\zeta$ étant une fonction paire de ψ et de $\cos\theta$, les coefficients de ces séries seront parfaitement déterminés, pourvu que l'on choisisse L_0 d'une manière déterminée. Quant au coefficient L_0, bien qu'il ne puisse être entièrement arbitraire, on peut néanmoins le choisir d'une infinité de manières différentes, sans que le problème généralisé cesse d'être possible. Mais, pour que ce problème puisse conduire aux figures d'équilibre, il faudra nécessairement prendre

$$L_0=-T_{m,\,2k}.$$

Ajoutons que, dans les conditions considérées, les fonctions $\bar\zeta_r$, qui seront des polynomes entiers en $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$, jouiront de toutes les propriétés des fonctions $\bar\zeta_r$ du n^0 1, et que les séries précédentes seront absolument convergentes, tant que $|\alpha|$ est assez petit.

En passant ensuite au cas de $a<1$, on devra d'abord faire une hypothèse convenable au sujet de la fonction $f(a)$.

Nous avons posé précédemment

$$f(a)=f(1)a^2+f(0)(1-a^2),$$

et cette formule peut être admise aussi dans la recherche actuelle. Mais à présent on ne pourra plus disposer de $f(0)$ de manière que la fonction ζ soit

finie pour $a = 0$, ce qui du reste ne doit pas nous préoccuper ici, puisque nous ne considérerons que des valeurs de a peu différentes de 1. D'autre part, la fonction $\bar{\zeta}$ et la constante L, qui seules nous intéressent à présent, ne dépendent point de $f(0)$. On pourra donc disposer de $f(0)$ d'une manière arbitraire, et, pour simplifier l'analyse autant que possible, nous prendrons $f(0) = f(1)$, en sorte que $f(a)$ se réduira à une constante que nous designerons simplement par f.

Cela posé, si nous assujettissons a à être compris entre 1 et une fraction fixe a_0, l'équation (23) permettra de conclure que, $|\alpha|$ étant assez petit, la fonction ζ satisfera aux conditions (18) du n° 8, où l et g pourront être supposés aussi petits qu'on veut.

Or, s'il en est ainsi, toutes les conclusions des n^{os} 8 et 9 seront applicables, et nous pourrons remplacer dans l'équation (23) la fonction $C\zeta + S$ par une certaine fonction analytique des arguments

$$a\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\cos\psi, \qquad a\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\sin\psi, \qquad a\sqrt{1+\zeta}\cos\theta$$

et du paramètre α, laquelle fonction, ne mettant en évidence que l'argument $a\sqrt{1+\zeta}$, sera désignée par $J(a\sqrt{1+\zeta})$. On aura d'ailleurs, comme auparavant, pour $v \leqq 1$,

$$J(v) = \frac{1}{4\pi}\int d\sigma' \int_1^{1+\bar{\zeta}'} \frac{\sqrt{u}\,du}{D(v, \sqrt{u})}.$$

D'après cela, l'équation (23) prendra la forme

$$(R + L)a^2\zeta = J(a\sqrt{1+\zeta}) + f.$$

Par suite, si nous introduisons une fonction auxiliaire $\xi = \xi(a)$, définie par la formule

$$\xi = \frac{J(a) + f}{(R + L)a^2}, \tag{24}$$

cette équation deviendra

$$\zeta = (1 + \zeta)\xi(a\sqrt{1+\zeta}).$$

Elle coïncidera donc avec l'équation (1).

Quant à la formule (24), on la réduira, en y appliquant la transformation du n° 16, à

$$(R + L)a^2\xi = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\zeta}'\,d\sigma'}{D(a, 1)} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!}\left\{\frac{\partial^{n-1} I_n(a, u)}{\partial u^{n-1}}\right\}_{u=1} + f, \tag{25}$$

où $I_n(a, u)$ sera donné, comme auparavant, par la formule (7).

De cette façon nous sommes arrvés à l'équation qui pourra servir à déterminer directement la fonction ξ.

26. Avant d'aller plus loin, voyons à quoi se réduira la formule

(26) $$\int \zeta^2 \, d\sigma = \alpha^2$$

en y introduisant, au lieu de ζ, la fonction ξ.

On doit exprimer ζ^2 à l'aide de ξ.

D'après ce que nous avons vu au n° 15, v^2 étant la racine de l'équation

(27) $$v^2 - v^2 \xi(v) = a^2$$

se réduisant à a^2 pour $\alpha = 0$, il viendra

$$\zeta = \frac{v^2 - a^2}{a^2}.$$

La question se réduit donc à exprimer en fonction de a, d'après l'équation précédente, la fonction

$$\zeta^2 = \left(\frac{v^2 - a^2}{a^2}\right)^2,$$

ce qu'on peut faire à l'aide de la formule de Lagrange qui donnera

$$\zeta^2 = \frac{2}{a^4} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left\{ \frac{\partial^{n-1}(v^2 - a^2) v^{2n} \xi^n(v)}{\partial (v^2)^{n-1}} \right\}_{v=a}.$$

On peut d'ailleurs simplifier cette formule, en remarquant que

$$\left\{ \frac{\partial^{n-1}(v^2 - a^2) v^{2n} \xi^n(v)}{\partial (v^2)^{n-1}} \right\}_{v=a} = (n-1) \frac{\partial^{n-2} a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-2}}.$$

On aura donc, le terme correspondant à $n = 2$ étant écrit à part,

$$\zeta^2 = \xi^2 + \frac{2}{a^4} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \frac{\partial^{n-2} a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-2}}.$$

Par suite, la formule (26) prendra la forme

(28) $$\int \xi^2 \, d\sigma + 2 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{n-1}{n!} \int \left\{ \frac{\partial^{n-2} a^{2n} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-2}} \right\}_{a=1} d\sigma = \alpha^2.$$

Nous devons encore exprimer à l'aide de la fonction ξ la condition que le volume de la figure cherchée soit égal au volume de l'ellipsoïde E.

Cette condition étant

$$\int \left[(1+\zeta)^{\frac{3}{2}} - 1 \right] d\sigma = 0,$$

la question se réduit à exprimer en fonction de a, d'après l'équation (27), la fonction

$$a^3(1+\zeta)^{\frac{3}{2}} - a^3 = v^3 - a^3,$$

ce qui, en appliquant la formule de Lagrange, donnera

$$a^3(1+\zeta)^{\frac{3}{2}} - a^3 = \frac{3}{2}\, a^3 \xi + \frac{3}{2} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^{n-1} a^{2n+1} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-1}}.$$

Donc la condition considérée prendra la forme

$$(29) \qquad \int \xi \, d\sigma = - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \int \left\{ \frac{\partial^{n-1} a^{2n+1} \xi^n}{\partial (a^2)^{n-1}} \right\}_{a=1} d\sigma.$$

27. Revenant à l'équation (25), posons-y

$$\xi = \xi_1 \alpha + \xi_2 \alpha^2 + \xi_3 \alpha^3 + \ldots,$$
$$L + T = L_1 \alpha + L_2 \alpha^2 + L_3 \alpha^3 + \ldots.$$
$$f = f_1 \alpha + f_2 \alpha^2 + f_3 \alpha^3 + \ldots,$$

où T est écrit au lieu de $T_{m,2k}$, et développons tous les termes suivant les puissances de α.

Alors, en exprimant que cette équation doit être vérifiée indépendamment de la valeur de α, nous obtiendrons, en premier lieu, l'équation

$$(30) \qquad (R - T)\, a^2 \xi_1 = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi_1' \, d\sigma'}{D(a, 1)} + f_1$$

et puis, une suite indéfinie d'équations de la forme

$$(31) \qquad (R - T)\, a^2 \xi_r = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\xi_r' \, d\sigma'}{D(a, 1)} - a^2 \sum_{i=1}^{r-1} L_{r-i} \xi_i + f_r + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i!} \left\{ \frac{\partial^{i-1} K_r I_i(a, u)}{\partial u^{i-1}} \right\}_{u=1}.$$

en faisant successivement $r = 2, 3, 4, \ldots$.

En posant dans ces équations $a = 1$, et en désignant $D(1, 1)$ simplement par D, nous aurons

(32) $$(R - T)\bar{\xi}_1 - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\xi}_1' d\sigma'}{D} = f_1$$

et, pour $r = 2, 3, 4, \ldots,$

(33) $$(R - T)\bar{\xi}_r - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\bar{\xi}_r' d\sigma'}{D} = f_r - \sum_{i=1}^{r-1} L_{r-i}\bar{\xi}_i + \sum_{i=2}^{r} \frac{1}{i!}\left\{\frac{\partial^{i-1} K_r I_i(1, u)}{\partial u^{i-1}}\right\}_{u=1},$$

où le second membre ne dépend que des fonctions

(34) $$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_{r-1}.$$

Toutefois ces fonctions y entreront non seulement par leurs valeurs, mais encore par les valeurs, pour $a = 1$, de leurs dérivées par rapport à a, par suite de quoi on ne pourra pas considérer ces dernières équations indépendamment des équations (30) et (31).

Outre les équations précédentes, on aura encore les équations de condition qu'on déduira des égalités (28) et (29). Ces équations seront

(35) $$\int \bar{\xi}_1^2 d\sigma = 1, \qquad \int \bar{\xi}_1 d\sigma = 0$$

et, pour $r = 2, 3, 4, \ldots,$

(36) $$\int \bar{\xi}_r \bar{\xi}_1 d\sigma = M_r, \qquad \int \bar{\xi}_r d\sigma = N_r,$$

M_r et N_r ne dépendant que des fonctions (34).

Cela posé, la méthode de calcul se réduira à ceci:

On commencera par considérer l'équation (32) avec les équations de condition (35), et l'on en déduira la fonction $\bar{\xi}_1$ et la constante f_1. L'équation (30) donnera ensuite immédiatement la fonction ξ_1, puisque, $|\eta|$ étant assez petit, $R - T$ ne sera pas nul.

Puis on considérera l'équation (33) pour $r = 2$ avec les conditions (36) relatives à la même valeur de r, ce qui permettra de déterminer la fonction $\bar{\xi}_2$ et les constantes L_1 et f_2, après quoi l'on aura immédiatement la fonction ξ_2 par l'équation (31) relative à $r = 2$.

En considérant ensuite les équations (33) et (36) relatives à $r = 3$, on en tirera la fonction $\bar{\xi}_3$ et les constantes L_2 et f_3, après quoi l'équation (31) relative à la même valeur de r donnera immédiatement la fonction ξ_3.

D'une manière générale, si les fonctions (34) et les constantes

$$L_1, \quad L_2, \quad \ldots, \quad L_{r-2}, \quad f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_{r-1}$$

sont déjà connues, on déterminera, par la considération des équations (33) et (36), la fonction ξ_r et les constantes L_{r-1} et f_r, après quoi l'équation (31) donnera immédiatement la fonction ζ_r.

On voit donc que la principale chose à faire se réduit à la résolution des équations (32) et (33) avec les équations de condition correspondantes. Mais ce problème ne diffère pas essentiellement de celui dont nous nous sommes occupé dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (nos 10—13). Nous pouvons donc ne nous y arrêter pas dans la présente étude.

28. Voyons ce qu'on peut dire au sujet des fonctions ξ_r, calculées comme il vient d'être montré.

Les équations (30) et (31) sont du même type que les équations du n° 17. Seulement ces dernières équations renfermaient les constantes h_i, h_i' dont on pouvait disposer de manière à rendre les fonctions ξ_r finies pour $a=0$, tandis que les équations (30) et (31) ne permettent pas de le faire, et les fonctions ξ_r, considérées actuellement, pourront devenir infinies pour $a=0$.

Tenant compte de cette différence, nous pouvons ensuite appliquer l'analyse du n° 18, et les conclusions auxquelles nous y sommes arrivés seront valables aussi dans le cas actuel.

Nous pouvons, par suite, conclure que $a^2\xi_r$, quel que soit r, sera une fonction entière des arguments

(37) $$a\sin\theta\cos\psi, \qquad a\sin\theta\sin\psi, \qquad a\cos\theta$$

de degré au plus égal à $(m-2)r+2$, laquelle fonction renfermera, en général, des termes au-dessous du second degré.

On peut supposer que cette fonction soit paire par rapport à chacun des deux derniers arguments, et alors elle sera paire ou impaire par rapport au premier argument, selon que le nombre mr est pair ou impair.

A cette condition, que nous supposerons être remplie, $a^2\xi_r$ pourra aussi être considérée comme une fonction entière des arguments

(38) $$a, \qquad \sin\theta\cos\psi, \qquad \cos\theta,$$

et le degré de cette fonction sera encore au plus égal à $(m-2)r+2$.

Les fonctions ξ_r étant connues, on en déduira les ζ_r par la formule

$$\zeta_r = \frac{1}{a^2}\sum_{n=1}^{n=r}\frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}\mathrm{K}_r\,a^{2n}\xi^n}{\partial(a^2)^{n-1}}$$

que nous avons considérée au n° 19.

Reportons-nous donc à ce numéro.

La fonction que nous y avons désignée par Π_n sera encore une fonction entière des arguments (37) de degré ne dépassant pas $(m-2)r+2n$, mais cette fonction pourra à présent contenir les termes de degré $2n-2$ et ne renfermera pas seulement de termes au-dessous de ce dernier degré.

Tenant compte de cela, nous pouvons conclure que $a^{2r}\zeta_r$ sera, comme auparavant, une fonction entière des arguments (37) de degré mr, mais que ζ_r ne se réduira plus à une fonction entière des arguments (38). Cependant le produit $a^2\zeta_r$ en sera une fonction entière de degré $(m-2)r+2$ par rapport à a et de degré mr par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$.

Quant aux autres conclusions du n° 19, elles seront applicables à présent sans aucune réserve.

29. Nous avons montré comment on déterminera la fonction

$$\zeta = \zeta_1\alpha + \zeta_2\alpha^2 + \zeta_3\alpha^3 + \ldots$$

qui figure dans les équations (21). Mais, pour résoudre le problème complètement, on doit déterminer une autre fonction ζ, celle qui figure dans les équations

$$(39)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho_0+1}\,\sin\theta\cos\psi,\\ y &= a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho_0+q_0}\,\sin\theta\sin\psi,\\ z &= a\sqrt{1+\zeta}\,\sqrt{\rho_0}\,\cos\theta,\end{aligned}\right.$$

relatives à l'ellipsoïde E_0 comme figure de comparaison.

Dans le Travail *Sur les figures d'équilibre*, nous avons montré comment on peut passer de la première fonction ζ à la seconde, qui se présentera sous la forme de la série

$$(40)\qquad \zeta = \sum \zeta_{rs}\alpha^r\eta^s,$$

n'ayant que des termes s'annulant pour $\alpha=\eta=0$. Nous l'avons montré ne considérant que le cas de $a=1$, mais la même méthode peut servir aussi quel que soit a.

A présent nous allons exposer une autre méthode pour le calcul des fonctions ζ_{rs}.

Formons l'équation en coordonnées rectangulaires de la surface représentée par les équations (21).

En nous servant, pour cela, de la méthode du n° 20, nous arriverons à

une équation de la forme

$$(41)\qquad \frac{x^2}{\rho+1}+\frac{y^2}{\rho+q}+\frac{z^2}{\rho}-\sum_{i=1}^{\infty}\alpha^i\Phi_i\left(\frac{x}{\sqrt{\rho+1}},\frac{y}{\sqrt{\rho+q}},\frac{z}{\sqrt{\rho}}\right)=a^2,$$

où Φ_i est une fonction entière des trois arguments indiqués de degré au plus égal à $(m-2)i+2$, paire par rapport à y et à z et paire ou impaire par rapport à x, selon que mi est un nombre pair ou impair.

Le premier membre de cette équation dépend, outre x, y, z, α, encore des paramètres ρ et q, qui y entrent tant explicitement qu'implicitement, puisque les coefficients des fonctions Φ_i dépendent de ρ et q. Mais ces coefficients seront des fonctions analytiques de ρ et q sans points critiques au voisinage des valeurs ρ_0 et q_0 de ces paramètres. On pourra donc les développer suivant les puissances de η, tant que $|\eta|$ est assez petit.

Cela posé, développons tous les termes de notre équation suivant les puissances de η. Cette équation prendra alors la forme

$$(42)\qquad \frac{x^2}{\rho_0+1}+\frac{y^2}{\rho_0+q_0}+\frac{z^2}{\rho_0}-\sum\alpha^i\eta^j\Phi_{ij}\left(\frac{x}{\sqrt{\rho_0+1}},\frac{y}{\sqrt{\rho_0+q_0}},\frac{z}{\sqrt{\rho_0}}\right)=a^2,$$

la somme ne renfermant que les termes où $i+j\geq 1$.

Quant aux coefficients Φ_{ij}, ce seront des fonctions entières des trois arguments indiquées de la même nature que les fonctions Φ_i. D'ailleurs le degré de Φ_{ij} ne dépassera pas, comme pour la fonction Φ_i, le nombre

$$(m-2)i+2.$$

L'équation (42) étant formée, substituons-y au lieu de x, y, z leurs expressions (39). Nous obtiendrons alors l'équation

$$(43)\quad a^2\zeta=\sum\alpha^i\eta^j\Phi_{ij}\Big(a\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\cos\psi,\, a\sqrt{1+\zeta}\sin\theta\sin\psi,\, a\sqrt{1+\zeta}\cos\theta\Big),$$

d'où l'on pourra tirer ζ sous la forme de la série (40).

Pour cela, on pourra faire usage de la méthode de coefficients indéterminés, ce qui permettra de calculer successivement tous les ζ_{rs} où $r+s$ ne dépasse pas une limite aussi grande qu'on veut.

On voit aisément que le produit $a^{2r+2s}\zeta_{rs}$ représentera une fonction entière des arguments (37) de degré au plus égal à $mr+2s$, et que cette fonction, tout en étant paire par rapport à chacun des deux derniers arguments, sera paire ou impaire par rapport au premier, selon que mr est un nombre pair ou impair. On voit aussi que $a^2\zeta_{rs}$ sera une fonction entière des arguments (38). Du reste on peut arriver à des conclusions plus précises au sujet des fonctions ζ_{rs} en traitant l'équation (43) d'une autre manière, ainsi que nous le montrerons plus loin.

Les fonctions ζ_{rs} étant calculées, il n'y aura, pour achever la résolution du problème, qu'à former la relation qui doit exister, pour les figures d'équilibre, entre les paramètres α et η.

Comme cette relation sera

$$L = 0,$$

il suffit, pour cela, de former le développement de L suivant les puissances de α et η. Or le développement de L suivant les puissances de α,

$$L = -T + L_1 \alpha + L_2 \alpha^2 + L_3 \alpha^3 + \ldots,$$

nous sera connu par les calculs exposés au n° 27. Il ne reste donc qu'à développer les coefficients $T, L_1, L_2, L_3, \ldots$, qui seront des fonctions connues de ρ et q, suivant les puissances de η.

30. Nous avons passé de l'équation (41) à l'équation (42) en développant tous les termes suivant les puissances de η. Or, bien que les termes de l'équation (41) soient développables suvant les puissances de η, tant que $|\eta|$ est au-dessous d'une certaine limite, il n'en résulte pas encore que la fonction représentée par la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \alpha^i \Phi_i \left(\frac{x}{\sqrt{\rho + 1}}, \frac{y}{\sqrt{\rho + q}}, \frac{z}{\sqrt{\rho}} \right)$$

soit développable suivant les puissances de α et η, tant que $|\alpha|$ et $|\eta|$ sont assez petits. Donc la convergence de la série double qui figure dans l'équation (42) n'est pas prouvée. Mais cela peu importe dans la recherche actuelle qui n'a pour but que de montrer comment on peut déterminer les coefficients ζ_{rs} de la série (40), et la convergence de cette dernière série, $|\alpha|$ et $|\eta|$ étant assez petits, est hors de doute, puisqu'elle peut être démontrée directement, ainsi que nous l'avons montré, pour ce qui concerne le cas de $a = 1$, dans le Travail *Sur les figures d'équilibre.*

Du reste la convergence de la série figurant dans l'équation (42) peut être démontrée en partant de la convergence de la serie (40) et en s'appuyant sur une extension de la proposition que nous avons établie dans le Mémoire *Sur les séries de polynomes.*

Dans ce Mémoire, nous n'avons considéré que les séries procédant suivant les puissances d'un seul paramètre. Mais le résultat que nous y avons obtenu s'étend facilement au cas d'un nombre quelconque de paramètres, et par exemple, dans le cas de deux paramètres, on aura la proposition suivante:

Étant donnée une suite indéfinie de polynomes

$$P_{rs} \qquad (r, s = 0, 1, 2, 3, \ldots)$$

entiers en variables

$$x_1, \qquad x_2, \qquad \ldots, \qquad x_k,$$

si le degré de P_{rs} *ne dépasse pas* $mr + ls$, m *et* l *étant des nombres fixes, et si* $|P_{rs}|$ *ne dépasse pas une limite fixe, les* x_i *étant réels et compris dans l'intervalle* $(-1, +1)$, *la série*

$$\sum P_{rs}\alpha^r\beta^s$$

convergera absolument et uniformément pour toutes les valeurs complexes des x_i *qui satisfont aux conditions*

$$|x_1| \leqq p, \qquad |x_2| \leqq p, \qquad \ldots, \qquad |x_k| \leqq p,$$

où p *est un nombre positif arbitraire, pourvu que* α *et* β *satisfassent aux inégalités*

$$|\alpha| < \left(1 + p - \sqrt{2p + p^2}\right)^m, \qquad |\beta| < \left(1 + p - \sqrt{2p + p^2}\right)^l.$$

31. D'après la proposition précédente, la série (40) représentera une fonction analytique des arguments (38) et l'on pourra prendre $|\alpha|$ et $|\eta|$ suffisamment petits pour que cette fonction multipliée par a^2 n'ait pas de points critiques dans le domaine défini par les conditions

$$|a| \leqq A, \qquad |\sin\theta\cos\psi| \leqq p, \qquad |\cos\theta| \leqq p,$$

quelque grands que soient les nombres positifs A et p, choisis d'avance.

Cela posé, si nous introduisons la fonction $\xi = \xi(a)$ définie par la formule (5), ζ étant définie par la série (40), ce sera encore une fonction analytique des arguments (38) et la fonction $a^2\xi$ n'aura pas de points critiques sous des conditions analogues aux précédentes, si $|\alpha|$ et $|\eta|$ sont assez petits.

La fonction ξ se représentera par une série de la forme

$$\xi = \sum \xi_{ij}\alpha^i\eta^j,$$

où $i + j \geqq 1$, et il est facile de s'assurer que l'on aura

$$(44) \qquad a^2\xi_{ij} = \Phi_{ij}(a\sin\theta\cos\psi,\ a\sin\theta\sin\psi,\ a\cos\theta),$$

les Φ_{ij} étant les mêmes fonctions que celles qui figurent dans les équations (42) et (43).

En effet, l'équation (42) ne peut être qu'un résultat de l'élimination de θ et ψ entre les équations (39). C'est d'ailleurs un résultat entièrement déterminé, puisque cette équation est résolue par rapport à a^2. Par suite,

d'après ce que nous avons vu au n° 20, l'équation (42) ne sera autre chose que l'égalité

$$v^2 - v^2\xi(v) = a^2$$

où v, $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ sont remplacés par leurs valeurs tirées des équations

$$v\sin\theta\cos\psi = \frac{x}{\sqrt{\rho_0+1}}, \qquad v\sin\theta\sin\psi = \frac{y}{\sqrt{\rho_0+q_0}}, \qquad v\cos\theta = \frac{z}{\sqrt{\rho_0}}.$$

Nous aurons donc

$$v^2\xi(v) = \sum \alpha^i \eta^j \Phi_{ij}(v\sin\theta\cos\psi,\ v\sin\theta\sin\psi,\ v\cos\theta),$$

et comme cette égalité doit avoir lieu quel que soit v, il viendra

$$a^2\xi = \sum \alpha^i \eta^j \Phi_{ij}(a\sin\theta\cos\psi,\ a\sin\theta\sin\psi,\ a\cos\theta),$$

ce qui conduit aux égalités (44).

En même temps la convergence de la série figurant dans l'équation (42) se trouve établie.

Cela posé, revenons au n° 29 et supposons que les fonctions Φ_{ij} soient calculées comme nous y avons montré.

Nous aurons alors immédiatement les fonctions ξ_{ij}, et l'on en déduira les fonctions ζ_{rs} par la formule (4), qui donnera

$$a^2\zeta_{rs} = \sum_{n=1}^{r+s} \frac{1}{n!}\,\frac{\partial^{n-1}\mathrm{K}_{rs}\,a^{2n}\xi^n}{\partial(a^2)^{n-1}},$$

le symbole $\mathrm{K}_{rs}F$ désignant le coefficient de $\alpha^r\eta^s$ dans le développement de F suivant les puissances de α et η.

On voit que $a^2\xi_{ij}$ sera une fonction entière des arguments (37) de degré au plus égal à $(m-2)i+2$. D'ailleurs, dans le cas de $i=1$, $j=0$, ainsi que dans tous les cas où $i=0$, cette limite sera certainement atteinte.

On en conclut que $a^2\zeta_{rs}$ sera une fonction entière des arguments (38) de degré précisément égal à $(m-2)r+2$ par rapport à a et à $mr+2s$ par rapport à $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$. En même temps $a^{2r+2s}\zeta_{rs}$ sera une fonction entière des arguments (37) de degré précisément égal à $mr+2s$.

En faisant abstraction de a, considérons ζ_{rs} comme fonction des arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$. Ce sera une fonction entière de degré $mr+2s$ et l'on voit que l'ensemble de ses termes de ce degré s'obtiendra par la considération de la formule

$$\frac{1}{(r+s)!}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^{r+s-1}\mathrm{K}_{rs}\,a^{2r+2s}\xi^{r+s}}{\partial(a^2)^{r+s-1}},$$

qui ne dépend que des fonctions ξ_{10} et ξ_{01}.

Or ξ_{10} sera une fonction entière des arguments considérés de degré m et l'ensemble de ses termes de ce degré sera de la forme

$$a^{m-2}\, v(\sin\theta\cos\psi,\ \cos\theta),$$

v étant une fonction entière et homogène des arguments indiqués de degré m. Quant à ξ_{01}, ce sera une fonction entière du second degré, qui ne dépendra pas de a, et l'ensemble de ses termes du second degré sera désigné par w.

Ceci posé, l'ensemble de termes de ζ_{rs} de degré $mr + 2s$ sera

$$\frac{v^r w^s}{r!\,s!}\,\frac{1}{a^2}\,\frac{\partial^{r+s-1}\, a^{mr+2s}}{\partial(a^2)^{r+s-1}}.$$

ce qui se réduit à

$$\frac{(mr-2r+4)(mr-2r+6)\dots(mr+2s)}{2^{r+s-1}\,.\,r!\,s!}\, a^{mr-2r}\, v^r w^s,$$

formule que nous avons déjà indiquée, pour ce qui concerne le cas de $a = 1$, dans la quatrième Partie du Travail *Sur les figures d'équilibre* (page 95).

32. En terminant, supposons que la surface de la figure d'équilibre soit représentée par les équations

$$x = \sqrt{\rho_0 + 1 + \zeta}\,\sin\theta\cos\psi,$$
$$y = \sqrt{\rho_0 + q_0 + \zeta}\,\sin\theta\sin\psi,$$
$$z = \sqrt{\rho_0 + \zeta}\,\cos\theta$$

que nous avons admises dans la première Partie du Travail cité, et voyons ce qu'on peut conclure de ce qui précède au sujet de la fonction ζ qui figure dans ces équations.

Pour déterminer cette fonction, substituons les expressions ci-dessus de x, y, z dans l'équation (42), où l'on devra maintenant poser $a = 1$.

Alors, en posant, pour abréger,

$$\frac{\sin^2\theta\cos^2\psi}{\rho_0 + 1} + \frac{\sin^2\theta\sin^2\psi}{\rho_0 + q_0} + \frac{\cos^2\theta}{\rho_0} = Q,$$

nous parviendrons à l'équation

$$Q\zeta = Z(\zeta),$$

la fonction $Z(u)$ étant donnée par la série

$$Z(u) = \sum Z_{ij}(u)\,\alpha^i \gamma^j$$

avec ces valeurs des coefficients:

$$Z_{ij}(u) = \Phi_{ij}\left(\frac{\sqrt{\rho_0 + 1 + u}}{\sqrt{\rho_0 + 1}}\sin\theta\cos\psi,\ \frac{\sqrt{\rho_0 + q_0 + u}}{\sqrt{\rho_0 + q_0}}\sin\theta\sin\psi,\ \frac{\sqrt{\rho_0 + u}}{\sqrt{\rho_0}}\cos\theta\right).$$

En résolvant cette équation à l'aide de la formule de Lagrange, nous aurons

$$\zeta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{1}{Q^n} \left\{ \frac{d^{n-1} Z^n(u)}{du^{n-1}} \right\}_{u=0},$$

d'où l'on déduit pour ζ une expression de la forme

$$\zeta = \sum \zeta_{rs} \alpha^r \eta^s,$$

sous laquelle nous avons cherché cette fonction dans le Travail *Sur les figures d'équilibre*.

Dans la quatrième Partie de ce Travail, nous avons montré que les ζ_{rs} sont des fonctions rationnelles des arguments $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de la forme

$$\zeta_{rs} = \frac{\Psi_{rs}}{Q^{r+s}},$$

où Ψ_{rs} est une fonction entière de ces arguments; mais, pour le degré de la fonction Ψ_{rs}, nous n'avons pu donner qu'une limite supérieure très grossière. Voyons ce qu'on pourra conclure à cet égard d'après ce qui précède.

Nous aurons évidemment

$$\Psi_{rs} = \sum_{n=1}^{r+s} \frac{1}{n!} Q^{r+s-n} \left\{ \frac{d^{n-1} K_{rs} Z^n(u)}{du^{n-1}} \right\}_{u=0}.$$

Or, d'après les propriétés des fonctions Φ_{ij} (nº 29), $Z_{ij}(u)$ sera une fonction entière de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ de degré au plus égal à $(m-2)i+2$; d'où l'on conclut que $K_{rs} Z^n(u)$, si n ne dépasse pas $r+s$, sera une fonction entière des mêmes arguments de degré au plus égal à $(m-2)r+2n$, et qu'il en sera aussi de même de la dérivée qui figure dans la formule considérée.

Par suite, Q^{r+s-n} étant de degré $2r+2s-2n$, tous les termes de la somme seront des fonctions entières de $\sin\theta\cos\psi$ et $\cos\theta$ des degrés au plus égaux à $mr+2s$.

Nous arrivons donc à la conclusion que le degré de la fonction Ψ_{rs} sera au plus égal à $mr+2s$, ce qui s'accorde avec les résultats que nous avons obtenus dans la deuxième Partie du Travail cité, où nous avons examiné plusieurs cas particuliers.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Кальцитъ, кварцъ и прохлоритъ съ Кавказа.

Л. Л. Иванова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Во время очередной пѣшеходной геологической экскурсіи со студентами Екатеринославскаго Горнаго Института въ іюнѣ 1914 года по Военно-Грузинской дорогѣ были найдены большіе и хорошо образованные кристаллы кальцита, а на попутныхъ станціяхъ пріобрѣтены у мѣстныхъ жителей весьма интересные кристаллы горнаго хрусталя. Нѣкоторыя друзы послѣдняго были въ изобиліи покрыты зеленоватымъ налетомъ хлоритоваго вещества. Въ виду скудости свѣдѣній по минералогіи Кавказа, полагаю, не лишнимъ будетъ нижеслѣдующее описаніе упомянутыхъ минераловъ.

I. Кальцитъ.

Въ путеводителѣ 7-го геологическаго конгресса указывается на гнѣзда крупнокристаллическаго кальцита въ доломитахъ на 3-й верстѣ отъ станціи Балта по Военно-Грузинской дорогѣ[1]. Этого мѣста мы не нашли. Но зато на слѣдующей 4-й верстѣ, на правой (отъ Балты) сторонѣ шоссе, на склонѣ, возлѣ самой дороги была открыта студентомъ Б. Н. Чернышевымъ линза кальцита около полуметра максимальной толщины. Линза уже значительно вывѣтрилась и легко разгребается, разсыпаясь на крупные спайные куски. Среди послѣднихъ и были обнаружены два крупныхъ кристалла кальцита въ формѣ скаленоэдра.

Бóльшій кристаллъ снѣжно-бѣлаго цвѣта, непрозрачный, представляетъ изъ себя скаленоэдръ по длинѣ ребра около 10 см. Правильно и полно обра-

[1] Guide des excurs. du VII congr. géolog. internat. St.-Pb. XXII. 1897, p. 10.

зована только одна половина скаленоэдра и только очень небольшая часть другой; этотъ конецъ кристалла представляетъ очень неправильную изъѣденную поверхность, мѣстами со слѣдами спайности по $(10\bar{1}1)$.

Грани скаленоэдра матовы. Измѣренія помощью прикладного гоніометра дали, какъ среднее, углы между гранями скаленоэдра 36°26′ и 76°00′, что довольно близко совпадаетъ съ углами 35°36′ и 75°22′, приведенными для этихъ угловъ у Дэна[1] для обычной формы кальцита *v* $\{21\bar{3}1\}$.

Кромѣ того, острый уголъ скаленоэдра притупляется едва замѣтной гранью остраго ромбоэдра въ видѣ узкой скругленной полоски. Измѣрить ее отражательнымъ гоніометромъ оказалось невозможнымъ. Такъ какъ эта грань находится въ зонѣ скаленоэдра, то ей по зонѣ приходится приписать индексъ ромбоэдра $\{50\bar{5}2\}$. Графически полученный на стереографической проэкціи помощью сѣтки Вульфа уголъ (0001) : $(50\bar{5}2)$ (см. рис. 1) равняется 66°30′, что близко отвѣчаетъ углу $c:k = 67°56'$, данному у Дэна[2] для этой формы.



Рис. 1.

Въ то время какъ грань скаленоэдра $(21\bar{3}1)$ относится ко 2-му періоду, грань ромбоэдра $(50\bar{5}2)$ принадлежитъ уже къ 4-му періоду и является, вѣроятно, гранью растворенія, на что указываетъ и ея округленность.

Самая вершина кристалла притуплена еще гранями ромбоэдра, также не поддающимися измѣренію, повидимому, индекса $\{10\bar{1}2\}$.

Къ большому кристаллу приросли два меньшихъ, всего около 3,5 см. по ребру скаленоэдра, совершенно такого же облика.

Другой найденный въ той же линзѣ кристаллъ представленъ той же комбинаціей, что и предыдущій, но еще правильнѣе образованъ. Половина его сколота плоскостью спайности по ромбоэдру $\{10\bar{1}1\}$.

На большомъ кристаллѣ наблюдаются въ нѣсколькихъ мѣстахъ сдвиги по плоскости спайности $(10\bar{1}1)$.

---

[1] J. D. Dana. System of mineralogy N. Y. 1892. 264.

[2] J. D. Dana. L. c., 264.

II. Горный хрусталь.

Образцы горнаго хрусталя были мною куплены на различныхъ станціяхъ Военно-Грузинской дороги. Они представляютъ какъ отдѣльные кристаллы, такъ и друзы, изъ коихъ самая большая достигаетъ 40 см. по длинѣ. Отдѣльные кристаллы достигаютъ до 15 см. по оси z съ поперечникомъ призмы до 10 см. Самая большая друза была куплена на станціи Старый Ларсъ, двѣ небольшихъ — на станціи Гвилеты, а весь остальной матеріалъ отобранъ изъ громаднаго количества образцовъ, разложенныхъ на 4-хъ столахъ въ помѣщеніи станціи Казбекъ. При выборѣ я руководствовался присутствіемъ на кристаллахъ какихъ-либо иныхъ, кромѣ призмы и обычныхъ ромбоэдровъ, формъ или вообще интереснымъ обликомъ кристалла.

На различныхъ кристаллахъ кварца этихъ образцовъ были обнаружены слѣдующія формы: $m\{10\bar{1}0\}$, $r\{10\bar{1}1\}$, $z\{01\bar{1}1\}$, $s\{11\bar{2}1\}$, $x\{51\bar{6}1\}$. За исключеніемъ плоскостей призмы и ромбоэдровъ остальныя формы представлены очень узкими и маленькими гранями. Измѣренія угловъ однокружнымъ отражательнымъ гоніометромъ R. Fuess'a (универсальный приборъ) дали слѣдующіе результаты:

Грани.	Кол. изм.	Среднее.	По Дэну[1].	Δ
$m:s$	5	37°45′	37°58′	0°13′
$m:x$	3	11°51′	12°01′	0°10′
$s:r$	4	28°26′	28°54′	0°28′
$s:x$	2	25°46′	25°57′	0°11′

Сами по себѣ кристаллы кварца безцвѣтны. Они или совершенно чисты и прозрачны, что рѣдко, или переполнены включеніями жидкостей и газовъ (тоже безвцѣтныхъ), которыя сообщаютъ кристалламъ мутно-бѣлый цвѣтъ. Обычно включенія разбросаны въ безпорядкѣ по всему кристаллу. Но иногда замѣчается и извѣстная закономѣрность, о которой ниже.

Такъ какъ для Казбека давно извѣстны плоскіе и скрученные кварцы, то мое вниманіе при выборѣ было направлено и въ эту сторону. Дѣйствительно, мнѣ удалось отыскать нѣсколько интересныхъ съ этой стороны образцовъ. Прежде всего мое вниманіе привлекъ плоскій кристаллъ съ одностороннимъ развитіемъ граней ромбоэдра. Въ общемъ онъ совершенно прозраченъ, но черезъ весь кристаллъ проходитъ густая молочно-бѣлаго цвѣта

[1] J. D. Dana. L. c., 184.

струя мельчайшихъ включенiй, рѣзко обособленная отъ остального тѣла кристалла. Начинается она въ мѣстѣ прирастанiя кристалла (гдѣ онъ былъ отломанъ). Если поставить струю вертикально (см. рис. 1), то въ горизонтальномъ направленiи отъ нея отходятъ болѣе рѣдкiя прозрачныя струйки такихъ же включенiй. Можно замѣтить еще и слѣдующее обстоятельство: вершина струи загнута, при положенiи придаиномъ кристаллу на рисункѣ, влѣво. При этомъ положенiи правая выпуклая поверхность струи болѣе компактна и ровна, лѣвая же вогнутая какъ бы растрепана въ горизонтальномъ направленiи. Подобное же явленiе наблюдается и на другомъ плоскомъ кристаллѣ, представленномъ на рис. 2. Просматривая всѣ имѣвшiеся у меня



Рис. 2.



Рис. 3.

образцы плоскихъ кварцевъ съ Казбека, я обнаружилъ на всѣхъ безъ исключенiя присутствiе подобной же бѣловатой струи включенiй, которая всегда загибается въ плоскости сплющенiя (таблитчатости) кристалла и идетъ параллельно ребрамъ призмы съ ромбоэдромъ.

Далѣе мною было отобрано нѣсколько одинаковыхъ образцовъ нѣсколько иного сложенiя, происходящихъ, несомнѣнно, изъ одной и той же жилы. Здѣсь имѣется параллельное срастанiе цѣлаго ряда индивидуумовъ, которые въ общемъ образуютъ одинъ очень вытянутый плоскiй кристаллъ (Halbgeschlossene Bildungen Чермака[1]. Цвѣтъ этихъ образцовъ въ отличiе отъ предыдущихъ нѣсколько желтоватый, съ радужной побѣжалостью на гра-

[1] G. Tschermak. Ueber gewund. Bergkryst.; Denkschr. d. Mat. Nat. classe d. K. Akad. d. Wiss. Wien, 1894, B. 61, s. 365. По реферату въ Z. f. K., B. 27, S. 517.

няхъ. Здѣсь точно такъ же имѣется мутно-бѣлая струя включеній съ боковыми горизонтальными отвѣтвленіями, идущая параллельно ребру призмы съ ромбоэдромъ всего комплекса. Выходитъ она также изъ мѣста прирастанія комплекса (см. рис. 3). То же самое наблюдается на всѣхъ образцахъ этого типа. Нѣкоторые изъ нихъ обнаруживаютъ скрученность, хотя и слабо выраженную.

Еще въ 1836 году Вейссъ обратилъ вниманіе на скрученные кристаллы кварца, трактуя ихъ какъ фактически скрученные уже въ твердомъ состояніи[1]. Такъ же смотрѣлъ на нихъ и Гайдингеръ въ 1854 году. Кенготтъ въ 1866 году разсматривалъ уже это явленіе, какъ явленіе роста, но приписывалъ его совершенно ошибочно дѣйствію силы тяжести. Послѣднее воззрѣніе его было опровергнуто въ 1894 году Чермакомъ. Еще въ 1882 году Рейшъ указалъ на возможность деформаціи первичныхъ тонкихъ пластинокъ кварца путемъ спиральныхъ токовъ раствора, среди котораго растетъ кристаллъ. Онъ этимъ же, т. е. направленіемъ спиральнаго тока, объяснялъ появленіе правыхъ и лѣвыхъ кристалловъ или срастаніе и чередованіе тѣхъ и другихъ.

Чермакъ въ 1894 году указалъ на невозможность принятія объясненія Рейша потому, что онъ оставилъ безъ вниманія скрученные кристаллы, состоящіе, несомнѣнно, изъ нѣсколькихъ недѣлимыхъ, какъ сростки съ нѣсколькими головками. Онъ объясняетъ далѣе скрученные кристаллы какъ двойниковыя образованія по двумъ вицинальнымъ законамъ, не вдаваясь въ разъясненіе причинъ возникновенія подобныхъ двойниковъ.

Наконецъ, Бомбичи въ 1898 году видитъ причину появленія скрученныхъ кварцевъ въ весьма долго продолжающемся и медленномъ движеніи самаго кристаллогенетическаго пространства и въ связанномъ съ этимъ измѣненіемъ оріентировки молекулъ, отлагающихся изъ раствора (сравн. искусственную изотропію жидкихъ кристалловъ Леманна при движеніи стекла препарата[2].

Плоскіе кварцы съ Казбека, мнѣ кажется, подтверждаютъ воззрѣніе Бомбичи.

Прежде всего, если просмотрѣть мѣсторожденія плоскихъ кварцевъ, указанныя у Гинце[3], то сразу бросается въ глаза, что всѣ они связаны съ кристаллическими сланцами, вѣрнѣе — съ жилами, проходящими въ этихъ послѣднихъ. Напротивъ, плоскіе кварцы не встрѣчаются обычно въ пегма-

---

[1] Литературныя указанія см. C. Hintze. Handbuch der Mineralogie, B. I, S. 1336.

[2] O. Lehmann. Flüssige Krystalle. Leipzig. 1904.

[3] L. c.

титовыхъ жилахъ и жеодахъ. Въ Россіи давно славится упомянутое Казбекское мѣсторожденіе плоскихъ кварцевъ. Однако точное мѣстонахожденіе кварцевъ мѣстнымъ населеніемъ, отъ котораго пріобрѣтаются образцы, по понятнымъ коммерческимъ соображеніямъ, тщательно скрывается. За время кратковременнаго пребыванія на станціи Казбекъ мнѣ въ этомъ направленіи также не пришлось ничего сдѣлать. Однако проф. П. А. Земятченскому удалось въ 1894 году побывать на одномъ коренномъ мѣсторожденіи [1]. Это, по его словамъ, пещера образовавшаяся на мѣстѣ контакта черныхъ палеозойскихъ сланцевъ съ древними изверженными породами. Значитъ, и кавказскіе плоскіе кварцы пріурочены къ сланцевымъ породамъ.

Къ этому я могу еще прибавить, что плоскіе кварцы, правда, весьма мелкіе, наблюдались мною очень часто въ жилахъ кальцита съ кварцемъ среди девонскихъ сланцевыхъ породъ на Новой Землѣ [2].

Связь плоскихъ кварцевъ съ жилами, мнѣ кажется, нѣсколько объясняетъ ихъ образованіе.

Дѣло въ томъ, что въ жеодахъ и пегматитовыхъ жилахъ кристаллизація происходитъ, вѣроятно, изъ болѣе или менѣе неподвижнаго раствора, въ то время какъ кристаллизація въ жилахъ идетъ изъ постоянно движущейся по жилѣ жидкости. Врывающаяся гдѣ нибудь въ жилу струя пузырьковъ газа можетъ оказаться при этомъ какъ разъ мѣстомъ начала кристаллизаціи. Такъ какъ кремневый растворъ течетъ по жилѣ въ одномъ направленіи, то съ этой стороны и начинается преимущественный ростъ кристалла, а равнымъ образомъ и въ діаметрально противоположной точкѣ, къ которой подходятъ обтекающія кристаллъ струи раствора; такимъ образомъ, преимущественный ростъ обнаружатъ два противоположные ребра, въ силу чего и образуется удлиненный вдоль по жилѣ плоскій кристаллъ. Струя газовъ способствуетъ удлиненію кристалла въ направленіи этой струи и перпендикулярно къ направленію движенія раствора по жилѣ, давая вытянутые въ первомъ направленіи образованія. При этомъ теченіе раствора по жилѣ должно отклонять струю включеній въ сторону теченія, а равно и «растрепывать» поверхность струи со стороны находящейся за теченіемъ. Точно

---

[1] П. А. Земятченскій. Прот. зас. С.-Пб. О. Е. 1895, № 1. стр. 5. Цитировано по Р. Пренделю. Еж. по Геол. и Мин. Россіи, т. III, стр. 18. См. также C. Boerwald. Der Albit von Kasbek. Z. f. Kr. VIII, S. 48. Указывается, что штуфъ альбита, какъ и кварцы, по словамъ осетинъ, взяты изъ «Loche» у подножія Казбека, «in welches man nur kriechend hineingelangen kann — offenbar ein weiter Drusenraum im Granit oder in der Region der Krystallinenschifer».

[2] Л. Л. Ивановъ. Сборн. въ честь 25-лѣтія научн. дѣят. В. И. Вернадскаго. М. 1914. стр. 78.

такъ же отдѣльные пузырьки включеній изъ струи увлекаются теченіемъ въ горизонтальномъ направленіи, образуя упомянутыя горизонтальныя отвѣтвленія. Такъ какъ такая струя является центромъ кристаллизаціи, то, вѣроятно, она оказываетъ и нѣкоторое оріентирующее вліяніе при ростѣ плоскаго кристалла. Такъ, напримѣръ, въ скрученныхъ въ одной плоскости кристаллахъ (2-й законъ Чермака[1] можно наблюдать зависимость между изогнутостью струи включеній и изогнутостью самого кристалла. Весьма вѣроятно, что при вихревомъ движеніи струи газа, дающей начало струѣ включеній, образуется скрученный плоскій кристаллъ съ кривизной, отвѣчающей направленію вихря, согласно воззрѣнію отчасти Рейша[2], а главнымъ образомъ — Бомбичи[3].

Существованіе такой струи газа необязательно, конечно, для плоскаго вообще и плоско-скрученнаго въ частности кристалла. Но присутствіе такой струи въ описываемомъ случаѣ до нѣкоторой степени вскрываетъ условія роста кристалла. Такимъ образомъ образованіе плоскихъ кристалловъ, по моему мнѣнію, обусловлено односторонней циркуляціей кремневаго раствора въ узкой трещинѣ-жилѣ. Таковыя условія могутъ встрѣтиться только въ жильныхъ мѣсторожденіяхъ, съ каковыми и связаны плоскіе кварцы.

Связь скрученныхъ кварцевъ со сланцами объясняется тѣмъ, что породы эти, динамометаморфическія, подвержены медленнымъ изогнутіямъ и скручиваніямъ при горообразующихъ процессахъ. Послѣднее обстоятельство и даетъ толчокъ къ образованію именно скрученныхъ плоскихъ кварцевъ, въ согласіи съ воззрѣніями Бомбичи. Такъ и на Казбекѣ подобные кварцы находятся именно въ области сильнаго смятія земной коры, каковой являются сланцы Кавказа[4].

III. Прохлоритъ.

Прохлоритъ находится въ видѣ тонкаго оливково-зеленаго налета на поверхности друзы кристалловъ кварца, предоставленной мнѣ Б. И. Чернышевымъ. Въ виду столь простого парагенезиса надо было ожидать, что и

[1] Tschermak. L. c.

[2] E. Reusch. «Ueber gewund. Bergkr». Sitzungsb. d. preuss. Ak. d. Wiss. 12 Jan. 1882. По реферату въ Z. f. Kr., B. 8, S. 93.

[3] L. Bombicci. Memorie R. Acc. delle Science dell'Inst. di Bologna. 1898, 7 (V), 762. По реферату въ Z. f. Kr., B. 34, S. 291.

[4] Еще о кварцѣ съ Казбека см.: П. Земятченскій. Тр. СПб. Общ. Ест. т. XXIII. стр. 1; онъ же. Прот. зас. СПб. О. Е. 1899, № 1—2; Р. Прендель. Ел. по Геол. и Мин. Россіи, т. III, стр. 18; онъ же. Зап. Новор. Общ. Ест. т. XXVI. 1904, стр. 161; A. Frenzel. Mineralogisches aus Kaukasien. Tscherm. Mitt. N. F. II. S. 126.

составъ минерала будетъ наиболѣе простымъ, сравнительно съ обычными хлоритами. Такого рода соображенiе и побудило меня ближе заняться нижеописаннымъ минераломъ.

Прохлоритъ очень легко отдѣляется отъ поверхности кварца даже просто постукиванiемъ друзы. Въ массѣ онъ имѣетъ видъ очень мелкаго равномѣрно зернистаго порошка. При слабомъ увеличенiи подъ микроскопомъ видно, что порошокъ состоитъ изъ столбиковъ, сложенныхъ шестигранными табличками. Длина столбиковъ весьма различна, но вообще не велика; толщина 0,05—0,08 мм. Большинство столбиковъ червеобразно изогнуто, какъ у типичнаго прохлорита (см. рис. 4).

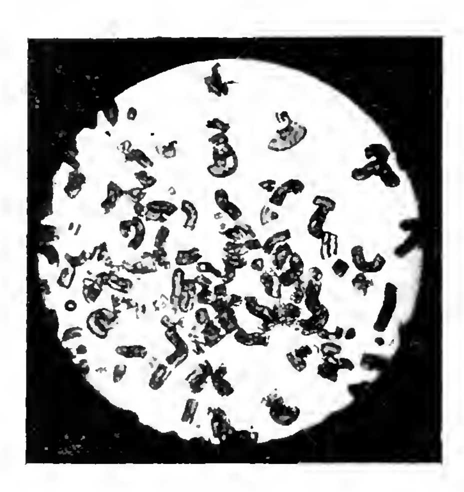


Рис. 4.

Для изслѣдованiя было собрано съ друзы кварца около трехъ граммъ минерала. При подготовкѣ къ анализу вещество было по возможности очищено отъ примѣсей. Сначала производилась отборка отъ руки подъ лупой. Затѣмъ порошокъ былъ подвергнутъ раздѣленiю помощью тяжелой жидкости Тулэ въ дѣлительной воронкѣ. Жидкость разбавлялась по каплѣ водой до тѣхъ поръ пока прохлоритъ не началъ опускаться. Въ это время удѣльный вѣсъ ея содержался между актинолитомъ, удѣльный вѣсъ 3,00, и арагонитомъ, удѣльный вѣсъ 2,95, т. е. удѣльный вѣсъ прохлорита равняется 2,92.

Отдѣлилась небольшая порцiя легче 2,95, состоящая изъ кварца и чернаго минерала (роговой обманки?). Такъ какъ въ тяжелой части осталось еще нѣкоторое количество очень мелкихъ черныхъ зернышекъ, то послѣдняя была еще разъ отобрана подъ бинокулярной лупой. При этомъ удалялись также побурѣвшiе (окислившiеся) червяки минерала.

Такимъ образомъ очищенный матерiалъ былъ подвергнутъ анализу.

Предварительная проба показала, что прохлоритъ нацѣло разлагается сѣрной кислотой (одна часть воды на три части кислоты) при кипяченiи въ натуральной степени измельченiя. При этомъ было установлено полное отсутствiе кальцiя.

Для опредѣленiя закиси желѣза навѣска 0,4487 гр. была разложена сѣрной кислотой при кипяченiи въ струѣ углекислаго газа и протитрована хамелеономъ.

Навѣски для анализа брались воздушно сухія. Опредѣленіе гигроскопической воды при нагрѣваніи въ воздушной банѣ при 115° до постояннаго вѣса дало всего 0,08% таковой. Кремнеземъ, сумма окисловъ алюминія и желѣза, окись магнія, послѣ разложенія навѣски кислотой, опредѣлялись обычнымъ путемъ. Количество алюминія взято изъ разности послѣ опредѣленія титрованіемъ всего желѣза (возстановленіе послѣдняго производилось сѣроводородомъ).

Прежде опредѣленія воды прохлорита была получена для него термическая кривая согласно проф. Я. В. Самойлову въ вертикальной тигельной печи Гереуса[1]. Температура отмѣчалась непосредственной записью показаній пирометра черезъ каждыя 15 секундъ. Самая кривая построена по нѣсколько измѣненному способу Осмонда[2]. Именно, за ось абсциссъ приняты градусы температуры, а на оси ординатъ отложена разность отсчетовъ температуръ черезъ интервалы въ 15 секундъ. При такомъ построеніи легко сравнивать кривыя для разновременныхъ опытовъ, такъ какъ температурная прямая для всѣхъ одна и та же. Въ то же время отчетливо обозначаются на кривой, въ видѣ пониженій или повышеній, всѣ замедленія и ускоренія въ нагрѣваніи минерала, связанныя соотвѣтственно съ процессами эндотермическими (какъ выдѣленіе воды) или экзотермическими (молекулярныя измѣненія). Вещество помѣщалось въ печи въ особый пальцеобразный тигель съ закругленнымъ дномъ, высотой въ 32 мм. и діаметромъ въ 11 мм.[3]. Такой тигель принятъ мной въ тѣхъ видахъ, что вообще и при дальнѣйшемъ изслѣдованіи минераловъ придется большею частью оперировать съ небольшими количествами вещества, которое должно быть помѣщено такъ, чтобъ наиболѣе равномѣрно окружать спай термопары. Достаточность емкости тигля была испытана на порошкѣ каолина, при чемъ получилась отчетливая, нормальная для каолина кривая.

Термическая кривая прохлорита показала одно отчетливое замедленіе при 600° (см. рис. 5)[4]. Поэтому вода опредѣлялась въ интервалѣ 600—650° прямымъ путемъ по методу Эйтеля[5]. Навѣска помѣщалась въ платиновой

---

[1] Я. В. Самойловъ. ИАН., 1914 г., стр. 779.

[2] Осмондъ. Превращеніе желѣза и углерода въ жел. сталяхъ и бѣлыхъ чугунахъ. Пер. съ фр. Мусселіусъ. С.-Пб. 1900, стр. 15.

[3] Считаю долгомъ принести благодарность лаборанту Общей Химіи Института Э. А. Штеберу, склепавшему описанный тигель изъ платиновой жести.

[4] Пунктиромъ показана кривая нагрѣванія печи.

[5] W. Eitel. Die Bestimmung des Wasserg. in Silikat. Mineralien und Gesteinen. Inaug. Diss. Fr. a. M. 1912.

лодочкѣ въ кварцевую трубку. Эта послѣдняя нагрѣвалась въ электрической трубчатой горизонтальной печи Гереуса. Температура измѣрялась термопарой и градуированнымъ на градусы милливольтметромъ. Черезъ кварцевую трубку все время пропускалась струя сухого воздуха, а выдѣляемая веществомъ вода поглощалась и взвѣшивалась въ двухъ хлоркальціевыхъ трубкахъ. При указанной температурѣ выдѣлилась изъ минерала почти вся вода. Дальнѣйшее нагрѣваніе при температурѣ 1250°—1270° дало ничтожное

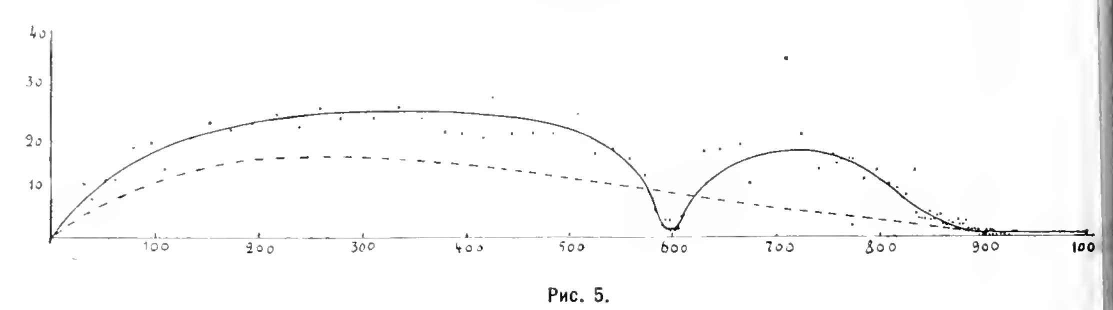


Рис. 5.

прибавленіе въ 0,27—0,92%. Гигроскопическая вода въ этихъ опытахъ отдѣльно не опредѣлялась вслѣдствіе ея ничтожнаго количества по предварительному опыту въ воздушной банѣ.

Всѣ данныя анализа можно свести въ слѣдующую таблицу:

Анализъ №.	I	II		III	IV	V	VI	Среднее.
Навѣска:	0.5145	0.2048		0,4487	0,3754	0,2332	0,1422	
SiO_2	23,95		23,97	—	—	—	—	23,96
Al_2O_3				—	—	—	—	21,76
Fe_2O_3	56,26		57,79	—	—	—	—	нѣтъ
FeO		35,06		32,66	—	—	—	32,66
MgO	9,38		9,48	—	—	—	—	9,43
H_2O [1]	—	—		—	0,27	0,65	0,92	0,62
H_2O [2]	—	—		—	11,35	10,59	10,13	10,69
H_2O [3]	0,08	—		—				
								99,12

[1] При 1270°.
[2] При 650°.
[3] Гигроскопич.

Опредѣленіе всего желѣза въ видѣ окиси дало величину 35,06%, совпадающую съ цифрой закиснаго желѣза, расчитанной на окись — 35,47%. Первая цифра даже нѣсколько ниже послѣдней, такъ что все желѣзо въ минералѣ приходится считать закиснымъ. Нѣсколько малая общая сумма 99,12% обусловливается, вѣроятно, неучетомъ органическаго вещества, на которое указываетъ темный налетъ, оставшійся въ кварцевой трубкѣ послѣ прокаливанія прохлорита.

Если перечислить среднія цифры анализа на 100 (1-й столбецъ) и взять молекулярныя отношенія (2-й столбецъ), то получимъ слѣдующія величины:

	I.	II.	III.
SiO_2	24,11	2,005	2,042
Al_2O_3	21,89	1,000	1,000
FeO	32,85	2,295	0
MgO	9,48	1,181	3,041
H_2O	11,67	3,256	3,323

Второй столбецъ хорошо отвѣчаетъ молекулярному отношенію:

$$3\,H_2O\,.\,2\,FeO\,.\,MgO\,.\,Al_2O_3\,.\,2\,SiO_2 \quad \text{или} \quad H_6Fe_2MgAl_2Si_2O_{13}.$$

Согласно взгляду академика В. И. Вернадскаго хлориты суть кислыя и среднія соли, а равно и продукты присоединенія къ нимъ, ряда многоосновныхъ кремнеглиноземистыхъ кислотъ. Первый простѣйшій рядъ получается изъ ангидрида $Al_2Si_2O_7$. Отсюда идетъ рядъ кислотъ: $Al_2Si_2O_5(OH)_4$, и т. д. до послѣдней возможной $Al_2Si_2(OH)_{14}$ [1]. Изслѣдуемый минералъ представляетъ кислую соль преднослѣдней кислоты этого ряда $Al_2Si_2O(OH)_{12}$ или $H_{12}Al_2Si_2O_{13}$, въ которой изъ 12 атомовъ водорода два замѣщены магніемъ, а четыре двуатомнымъ желѣзомъ. Такимъ образомъ, предполагаемая простота состава даннаго хлорита съ Казбека вполнѣ оправдалась. Если обратиться къ извѣстнымъ уже анализамъ прохлоритовъ, приведеннымъ у Гинтце, то анализы XXVIII, XXIX и XXXIV также довольно хорошо отвѣчаютъ кислой магнезіально-желѣзистой соли той же кислоты $H_{12}Al_2Si_2O_{13}$. Это какъ разъ прохлориты альпійскаго типа, парагенетически близкаго кавказскому.

[1] Проф. В. И. Вернадскій. Минералогія. Вып. II. Изд. 3-е. М. 1912, стр. 483.

Термическая кривая прохлорита съ Казбека показываетъ только одно выдѣленіе воды, при 600°, что опять, согласно предположенію В. И. Вернадскаго[1], можетъ служить указаніемъ на простоту его строенія, именно отсутствіе приставокъ къ основному ядру.

Минералогическій Кабинетъ
Екатеринославскаго Горнаго Института
Императора Петра I.

Декабрь 1915 г.

---

[1] L. c., стр. 486. Термическая кривая *клинохлора* съ Урала показала въ тѣхъ же условіяхъ два выдѣленія воды: первое — при 675°, второе — при 850—875°. Опыты въ этомъ направленіи продолжаются.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébychef-Laguerre.

Par W. Stekloff (V. Steklov).

(Présenté à l'Académie le 16/29 mars 1916).

1. Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébychef, définis dans l'intervalle $(a, +\infty)$ et correspondant à la fonction caractéristique

$$(a) \qquad p(x) = C(x-a)^{\beta} e^{-\alpha(x-a)}, \quad \beta > -1, \quad \alpha > 0$$

a été énoncé par moi en même temps que le théorème analogue pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef (en 1903), mais je n'en ai pas donné une démonstration jusqu'à présent.

Les recherches de ma Note précédente «Théorème de fermeture pour les polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef» (*Bulletin*, le 1 Avril, 1916, n^0 6) permettent de compléter cette lacune d'une manière fort simple.

Pour cela, il suffit seulement de répéter, avec des modifications tout à fait insignifiantes, les raisonnements de la Note indiquée.

2. Envisageons la suite de fonctions fondamentales

$$(1) \qquad \varphi_0(y) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}, \qquad \varphi_k(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos 2ky. \qquad (k=1, 2, \ldots)$$

où

$$(2) \qquad A \cos y = x,$$

y étant une variable comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$.

Reprenant les notations de ma Note cité, posons

$$\Phi(y) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cos 2ky + \rho_n(y),$$

où

$$\Phi(y) = \varphi(A \cos y) = \varphi(x),$$

$\varphi(x)$ étant une fonction admettant la dérivée du premier ordre dans $(0, A)$ et

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(y)\,dy, \qquad a_k = \frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi(y)\cos 2ky\,dy.$$

Appliquant aux fonctions (1) le théorème de ma Note «Sur la théorie de fermeture» (*Bulletin,* le 15 Mars, 1916, n⁰ 4)[1], on s'assure tout de suite que *les fonctions (1) représentent un système fermé.*

On peut donc écrire, comme au n⁰ 2 de ma Note précédente,

$$\frac{1}{2h}\int_{y-h}^{y+h} \Phi(y)\,dy - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin 2kh}{2kh}\cos 2ky = \rho_n(y), \quad h > 0,$$

où

$$\rho_n(y) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \frac{\sin 2kh}{2kh}\cos 2ky$$

et

$$\rho_n^2(y) < \frac{2}{4^2 h\, n^2}\sum_{k=n+1}^{\infty} b_k^2, \qquad b_k = -\frac{4}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \Phi'(y)\sin 2ky\,dy.$$

On en tire, comme au n⁰ 2 (pp. 405, 406) de ma Note citée,

$$\left|\Phi(y) - \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin 2kh}{2kh}\cos 2ky\right| < \frac{4M_1}{2}\left(h + \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{h}}\right),$$

---

[1] Voir aussi ma Note «Quelques remarques complémentaires relatives à la théorie de fermeture». Ibid.

où M_1 désigne le maximum de

$$\left| \frac{d\varphi(x)}{dx} \right|$$

dans l'intervalle $(0, A)$.

On obtient finalement, en tenant compte de (2),

$$|\varphi(x) - P_{2n}(x)| < \frac{AM_1}{2}\left(h + \frac{\sqrt{\pi}}{2n\sqrt{h}}\right),$$

où

(3) $$P_{2n}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{\sin 2kh}{2kh} \cos 2k \arccos \frac{x}{A}$$

est un polynome de degré 2n ne contenant que des puissances paires de x.

3. Désignons ensuite par $f(x)$ une fonction continuė satisfaisant à l'inégalité

(4) $$|f(x + \delta) - f(x)| < \varepsilon(\delta),$$

$\varepsilon(\delta)$ étant une fonction positive ne dépendant pas de x et s'annulant pour $\delta = 0$.

Répétant textuellement les raisonnements du n° 3 de ma Note citée, nous obtiendrons

(5) $$|f(x) - P_{2n}(x)| < \varepsilon(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{\sqrt{\pi}\,A}{4n\sqrt{h}}\right).$$

Cette inégalité, analogue à celle de (15) de ma Note précédente, *a lieu pour toutes les valeurs de x, comprises entre 0 et A, et pour toute fonction continue $f(x)$, quels que soient les nombres arbitraires A, δ, h et n.*

Faisons une hypothèse particulière au sujet de la fonction continue $f(x)$.

Supposons qu'elle satisfasse à la fois à l'inégalité (4) ainsi qu'à la suivante

(4_1) $$|f((x + \delta)^2) - f(x^2)| < \varepsilon(\delta).$$

Il existe une infinité de fonctions continues jouissant cette propriété.

Comme un exemple, nous pouvons indiquer une fonction continue qui, étant quelconque pour les valeurs de x, comprises entre 0 et un nombre fixe B

plus petit que A, est égale à zéro pour les valeurs de x, plus grandes que B[1].

Appliquant l'inégalité (5) à une telle fonction, on aura

$$(6)\qquad |f(x^2) - Q_n(x^2)| < \varepsilon(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{h}}\right),$$

où l'on a posé

$$Q_n(x^2) = P_{2n}(x).$$

Si l'on remplace x^2 par t, on obtient l'inégalité

$$(6_1)\qquad |f(t) - Q_n(t)| < \varepsilon(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{h}}\right),$$

ayant lieu pour les valeurs de t, comprises entre 0 et A^2.

4. Cela posé, désignons par

$$\psi_0(x),\quad \psi_1(x),\quad \psi_2(x),\quad \ldots,\quad \psi_k(x),\ldots$$

les polynomes de Tchébychef correspondant à la fonction caractéristique (a), où nous pouvons poser, pour simplifier l'écriture,

$$C = 1,\quad a = 0,\quad \alpha = 1.$$

On a (comparer l'inégalité (17) de ma Note précédente)

$$(7)\qquad \sqrt{S_p(\varphi(x))} \leqq \sqrt{S_p(\psi(x))} + \sqrt{\int_0^\infty x^\beta e^{-x}(\varphi(x) - \psi(x))^2\,dx},$$

où, en général,

$$S_p(F(x)) = \sum_{k=p+1}^{\infty} C_k^2,\qquad C_k = \int_0^\infty x^\beta e^{-x} F(x)\,\psi_k(x)\,dx,$$

p étant un entier arbitraire.

---

[1] Le lecteur trouvera une application intéressante des fonctions analogues dans un Article de M. J. Ouspensky (Uspenskij), que j'ai l'intention de présenter à l'Académie dans une des Séances prochaines.

Écrivons l'intégrale

$$I = \int_0^\infty x^\beta e^{-x} (\varphi(x) - \psi(x))^2 \, dx$$

sous la forme

(8) $$I = 2\int_0^\infty t^{2\beta+1} e^{-t^2} (f(t^2) - \psi(t^2))^2 \, dt = \int_0^\infty \Theta^2(t) \, dt,$$

en y faisant

$$\varphi(x) = f(x), \qquad x = t^2.$$

Supposons que $f(x)$ soit une fonction appartenant à la classe de fonctions, qui satisfont à la fois aux conditions (4) et (4_1), et que son module ne surpasse pas M.

Posons

$$I = \int_0^A \Theta^2(t) \, dt + \int_A^\infty \Theta^2(t) \, dt = I_1 + I_2.$$

On trouve, en tenant compte de l'inégalité (6),

(9) $$I_1 < \Gamma(\beta+1) \varepsilon^2(\delta) \left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{h}}\right)^2,$$

si l'on fait

$$\psi(t^2) = Q_n(t^2).$$

Cherchons une limite supérieure du polynome $Q_n(t^2)$ pour les valeurs de t, plus grandes que A.

On trouve, répétant les raisonnements du n° 6 de ma Note précédente,

$$|P_{2n}(t)| = |Q_n(t^2)| < \frac{4M}{3} \frac{2^{2n} t^{2n}}{A^{2n}} \qquad \text{pour } t \geqq A.$$

Par conséquent,

$$\int_A^\infty t^{2\beta+1} e^{-t^2} Q_n^2(t^2) \, dt < \frac{4^2 M^2}{3^2} \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \int_A^\infty t^{2\beta+2m+1} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{4^2 M^2}{2 . 3^2} \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \int_{A^2}^\infty x^{\beta+m} e^{-x} dx <$$

$$< \frac{4^2 M^2}{2 . 3^2} \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \Gamma(\beta+m+1),$$

où l'on a posé

$$m = 2n.$$

On peut donc écrire

$$(10) \qquad \int_A^\infty t^{2\beta-1} e^{-t^2} Q_n^2(t^2)\,dt < L \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \frac{(m+\beta)^{m+\beta+\frac{1}{2}}}{e^{m+\beta}};$$

où l'on peut poser

$$L = \frac{4^2 M^2}{2 . 3^2} \sqrt{2\pi}\, e^{\frac{1}{12\beta}}.$$

Il est aisé de s'assurer, enfin, que

$$(11) \qquad \int_A^\infty t^{2\beta+1} e^{-t^2} f^2(t^2)\,dt < \frac{M^2}{2} \int_{A^2}^\infty x^\beta e^{-x}\,dx < N e^{-\frac{A^2}{2}},$$

où

$$N = 2^\beta M^2\, \Gamma(\beta+1)$$

est un nombre fixe.

Les inégalités (10) et (11) donnent

$$I_2 < 4Ne^{-\frac{A^2}{2}} + 4L \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \frac{(m+\beta)^{m+\beta+\frac{1}{2}}}{e^{m+\beta}}$$

et, enfin, en vertu de (8) et (9),

$$(12) \qquad \begin{aligned} I < 4Ne^{-\frac{A^2}{2}} + \Gamma(\beta+1)\,\varepsilon^2(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{h}}\right)^2 + \\ + 4L \frac{2^{2m}}{A^{2m}} \frac{(m+\beta)^{m+\beta+\frac{1}{2}}}{e^{m+\beta}}, \end{aligned}$$

l'inégalité de la même espèce que celle de (25) de ma Note, citée plus haut.

5. Faisons maintenant, dans (7),

$$p = 2n = m.$$

En remarquant que

$$\psi(x) = P_{2n}(x),$$

on trouve

$$S_m(\psi(x)) = 0$$

et

$$S_m(f(x)) < I^2, \tag{13}$$

où l'on peut entendre par I le second membre de l'inégalité (12).

Disposons maintenant les constantes arbitraires A, δ et h de la même manière qu'au nº 8 (p. 413) de ma Note précédente, en faisant, par exemple,

$$h = \frac{1}{m^{\frac{2}{3}}}, \quad A = 2\left(\frac{m+\beta}{\log(m+\beta)}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$$\delta = Ah = 2\left(\frac{m+\beta}{m\log(m+\beta)}\right)^{\frac{2}{3}} < \frac{2^{\frac{2}{3}}}{\log^{\frac{2}{3}} m} \qquad \text{pour } m \geqq \beta.$$

On aura

$$\sigma = 4L\,\frac{2^{2m}}{A^{2m}}\,\frac{(m+\beta)^{m+\beta+\frac{1}{2}}}{e^{m+\beta}} = 4L\left(\frac{\log^4 q}{q}\right)^{\frac{m}{3}}\frac{q^{\beta+\frac{1}{2}}}{e^q},$$

$$q = m + \beta.$$

Il s'ensuit que

$$\sigma < \frac{\varepsilon^2}{3} \qquad \text{pour } m \geqq m_0,$$

m_0 étant un entier convenablement choisi.

Remarquant ensuite que

$$\Gamma(\beta+1)\,\varepsilon^2(\delta)\left(1 + \frac{Ah}{2\delta} + \frac{A\sqrt{\pi}}{4n\sqrt{h}}\right)^2 < \frac{\varepsilon^2}{3} \qquad \text{pour } m \geqq m_0,$$

et

$$4Ne^{-\frac{A^2}{2}} < \frac{\varepsilon^2}{3},$$

on obtient, en vertu de (12) et (13),

$$S_m(f(x)) < \varepsilon^2 \quad \text{pour } m \geqq m_0.$$

Donc, *l'équation de fermeture, correspondant aux polynomes de Tchébychef-Laguerre, a lieu pour toute fonction continue $f(x)$, dont le module ne*

surpasse pas un nombre fixe M, pourvu que cette fonction satisfasse aux conditions (4) et (4_1).

6. Soit maintenant $f(x)$ une fonction qui satisfait à la seule condition (4).

Soit B un nombre fixe et désignons par $\psi(x)$ une fonction continue, qui satisfait aux conditions (4) et (4_1) pour $x \geqq B$ et qui est égale à $f(x)$ dans l'intervalle $(0, B)$.

La fonction $\psi(x)$, ainsi choisie, satisfera aux conditions (4) et (4_1) pour toutes les valeurs de x.

Faisant dans (7)

$$\varphi(x) = f(x),$$

on aura

$$\sqrt{S_p(f(x))} \leqq \sqrt{S_p(\psi(x))} + \sqrt{\int_B^\infty x^\beta e^{-x}(f(x) - \psi(x))^2\, dx}.$$

On peut toujours choisir le nombre B de façon qu'on ait

$$\int_B^\infty x^\beta e^{-x} (f(x) - \psi(x))^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{4}.$$

Le nombre B étant ainsi fixé, on peut prendre p si grand qu'on ait, d'après le théorème du n° précédent,

$$S_p(\psi(x)) \leqq \frac{\varepsilon^2}{4} \quad \text{pour } p \geqq p_0.$$

On aura alors

$$S_p(f(x)) < \varepsilon^2 \quad \textit{pour } p \geqq p_0,$$

quelle que soit la fonction $f(x)$, continue et bornée pour toutes les valeurs positives de x.

Cela posé, il ne reste qu'à répéter les raisonnements des n$^{\text{os}}$ 9 et 10 de ma Note précédente, pour s'assurer que *la suite de polynomes de Tchébychef-Laguerre est fermée.* C. Q. F. D.

7. Les polynomes, que nous avons étudiés dans cette Note ainsi que dans la Note précédente (ce Bulletin, n° 6, le 1 Avril 1916), ne présentent qu'un cas particulier des polynomes $\varphi_k(x)$ de Tchébychef, définis par les conditions

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_k(x)\,P_{k-1}(x)\,dx = 0,$$

(14)

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_k^2(x)\,dx = 1,$$

où $p(x)$ est une fonction quelconque non négative dans l'intervalle (a, b), a et b sont des nombres dont l'un ou tous les deux deviennent infinis ($-\infty$ et $+\infty$).

On sait que les polynomes $\varphi_k(x)$ existent, quelle que soit la fonction non négative $p(x)$, pourvu que les intégrales

(15) $$m_k = \int_a^b p(x)\,x^k\,dx$$

aient un sens déterminé pour toutes les valeurs de $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Il est évident que la méthode, que nous avons appliquée aux cas particuliers des fonctions

$$p(x) = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad p(x) = x^{\beta}\,e^{-x},$$

s'étend, presque sans changement, au cas général que nous venons de signaler.

Si nous prenons, par exemple, pour le point de départ l'inégalité (δ) de ma Note précédente (ce Bulletin, n⁰ 6, le 1 Avril 1916, p. 408) et si nous répétons les raisonnements exposés dans la Note actuelle, en les appliquant au cas général où $p(x)$ est une fonction quelconque, nous arriverons au théorème suivant:

Toute suite de polynomes de Tchébychef, définis par les conditions (**14**) (*où* $b = +\infty$, *a est un nombre quelconque qui peut être égal à* $-\infty$ *et* $p(x)$ *est une fonction quelconque non négative et telle que les intégrales* (**15**) *existent*) *est une suite fermée toutes les fois que la fonction caractéristique* $p(x)$ *satisfasse encore à la condition suivante: il existe une fonction* $\omega(n)$, *positive pour toutes les valeurs de* n, *tendant vers l'infini pour* $n = +\infty$ *et telle qu'on ait à la fois*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\omega(n)}{n} = 0,$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{[\omega(n)]^{2n}} \int_{4\omega^2(n)}^{\infty} p(x)\,x^n\,dx = 0.$$

Cette circonstance aura, par exemple, lieu, si l'on suppose que les intégrales m_k (15) satisfassent à la condition

$$\lim_{n=\infty} \frac{m_n}{[\omega(n)]^{2n}} = 0.$$

Je me permets de me borner à cette petite remarque, sans entrer dans les détails, parce que la démonstration découle presqu'avec évidence de ce que nous avons dit aux n^{os} précédents de cette Note ainsi que dans ma Note précédente citée plus haut.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Изслѣдованіе траекторіи свободно падающаго въ пустотѣ тѣла.

М. А. Вильева.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

§ 1. Вопросъ о видѣ кривой, описываемой матеріальной точкой, свободно падающей въ пустотѣ вблизи земной поверхности до настоящаго времени былъ выясненъ только въ общихъ чертахъ, такъ что не могло считаться рѣшеннымъ, въ какую сторону отъ плоскости перваго вертикала, проходящей черезъ начальное положеніе точки, она при дальнѣйшемъ движеніи отклоняется: къ полюсу, или къ экватору. Laplace (Mécanique Céleste, t. IV, ch. V) полагалъ, что движеніе ея должно происходить въ точности въ указанной плоскости, безъ какихъ-либо отклоненій въ ту или другую сторону. Gauss (Fundamentalgleichungen für die Bewegung schwererer Körper auf der rotierenden Erde. Werke Bd. V), а за нимъ и большинство авторовъ трактатовъ по механикѣ, повторявшихъ его результаты, стояли за отклоненіе къ экватору. Д. К. Бобылевъ въ своемъ Курсѣ Аналитической Механики (Часть кинетическая, стр. 162. Изд. 1881 г.) находитъ въ этомъ случаѣ отклоненіе къ полюсу и при томъ совершенно незначительное. Наиболѣе полная работа по этому вопросу, появившаяся въ послѣдніе годы (августъ 1913 г.), — это статья R. S. Woodward'a (On the orbits of freely falling bodies. Astronom. Journ. Nos 651—652). Въ ней авторъ, указавъ на недостатки предшествовавшихъ работъ по разсматриваемому вопросу, самъ пришелъ къ заключенію, что при указанныхъ выше условіяхъ тѣло должно при паденіи отклоняться къ полюсу и притомъ очень замѣтно. Онъ получилъ для паденія съ высоты 490 мтр. на широтѣ 45° отклоненіе къ востоку 16.85 снт., а къ полюсу 3.03 снт., тогда какъ по формуламъ Д. К. Бобылева въ данномъ случаѣ полярное отклоненіе не превышаетъ нѣсколькихъ стотысячныхъ долей миллиметра.

Познакомившись съ указанными работами, я пришелъ къ убѣжденію, что ни одинъ изъ названныхъ результатовъ не можетъ быть признанъ безусловно правильнымъ, такъ какъ нѣкоторые авторы при изслѣдованіяхъ пользовались недостаточно точными формулами, а другіе неправильно опредѣляли положеніе вертикальной линіи и плоскости перваго вертикала.

Не останавливаясь на дальнѣйшихъ подробностяхъ литературы разсматриваемаго вопроса, указанія на которую можно найти въ работѣ Woodward'а, я перехожу къ собственнымъ изслѣдованіямъ въ этой области.

Глава I. **Дифференціальныя уравненія вопроса.**

§ 2. *Выводъ трехъ системъ уравненій.* Въ разсматриваемомъ вопросѣ дифференціальныя уравненія движенія точки могутъ быть приведены къ тремъ основнымъ системамъ въ зависимости отъ того, разсматривается ли абсолютное движеніе ея въ пространствѣ или относительное по отношенію къ горизонту начальнаго положенія ея. Третья система уравненій занимаетъ промежуточное положеніе между двумя указанными.

Первая система уравненій. Въ настоящей работѣ не принимаются во вниманіе внѣшнія силы, дѣйствующія на землю, т. е. притяженія ея луной и солнцемъ. Поэтому можно считать центръ земли находящимся въ абсолютномъ покоѣ. Въ плоскости земного экватора выбираемъ неподвижныя взаимно перпендикулярныя оси x и y. Ось z направляемъ по оси вращенія къ сѣверному полюсу. Называя въ такомъ случаѣ V потенціальную функцію, зависящую отъ притяженія разсматриваемой точки землей, имѣемъ первую систему уравненій въ видѣ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial x} \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial y} \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= \frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Вторая система уравненій. Принимая новыя оси координатъ X и Y въ плоскости земного экватора неизмѣнно связанными съ землей, направляя ось Z по оси вращенія къ сѣверному полюсу и обозначая угловую скорость вращенія земли черезъ ω, имѣемъ зависимости

$$\left.\begin{aligned} x &= X \cos \omega t - Y \sin \omega t \\ y &= X \sin \omega t + Y \cos \omega t \\ z &= Z \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

причемъ предполагается, что въ начальный моментъ $t=0$ объ системы координатъ совпадали. Подставляя предыдущія формулы въ уравненія (1), находимъ вторую систему дифференціальныхъ уравненій вопроса:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2 X}{dt^2} - 2\omega\frac{dY}{dt} - \omega^2 X = \frac{\partial V}{\partial X}; \quad \frac{\partial V}{\partial X} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos\omega t + \frac{\partial V}{\partial y}\sin\omega t\\
&\frac{d^2 Y}{dt^2} + 2\omega\frac{dX}{dt} - \omega^2 Y = \frac{\partial V}{\partial Y}; \quad \frac{\partial V}{\partial Y} = -\frac{\partial V}{\partial x}\sin\omega t + \frac{\partial V}{\partial y}\cos\omega t\\
&\frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial Z}; \quad \frac{\partial V}{\partial Z} = \frac{\partial V}{\partial z}
\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Третья система уравненій. Плоскость XOZ въ предыдущей системѣ уравненій выбираемъ такъ, чтобы она проходила черезъ начальное положеніе падающей точки. Обозначая геоцентрическую широту этого положенія черезъ λ, соотвѣтствующее разстояніе отъ центра земли черезъ R, выбираемъ новую систему координатъ (ξ, η и ζ) такъ, чтобы начало ихъ совпадало съ начальнымъ положеніемъ точки, ось ζ была направлена въ плоскости меридіана вертикально вверхъ и образовала съ плоскостью экватора земли уголъ Λ, равный географической широтѣ, ось ξ выбираемъ въ плоскости меридіана по направленію къ экватору, а ось η — параллельно оси Y второй системы основныхъ уравненій.

Зависимость между новыми координатами и координатами второй системы дается уравненіями

$$\left.\begin{aligned}
X &= R\cos\lambda + \xi\sin\Lambda + \zeta\cos\Lambda\\
Y &= \eta\\
Z &= R\sin\lambda - \xi\cos\Lambda + \zeta\sin\Lambda
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Пользуясь ими, приводимъ уравненія второй системы къ виду:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\sin\Lambda\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\sin^2\Lambda\,\xi - \omega^2\sin\Lambda\cos\Lambda\,\zeta = \frac{\partial V}{\partial\xi} + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Lambda\\
&\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\sin\Lambda\frac{d\xi}{dt} + 2\omega\cos\Lambda\frac{d\zeta}{dt} - \omega^2\eta = \frac{\partial V}{\partial\eta}\\
&\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\omega\cos\Lambda\frac{d\eta}{dt} - \omega^2\sin\Lambda\cos\Lambda\,\xi - \omega^2\cos^2\Lambda\,\zeta = \frac{\partial V}{\partial\zeta} + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Lambda\\
&\qquad\frac{\partial V}{\partial\xi} = \frac{\partial V}{\partial X}\sin\Lambda - \frac{\partial V}{\partial Z}\cos\Lambda\\
&\qquad\frac{\partial V}{\partial\eta} = \frac{\partial V}{\partial Y}\\
&\qquad\frac{\partial V}{\partial\zeta} = \frac{\partial V}{\partial X}\cos\Lambda + \frac{\partial V}{\partial Z}\sin\Lambda
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Зависимость между абсолютными координатами x, y и z и относительными ξ, η и ζ имѣетъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\xi &= -R\sin(\Lambda-\lambda) + x\sin\Lambda\cos\omega t + y\sin\Lambda\sin\omega t - z\cos\Lambda \\
\eta &= -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\
\zeta &= -R\cos(\Lambda-\lambda) + x\cos\Lambda\cos\omega t + y\cos\Lambda\sin\omega t + z\sin\Lambda
\end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Такъ какъ уравненія (5) являются основными въ разсматриваемомъ вопросѣ, то я привожу ихъ выводъ изъ общей теоріи относительнаго движенія. Зависимость между абсолютными (x, y, z) координатами и относительными (ξ, η, ζ) выражается равенствами:

$$x = x_0 + \lambda_x\xi + \mu_x\eta + \nu_x\zeta$$

$$y = y_0 + \lambda_y\xi + \mu_y\eta + \nu_y\zeta$$

$$z = z_0 + \lambda_z\xi + \mu_z\eta + \nu_z\zeta$$

Черезъ p, q и r обозначаемъ проекціи угловой скорости вращенія системы $\xi\eta\zeta$ на оси относительныхъ координатъ, опредѣляемыя формулами:

$$p = \nu_x\frac{d\mu_x}{dt} + \nu_y\frac{d\mu_y}{dt} + \nu_z\frac{d\mu_z}{dt}$$

$$q = \lambda_x\frac{d\nu_x}{dt} + \lambda_y\frac{d\nu_y}{dt} + \lambda_z\frac{d\nu_z}{dt}$$

$$r = \mu_x\frac{d\lambda_x}{dt} + \mu_y\frac{d\lambda_y}{dt} + \mu_z\frac{d\lambda_z}{dt}$$

Въ такомъ случаѣ общія уравненія относительнаго движенія имѣютъ видъ:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left\{-r\frac{d\eta}{dt} + q\frac{d\zeta}{dt}\right\} + \xi(-q^2-r^2) + \eta\left(-\frac{dr}{dt}+pq\right) + \zeta\left(\frac{dq}{dt}+pr\right) = \dot{v}\cos(\dot{v},\xi) - \dot{v}_0\cos(\dot{v}_0,\xi)$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\left\{-p\frac{d\zeta}{dt} + r\frac{d\xi}{dt}\right\} + \xi\left(\frac{dr}{dt}+pq\right) + \eta(-p^2-r^2) + \zeta\left(-\frac{dp}{dt}+qr\right) = \dot{v}\cos(\dot{v},\eta) - \dot{v}_0\cos(\dot{v}_0,\eta)$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left\{-q\frac{d\xi}{dt} + p\frac{d\eta}{dt}\right\} + \xi\left(-\frac{dq}{dt}+pr\right) + \eta\left(\frac{dp}{dt}+qr\right) + \zeta(-p^2-q^2) = \dot{v}\cos(\dot{v},\zeta) - \dot{v}_0\cos(\dot{v}_0,\zeta)$$

гдѣ $\dot{v}$ и $\dot{v}_0$ означаютъ соотвѣтственно абсолютныя ускоренія разсматриваемой точки и начала относительныхъ координатъ.

Въ примѣненіи къ разсматриваемому вопросу имѣемъ:

$$x_0 = R\cos\lambda\cos\omega t;\quad \lambda_x = \sin\Lambda\cos\omega t;\quad \mu_x = -\sin\omega t;\quad \nu_x = \cos\Lambda\cos\omega t;$$

$$\upsilon_0\cos(\upsilon_0, \xi) = -R\,\omega^2\cos\lambda\sin\Lambda$$

$$y_0 = R\cos\lambda\sin\omega t;\quad \lambda_y = \sin\Lambda\sin\omega t;\quad \mu_y = +\cos\omega t;\quad \nu_y = \cos\Lambda\sin\omega t;$$

$$\upsilon_0\cos(\upsilon_0\,\eta) = 0$$

$$z_0 = R\sin\lambda\quad;\qquad \lambda_z = -\cos\Lambda;\qquad \mu_z = 0;\qquad \nu_z = \sin\Lambda;$$

$$\upsilon_0\cos(\upsilon_0\,\zeta) = -R\,\omega^2\cos\lambda\cos\Lambda$$

$$\upsilon\cos(\upsilon, \xi) = \frac{\partial V}{\partial\xi}\qquad p = -\omega\cos\Lambda$$

$$\upsilon\cos(\upsilon, \eta) = \frac{\partial V}{\partial\eta}\qquad q = 0$$

$$\upsilon\cos(\upsilon, \zeta) = \frac{\partial V}{\partial\zeta}\qquad r = +\omega\sin\Lambda,$$

и написанныя выше общія уравненія переходятъ въ систему (5).

Если движеніе точки считается происходящимъ въ небольшомъ пространствѣ, окружающемъ начало относительныхъ координатъ $\xi\eta\zeta$, то вторыя части уравненій (5) можно разложить по степенямъ ξ, η и ζ:

$$\frac{\partial V}{\partial\xi} + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Lambda = \left(\frac{\partial V}{d\xi}\right)_0 + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Lambda + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\xi^2}\right)_0\xi + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_0\eta + \left(\frac{d^2 V}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)_0\zeta + \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial\eta} = \left(\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\eta}\right)_0\xi + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}\right)_0\eta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)_0\zeta + \ldots$$

$$\frac{\partial V}{\partial\zeta} + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Lambda = \left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)_0 + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Lambda + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\xi\,\partial\zeta}\right)_0\xi + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\eta\,\partial\zeta}\right)_0\eta + \left(\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta^2}\right)_0\zeta + \ldots$$

гдѣ значкомъ $_0$ обозначено, что разсматриваемая величина относится къ началу координатъ. Въ дальнѣйшемъ широта Λ и опредѣляемое ею направленіе оси ζ выбирается такъ, чтобы были соблюдены условія

$$\left.\begin{aligned}\left(\frac{\partial V}{\partial\xi}\right)_0 + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Lambda &= 0\\ \left(\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)_0 &= 0\end{aligned}\right\}\qquad (7)$$

Въ такомъ случаѣ, обозначая черезъ G полное ускореніе силы тяжести въ началѣ относительныхъ координатъ, т. е. результирующее ускореніе, зависящее отъ притяженія и вращенія земли, имѣемъ:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\zeta}\right)_0 + \omega^2 R\cos\lambda\cos\Lambda = -G\qquad (8)$$

Ускореніе въ началѣ относительныхъ координатъ, зависящее только отъ протяженія точки землей обозначаемъ черезъ g.

Въ дальнѣйшемъ приводятся интегралы полученныхъ дифференціальныхъ уравненій при двухъ основныхъ предположеніяхъ относительно начальныхъ условій движенія точки.

1) *Первое предположеніе:*

$$\xi_0 = 0 \qquad \xi'_0 = 0$$
$$\eta_0 = 0 \qquad \eta'_0 = 0$$
$$\zeta_0 = 0 \qquad \zeta'_0 = 0,$$

гдѣ значекъ $_0$ означаетъ, что величина относится къ моменту $t = 0$ и введено сокращенное обозначеніе производныхъ ($'$).

Въ этомъ случаѣ оси координатъ ξ, η и ζ выбраны такъ, что ξ и η расположены въ плоскости, касательной къ поверхности равнаго потенціала земного притяженія и вращенія, проходящей черезъ начало координатъ $\xi\eta\zeta$, ось ξ — въ плоскости меридіана и направлена къ экватору, а ось η направлена къ востоку; ось ζ — перпендикулярно къ поверхности ртутнаго горизонта, проходящаго черезъ начальную точку траекторіи. Координата ξ въ этомъ случаѣ опредѣляетъ, насколько точка при паденіи отклоняется отъ плоскости перваго вертикала, проходящаго черезъ начальное положеніе ея.

2) *Второе предположеніе.* При опытахъ, производящихся съ цѣлью опредѣленія отклоненія падающихъ тѣлъ отъ вертикальной линіи, наблюдается обыкновенно ихъ паденіе съ высоты h надъ поверхностью земли, что соотвѣтствуетъ начальнымъ условіямъ:

$$\xi_0 = 0 \qquad \xi'_0 = 0$$
$$\eta_0 = 0 \qquad \eta'_0 = 0$$
$$\zeta_0 = h \qquad \zeta'_0 = 0.$$

Въ этомъ случаѣ вертикальная линія опредѣляется, какъ перпендикуляръ, опущенный изъ начальнаго положенія точки на поверхность ртутнаго горизонта, находящагося въ той точкѣ, гдѣ кончается паденіе. Оси координатъ ξ η и ζ выбираются вообще такъ же, какъ и въ первомъ предположеніи съ тою только разницей, что и здѣсь горизонтъ, вертикальная линія и плоскость перваго вертикала относятся къ *нижней* точкѣ траекторіи. Величины ξ, η и ζ, относящіяся къ движенію точки при второмъ предполо-

женіи относительно начальныхъ условій мы будемъ для отличія обозначать черезъ Ξ, Υ и Z.

§ 3. *Предложенное Gauss'омъ рѣшеніе задачи и его недостатки.* Gauss, получивъ общія уравненія относительнаго движенія, аналогичныя уравненіямъ (5), отбросилъ въ нихъ нѣкоторые члены, не имѣющіе, по его мнѣнію, значенія и ограничился уравненіями вида:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d^2\xi}{dt^2} - 2\omega\sin\Lambda\,\frac{d\eta}{dt} = 0 \\ &\frac{d^2\eta}{dt^2} + 2\omega\sin\Lambda\,\frac{d\xi}{dt} + 2\omega\cos\Lambda\,\frac{d\zeta}{dt} = 0 \\ &\frac{d^2\zeta}{dt^2} - 2\omega\cos\Lambda\,\frac{d\eta}{dt} + G = 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Интегралы этихъ дифференціальныхъ уравненій при первомъ предположеніи относительно начальныхъ условій имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{G}{2}\sin\Lambda\cos\Lambda\left\{t^2 - \left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)^2\right\} \\ &\eta = \frac{G}{2\omega}\cos\Lambda\left\{t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right\} \\ &\zeta = -\frac{1}{2}Gt^2 + \frac{G}{2}\cos^2\Lambda\left\{t^2 - \left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

При второмъ предположеніи Ξ и Υ имѣютъ тотъ же видъ, что и ξ и η, а для Z получается

$$Z = h - \frac{1}{2}Gt^2 + \frac{G}{2}\cos^2\Lambda\left\{t^2 - \left(\frac{\sin\omega t}{\omega}\right)^2\right\}$$

Формулами (10) пользоваться неудобно, такъ какъ время паденія всегда невелико. Поэтому Gauss даетъ соотвѣтствующіе ряды, расположенные по степенямъ времени:

$$\left.\begin{aligned} &\xi = \frac{1}{6}G\omega^2\sin\Lambda\cos\Lambda\,t^4 + \ldots \\ &\eta = \frac{1}{3}G\omega\cos\Lambda\,t^3 + \ldots \\ &\zeta = -\frac{1}{2}Gt^2 + \frac{1}{6}G\omega^2\cos^2\Lambda\,t^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

Такимъ образомъ въ началѣ паденія $\xi > 0$ независимо отъ различія предположеній относительно начальныхъ условій, и точка отклоняется къ *экватору*.

Недостаточность полученнаго рѣшенія видна изъ того, что въ форму-

лахъ (11) фигурируютъ члены съ ω^2, тогда какъ члены того же порядка отброшены въ дифференціальныхъ уравненіяхъ.

Если же въ уравненіяхъ (5) сохранить всѣ члены лѣвыхъ частей, а правыя замѣнить соотвѣтственно черезъ 0, 0 и $-G$, то разложенія ихъ интеграловъ, полученныхъ при первомъ предположеніи, имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{8}\, G\omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, t^4 + \ldots \\ \eta &= \frac{1}{3}\, G\omega \cos\Lambda\, t^3 + \ldots \\ \zeta &= -\frac{1}{2}\, Gt^2 + \frac{1}{8}\, G\omega^2 \cos^2\Lambda\, t^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

и отличаются отъ полученныхъ Gauss'омъ коэффиціентами. Совершенно другое получается при второмъ предположеніи относительно начальныхъ условій, которымъ соотвѣтствуетъ разложеніе въ ряды вида:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \frac{1}{2}\, \omega^2 h \sin\Lambda \cos\Lambda\, t^2 + \frac{1}{8}\, \omega^2 (G - \omega^2 h) \sin\Lambda \cos\Lambda\, t^4 + \ldots \\ \Upsilon &= \frac{1}{3}\, \omega\, (G - \omega^2 h) \cos\Lambda\, t^3 + \ldots \\ Z &= -\frac{1}{2}\, (G - \omega^2 h \cos^2\Lambda)\, t^2 + \frac{1}{8}\, \omega^2 (G - \omega^2 h) \cos^2\Lambda\, t^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Здѣсь въ выраженіи Ξ появляются члены съ t^2. Изъ сказаннаго ясно, что для выясненія дѣйствительнаго движенія точки нельзя пользоваться приближенными дифференціальными уравненіями, а слѣдуетъ брать ихъ во всей полнотѣ. Въ настоящей работѣ интегралы дифференціальныхъ уравненій получаются въ видѣ рядовъ, расположенныхъ по степенямъ времени и при небольшомъ значеніи t сходящихся весьма быстро. Коэффиціенты членовъ разложенія получены съ полной точностью, причемъ каждый изъ результатовъ получался двумя способами по двумъ разнымъ системамъ основныхъ уравненій движенія. Сначала разсматривается частный случай: земля предполагается сферической и однородной, затѣмъ болѣе общій случай.

Глава II. **Рѣшеніе вопроса въ случаѣ сферической однородной земли.**

§ 4. Радіусъ земли обозначаемъ черезъ R; геоцентрическую широту мѣста земной поверхности, въ которомъ расположено начало координатъ ξ, η, ζ — черезъ λ, соотвѣтствующую географическую широту — черезъ Λ; ускореніе g относится къ поверхности земли и зависитъ только отъ протяженія точки землей; остальныя обозначенія — прежнія.

Въ такомъ случаѣ имѣемъ:

$$\left.\begin{aligned} G\cos\Lambda &= g\cos\lambda - \omega^2 R\cos\lambda \\ G\sin\Lambda &= g\sin\lambda \\ G\sin(\Lambda-\lambda) &= \omega^2 R\sin\lambda\cos\lambda \\ G\cos(\Lambda-\lambda) &= g - \omega^2 R\cos^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (14)$$

§ 5. *Рѣшеніе задачи по первому способу (формулы (1)).* Въ этомъ случаѣ уравненія абсолютнаго движенія имѣютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gR^2}{r^3}x \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gR^2}{r^3}y \\ \frac{d^2z}{dt^2} &= -\frac{gR^2}{r^3}z \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

гдѣ $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Начальнымъ условіямъ перваго предположенія соотвѣтствуютъ начальныя значенія абсолютныхъ координатъ и слагающихъ скоростей:

$$\left.\begin{aligned} x_0 &= R\cos\lambda \qquad & x'_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 & y'_0 &= \omega R\cos\lambda \\ z_0 &= R\sin\lambda & z'_0 &= 0 \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

Абсолютная траекторія точки представляетъ въ этомъ случаѣ сильно вытянутый эллипсисъ, афелій котораго совпадаетъ съ начальнымъ ея положеніемъ. Опредѣливъ вспомогательный уголъ E по уравненію:

$$E + \left(1-\frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda\right)\sin E = t\sqrt{\frac{g}{R}}\left(2-\frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda\right)^{\frac{3}{2}}$$

получаемъ абсолютныя координаты по формуламъ.

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cos\lambda(\cos E + e) \\ y &= a\sqrt{1-e^2}\sin E \\ z &= a\sin\lambda(\cos E + e), \\ \text{гдѣ}\quad a &= \frac{R}{2-\frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda};\quad e = 1-\frac{\omega^2 R}{g}\cos^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

Относительныя координаты ξ, η и ζ опредѣляются формулами (6).

При второмъ предположеніи относительно начальныхъ условій находимъ сначала широту λ_1 и разстояніе до центра земли R_1 той точки, изъ которой тѣло падаетъ, по формуламъ

$$\left.\begin{aligned} R_1 \sin(\lambda_1 - \lambda) &= \qquad h \sin(\Lambda - \lambda) \\ R_1 \cos(\lambda_1 - \lambda) &= R + h \cos(\Lambda - \lambda) \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

послѣ чего абсолютныя координаты получаются по предыдущимъ формуламъ съ тою разницей, что R и λ вездѣ замѣняются на R_1 и λ_1, а ξ, η и ζ въ формулахъ (6) на Ξ, Υ и Z.

Полученные такимъ образомъ интегралы въ конечномъ видѣ не удобны на практикѣ, и въ данномъ случаѣ предпочтительнѣе пользоваться разложеніемъ въ ряды.

Пользуясь сокращеннымъ обозначеніемъ производныхъ разныхъ порядковъ, получаемъ, послѣдовательно дифференцируя уравненія (15):

$$x'' = -\frac{gR^2}{r^3}\,x; \qquad x''' = -gR^2\left[\frac{x'}{r^3} - 3\,\frac{r'}{r^4}\,x\right];$$

$$x^{\text{IV}} = -gR^2\left[\frac{x''}{r^3} - 6\,\frac{r'}{r^4}\,x' + 12\,\frac{r'^2}{r^5}\,x - 3\,\frac{r''}{r^4}\,x\right]$$

$$y'' = -\frac{gR^2}{r^3}\,y; \qquad y''' = -gR^2\left[\frac{y'}{r^3} - 6\,\frac{r'}{r^4}\,y\right];$$

$$y^{\text{IV}} = -gR^2\left[\frac{y''}{r^3} - 6\,\frac{r'}{r^4}\,y' + 12\,\frac{r'^2}{r^5}\,y - 3\,\frac{r''}{r^4}\,y\right]$$

$$z'' = -\frac{gR^2}{r^3}\,z; \qquad z''' = -gR^2\left[\frac{z'}{r^3} - 3\,\frac{r'}{r^4}\,z\right];$$

$$z^{\text{IV}} = -gR^2\left[\frac{z''}{r^3} - 6\,\frac{r'}{r^4}\,z' + 12\,\frac{r'^2}{r^5}\,z - 3\,\frac{r''}{r^4}\,z\right]$$

Отсюда при начальныхъ условіяхъ перваго предположенія (формулы (16)), получаемъ:

$$x''_0 = -g\cos\lambda \qquad x'''_0 = 0 \qquad x^{\text{IV}}_0 = -\frac{2g^2}{R}\cos\lambda + 3g\omega^2\cos^3\lambda$$

$$y''_0 = 0 \qquad y'''_0 = -g\omega\cos\lambda \qquad y^{\text{IV}}_0 = 0$$

$$z''_0 = -g\sin\lambda \qquad z'''_0 = 0 \qquad z^{\text{IV}}_0 = -\frac{2g^2}{R}\sin\lambda + 3g\omega^2\sin\lambda\cos^2\lambda$$

По формулѣ Тейлора получаемъ разложеніе x, y и z въ степенные ряды. Подставляя ихъ въ формулы (6) находимъ

$$\xi = \sin\Lambda \Big\{ R\cos\lambda - \frac{1}{2} g\cos\lambda\, t^2 + \Big[-\frac{2g^2}{R}\cos\lambda + 3g\omega^2\cos^3\lambda \Big] \frac{t^4}{24} + \ldots \Big\} \cdot$$

$$\Big\{ 1 - \frac{1}{2}\,\omega^2 t^2 + \frac{1}{24}\,\omega^4 t^4 - \ldots \Big\} +$$

$$+ \sin\Lambda \Big\{ \omega R\cos\lambda t - \frac{1}{6} g\omega\cos\lambda t^3 + \ldots \Big\} \cdot \Big\{ \omega t - \frac{1}{6}\,\omega^3 t^3 + \ldots \Big\} -$$

$$- \cos\Lambda \Big\{ R\sin\lambda - \frac{1}{2} g\sin\lambda t^2 + \Big[-\frac{2g^2}{R}\sin\lambda + 3g\omega^2\sin\lambda\cos^2\lambda \Big] \frac{t^4}{24} - \ldots \Big\} -$$

$$- R\sin(\Lambda - \lambda) =$$

$$= \frac{t^2}{2}\big[-g\sin(\Lambda-\lambda) + \omega^2 R\cos\lambda\sin\Lambda \big] + t^4 \Big[-\frac{1}{12}\frac{g^2}{R}\sin(\Lambda-\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{8} g\omega^2\cos^2\lambda\sin(\Lambda-\lambda) + \frac{1}{12} g\omega^2\cos\lambda\sin\Lambda - \frac{1}{8}\,\omega^4 R\cos\lambda\sin\Lambda \Big] + \ldots =$$

$$= -\frac{t^4}{8}\,\frac{g}{G}\,\omega^4 R\sin^3\lambda\cos\lambda + \ldots$$

$$\eta = \Big\{ -R\cos\lambda + \frac{1}{2} g\cos\lambda\, t^2 + \Big[\frac{2g^2}{R}\cos\lambda - 3g\omega^2\cos^3\lambda \Big] \frac{t^4}{24} + \ldots \Big\} \cdot$$

$$\Big\{ \omega t - \frac{1}{6}\,\omega^3 t^3 + \ldots \Big\} +$$

$$+ \Big\{ \omega R\cos\lambda t - \frac{1}{6} g\omega\cos\lambda t^3 + \ldots \Big\} \cdot \Big\{ 1 - \frac{1}{2}\,\omega^2 t^2 + \frac{1}{24}\,\omega^4 t^4 - \ldots \Big\} = \qquad (19)$$

$$= + \frac{1}{3}\, t^3 \omega G\cos\Lambda + \ldots$$

$$\zeta = \cos\Lambda \Big\{ R\cos\lambda - \frac{1}{2} g\cos\lambda\, t^2 + \Big[-\frac{2g^2}{R}\cos\lambda + 3g\omega^2\cos^3\lambda \Big] \frac{t^4}{24} + \ldots \Big\} \cdot$$

$$\Big\{ 1 - \frac{1}{2}\,\omega^2 t^2 + \frac{1}{24}\,\omega^4 t^4 - \ldots \Big\} +$$

$$+ \cos\Lambda \Big\{ \omega R\cos\lambda\, t - \frac{1}{6} g\omega\cos\lambda\, t^3 + \ldots \Big\} \cdot \Big\{ \omega t - \frac{1}{6}\,\omega^3 t^3 + \ldots \Big\} +$$

$$+ \sin\Lambda \Big\{ R\sin\lambda - \frac{1}{2} g\sin\lambda\, t^2 + \Big[-\frac{2g^2}{R}\sin\lambda + 3g\omega^2\sin\lambda\cos^2\lambda \Big] \frac{t^4}{24} + \ldots \Big\} -$$

$$- R\sin(\Lambda - \lambda) =$$

$$= -\frac{1}{2}\, t^2 \big[g\cos(\Lambda-\lambda) - \omega^2 R\cos\lambda\cos\Lambda \big] + t^4 \Big[-\frac{1}{12}\frac{g^2}{R}\cos(\Lambda-\lambda) +$$

$$+ \frac{1}{8} g\omega^2\cos^2\lambda\cos(\Lambda-\lambda) + \frac{1}{12} g\omega^2\cos\lambda\cos\Lambda - \frac{1}{8} R\omega^4\cos\lambda\cos\Lambda \Big] + \ldots =$$

$$= -\frac{1}{2}\, G t^2 + \frac{t^4}{24} \Big\{ -\frac{2g^3}{RG} + \frac{\omega^2}{G}\cos^2\lambda \big[7g^2 - 5gR\omega^2 + 3R^2\omega^4 \big] -$$

$$- \frac{3g}{G}\,\omega^4 R\cos^4\lambda \Big\} + \ldots$$

§ 6. *Рѣшеніе задачи по второму способу (формулы (3)).* Приведенные выше результаты можно получить и по формуламъ (3), причемъ разложеніе легко можетъ быть продолжено еще нѣсколько дальше. Изъ нихъ послѣдовательно находимъ:

$$X'' = 2\omega Y' + \omega^2 X - gR^2 \frac{X}{r^3} \qquad X''' = 2\omega Y'' + \omega^2 X' - gR^2 \left[\frac{X'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^4} X\right]$$

$$X^{IV} = 2\omega Y''' + \omega^2 X'' - gR^2 \left[\frac{X''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^3} X' - 3\frac{r''}{r^4} X + 12\frac{r'^2}{r^5} X\right]$$

$$Y'' = -2\omega X' + \omega^2 Y - gR^2 \frac{Y}{r^3} \qquad Y''' = -2\omega X'' + \omega^2 Y' - gR^2 \left[\frac{Y'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^4} Y\right]$$

$$Y^{IV} = -2\omega X''' + \omega^2 Y'' - gR^2 \left[\frac{Y''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^3} Y' - 3\frac{r''}{r^4} Y + 12\frac{r'^2}{r^5} Y\right]$$

$$Z'' = \qquad -gR^2 \frac{Z}{r^3} \qquad Z''' = \qquad -gR^2 \left[\frac{Z'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^4} Z\right]$$

$$Z^{IV} = \qquad -gR^2 \left[\frac{Z''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^3} Z' - 3\frac{r''}{r^4} Z + 12\frac{r'^2}{r^5} Z\right]$$

$$X^{V} = 2\omega Y^{IV} + \omega^2 X''' - gR^2 \left\{\frac{X'''}{r^3} - 9\frac{r'}{r^4} X'' + 36\frac{r'^2}{r^5} X' - 9\frac{r''}{r^4} X' - 60\frac{r'^3}{r^6} X + 36\frac{r'r''}{r^5} X - \frac{3r'''}{r^4} X\right\}$$

$$Y^{V} = -2\omega X^{IV} + \omega^2 Y''' - gR^2 \left\{\frac{Y'''}{r^3} - 9\frac{r'}{r^4} Y'' + 36\frac{r'^2}{r^5} Y' - 9\frac{r''}{r^4} Y' - 60\frac{r'^3}{r^6} Y + 36\frac{r'r''}{r^5} Y - \frac{3r'''}{r^4} Y\right\}$$

$$Z^{V} = \qquad -gR^2 \left\{\frac{Z'''}{r^3} - 9\frac{r'}{r^4} Z'' + 36\frac{r'^2}{r^5} Z' - 9\frac{r''}{r^4} Z' - 60\frac{r'^3}{r^6} Z + 36\frac{r'r''}{r^5} Z - \frac{3r'''}{r^4} Z\right\}$$

$$X^{VI} = 2\omega Y^{V} + \omega^3 X^{IV} - gR^2 \left\{\frac{X^{IV}}{r^3} - 12\frac{r'}{r^4} X''' + 72\frac{r'^2}{r^5} X'' - 18\frac{r''}{r^4} X'' + 144\frac{r'r''}{r^5} X' - \right.$$
$$\left. - 240\frac{r'^3}{r^6} X' - 12\frac{r'''}{r^4} X' - 360\frac{r'^2 r''}{r^6} X + 48\frac{r'r'''}{r^5} X + 360\frac{r'^4}{r^7} X + 36\frac{r''^2}{r^5} X - \frac{3r^{IV}}{r^4} X\right\}$$

$$Y^{VI} = -2\omega Y^{V} + \omega^2 Y^{IV} - gR^2 \left\{\frac{Y^{IV}}{r^2} - 12\frac{r'}{r^4} Y''' + 72\frac{r'^2}{r^5} Y'' - 18\frac{r''}{r^4} Y'' + 144\frac{r'r''}{r^5} Y' - \right.$$
$$\left. - 240\frac{r'^3}{r^6} Y' - 12\frac{r'''}{r^4} Y' - 360\frac{r'^2 r''}{r^6} Y + 48\frac{r'r'''}{r^5} Y + 360\frac{r'^4}{r^7} Y + 36\frac{r''^2}{r^5} Y - \frac{3r^{IV}}{r^4} Y\right\}$$

$$Z^{VI} = -gR^2 \left\{\frac{Z^{IV}}{r^3} - 12\frac{r'}{r^4} Z''' + 72\frac{r'^2}{r^5} Z'' - 18\frac{r''}{r^4} Z'' + 144\frac{r'r''}{r^5} Z' - 240\frac{r'^3}{r^6} Z' - \right.$$
$$\left. - 12\frac{r'''}{r^4} Z' - 360\frac{r'^2 r''}{r^6} Z + 48\frac{r'r'''}{r^5} Z + 360\frac{r'^4}{r^7} Z + 36\frac{r''^2}{r^5} Z - \frac{3r^{IV}}{r^3} Z\right\}$$

При начальныхъ условіяхъ (первое предположеніе)

$$X_0 = R\cos\lambda \qquad X'_0 = 0$$
$$Y_0 = 0 \qquad Y'_0 = 0$$
$$Z_0 = R\sin\lambda \qquad Z'_0 = 0$$

находимъ

$$X_0'' = -G\cos\lambda \qquad X_0''' = 0$$
$$Y_0'' = 0 \qquad Y_0''' = 2\omega R\cos\lambda$$
$$Z_0'' = -G\sin\lambda \qquad Z_0''' = 0$$

$$X_0^{\text{IV}} = 2g\omega^2\cos\lambda - 3\omega^4 R\cos\lambda - \frac{2g^2}{R}\cos\lambda + 3g\omega^2\cos^3\lambda$$
$$Y_0^{\text{IV}} = 0$$
$$Z_0^{\text{IV}} = \qquad -\frac{2g^2}{R}\sin\lambda + 3g\omega^2\sin\lambda\cos^2\lambda$$

$$X_0^{\text{V}} = 0$$
$$Y_0^{\text{V}} = \frac{2g^2}{R}\omega\cos\lambda - 6g\omega^3\cos^3\lambda + 5\omega^5 R\cos\lambda$$
$$Z_0^{\text{V}} = 0$$

$$X_0^{\text{VI}} = \left\{-22\frac{g^3}{R^2} - 18\frac{\omega^2 g^2}{R} + 5g\omega^4 + 5R\omega^6\right\}\cos\lambda + \left\{66\frac{g^2\omega^2}{R} + 9g\omega^4\right\}\cos^3\lambda - 45g\omega^4\cos^5\lambda$$
$$Y_0^{\text{VI}} = 0$$
$$Z_0^{\text{VI}} = \left\{-22\frac{g^3}{R^2}\right\}\sin\lambda + \left\{66\frac{\omega^2 g^2}{R}\right\}\cos^2\lambda\sin\lambda - 45g\omega^4\cos^4\lambda\sin\lambda$$

Отсюда, пользуясь формулами

$$\left.\begin{aligned} \xi &= (X - X_0)\sin\lambda - (Z - Z_0)\cos\lambda \\ \eta &= Y \\ \zeta &= (X - X_0)\cos\lambda + (Z - Z_0)\sin\lambda \end{aligned}\right\} \qquad (20)$$

получаемъ разложенія ξ, η и ζ съ точностью то членовъ съ t^6 включительно:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= -\frac{t^4}{8}\frac{g}{G}\omega^4 R\sin^3\lambda\cos\lambda + \frac{t^6}{720}\frac{g}{G}\sin\lambda\left\{\left[-40\frac{\omega^2 g^2}{R} + 5g\omega^4 + \right.\right. \\ &\qquad \left.\left. + 5R\omega^6\right]\cos\lambda + 75g\omega^4\cos^3\lambda - 45R\omega^6\cos^5\lambda\right\} + \ldots \\ \eta &= + \frac{t^3}{3}G\omega\cos\lambda + \frac{t^5}{120}\omega\cos\lambda\left\{\frac{2g^2}{R} - 6g\omega^2\cos^2\lambda + 4R\omega^4\right\} + \ldots \\ \zeta &= -\frac{1}{2}Gt^2 + \frac{t^4}{24}\frac{g}{G}\left\{-\frac{2g^2}{R} + \left[7g\omega^2 - 5R\omega^4 + 3\frac{R^2\omega^6}{g}\right]\cos^2\lambda - 3R\omega^4\cos^4\lambda\right\} + \\ &\qquad + \frac{t^6}{720}\frac{g}{G}\left\{-22\frac{g^3}{R^2} + \left[70\frac{\omega^2 g^2}{R} + 23g\omega^4 - 5\frac{R^2\omega^8}{g}\right]\cos^2\lambda + \right. \\ &\qquad \left. + \left[-102g\omega^4 - 9R\omega^6\right]\cos^4\lambda + 45R\omega^6\cos^6\lambda\right\} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

§ 7. *Рѣшеніе задачи по третьему способу (формулы (5)).* При рѣшеніи задачи о траекторіи точки, падающей съ высоты h (второе предположеніе относительно начальныхъ условій), наиболѣе удобными являются уравненія (5), принимающія въ разсматриваемомъ случаѣ видъ:

$$\xi'' = 2\omega \sin\Lambda\, \eta' + \omega^2 \sin^2\Lambda\, \xi + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \zeta - g\frac{R^2}{r^3}\left[\xi + R\sin(\Lambda - \lambda)\right] + R\omega^2 \cos\lambda \sin\Lambda$$

$$\eta'' = -2\omega \sin\Lambda\, \xi' - 2\omega \cos\Lambda\, \zeta' + \omega^2 \eta - g\frac{R^2}{r^3}\eta$$

$$\zeta'' = 2\omega \cos\Lambda\, \eta' + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \xi + \omega^2 \cos^2\Lambda\, \zeta - g\frac{R^2}{r^3}\left[\zeta + R\cos(\Lambda - \lambda)\right] + R\omega^2 \cos\lambda \cos\Lambda$$

Изъ нихъ послѣдовательнымъ дифференцированіемъ находимъ:

$$\xi''' = 2\omega \sin\Lambda\, \eta'' + \omega^2 \sin^2\Lambda\, \xi' + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \zeta' - gR^2\left\{\frac{\xi'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^4}\left[\xi + R\sin(\Lambda-\lambda)\right]\right\}$$

$$\eta''' = -2\omega \sin\Lambda\, \xi'' - 2\omega \cos\Lambda\, \zeta'' + \omega^2 \eta' - gR^2\left\{\frac{\eta'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^3}\eta\right\}$$

$$\zeta''' = 2\omega \cos\Lambda\, \eta'' + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \xi' + \omega^2 \cos^2\Lambda\, \zeta' - gR^2\left\{\frac{\zeta'}{r^3} - 3\frac{r'}{r^4}\left[\zeta + R\cos(\Lambda-\lambda)\right]\right\}$$

$$\xi^{IV} = 2\omega \sin\Lambda\, \eta''' + \omega^2 \sin^2\Lambda\, \xi'' + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \zeta'' - gR^2\left\{\frac{\xi''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^4}\xi' + 12\frac{r'^2}{r^5}\left[\xi + R\sin(\Lambda-\lambda)\right] - 3\frac{r''}{r^4}\left[\xi + R\sin(\Lambda-\lambda)\right]\right\}$$

$$\eta^{IV} = -2\omega \sin\Lambda\, \xi''' - 2\omega \cos\Lambda\, \zeta''' + \omega^2 \eta'' - gR^2\left\{\frac{\eta''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^4}\eta' + 12\frac{r'^2}{r^5}\eta - 3\frac{r''}{r^4}\eta\right\}$$

$$\zeta^{IV} = 2\omega \cos\Lambda\, \eta''' + \omega^2 \sin\Lambda \cos\Lambda\, \xi'' + \omega^2 \cos^2\Lambda\, \zeta'' - gR^2\left\{\frac{\zeta''}{r^3} - 6\frac{r'}{r^4}\zeta' + 12\frac{r'^2}{r^5}\left[\zeta + R\cos(\Lambda-\lambda)\right] - 3\frac{r''}{r^4}\left[\zeta + R\cos(\Lambda-\lambda)\right]\right\}$$

Пользуясь начальными условіями

$$\xi_0 = 0 \qquad \xi'_0 = 0$$
$$\eta_0 = 0 \qquad \eta'_0 = 0$$
$$\zeta_0 = h \qquad \zeta'_0 = 0,$$

получаемъ:

$$\xi''_0 = \omega^2 h \sin\Lambda \cos\Lambda + \omega^2 R \cos\lambda \sin\Lambda - g\frac{R^2}{r_0^3}\sin(\Lambda - \lambda)$$

$$\eta''_0 = 0$$

$$\zeta''_0 = \omega^2 h \cos^2\Lambda + \omega^2 R \cos\lambda \cos\Lambda - g\frac{R^2}{r_0^3}\left[h + R\cos(\Lambda - \lambda)\right]$$

$$\xi_0''' = 0$$

$$\eta_0''' = 2g\omega \left(\frac{R}{r_0}\right)^3 \cos\lambda - 2\omega^3 R\cos\lambda + 2g\omega \frac{R^2 h}{r_0^3}\cos\Lambda - 2\omega^3 h\cos\Lambda$$

$$\zeta_0''' = 0$$

$$\xi_0^{\mathrm{IV}} = 2g\omega^2\left(\frac{R}{r_0}\right)^3\cos\lambda\sin\Lambda - 3R\omega^4\cos\lambda\sin\Lambda + 3g\omega^2\left(\frac{R}{r_0}\right)^5\cos^2\lambda\sin(\Lambda-\lambda) +$$
$$+ \frac{g^2}{r_0}\left(\frac{R}{r_0}\right)^5\sin(\Lambda-\lambda) - \frac{3g^2}{r_0}\left(\frac{R}{r_0}\right)^7\sin(\Lambda-\lambda) - 3\omega^4 h\sin\Lambda\cos\Lambda +$$
$$+ 2g\omega^2\left(\frac{R}{r_0}\right)^2\frac{h}{r_0}\left(\sin\Lambda\cos\Lambda + 3\cos\lambda\cos\Lambda\sin(\Lambda-\lambda)\right) -$$
$$- \frac{6g^2}{r_0}\left(\frac{R}{r_0}\right)^6\frac{h}{r_0}\sin(\Lambda-\lambda)\cos(\Lambda-\lambda) + 3g\omega^2\left(\frac{R}{r_0}\right)^3\left(\frac{h}{r_0}\right)^2\cos^2\Lambda\sin(\Lambda-\lambda) -$$
$$- \frac{3g^2}{r_0}\left(\frac{R}{r_0}\right)^5\left(\frac{h}{r_0}\right)^2$$

$$\eta_0^{\mathrm{IV}} = 0$$

$$\zeta_0^{\mathrm{IV}} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Замѣчая, что отношеніе $\frac{h}{R}$ есть для обычныхъ случаевъ паденія вблизи земной поверхности малая величина, разлагаемъ $r_0 = \sqrt{R^2 + 2Rh\cos(\Lambda-\lambda) + h^2}$ въ рядъ по степенямъ $\frac{h}{R}$. Въ такомъ случаѣ формулы, служащія для опредѣленія Ξ, Υ и Z пріобрѣтаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned}
\Xi &= \frac{t^2}{2}\,\frac{h}{R}\Big\{\omega^2 R\sin\Lambda\cos\Lambda + 3g\sin(\Lambda-\lambda)\cos(\Lambda-\lambda) - \\
&\quad - g\sin(\Lambda-\lambda)\frac{h}{R}\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right] + \ldots\Big\} + \\
&\quad + \frac{t^4}{24}\Big\{-3\,\frac{g}{G}\,\omega^4 R\sin^3\lambda\cos\lambda + \ldots\Big\} + \ldots \\
\Upsilon &= \frac{t^3}{6}\Big\{2\omega G\cos\Lambda + \frac{h}{R}\Big[\Big(-\frac{4g^2\omega}{G} - \frac{4gR\omega^3}{G} + \frac{2R^2\omega^5}{G}\Big)\cos\lambda - \\
&\qquad\qquad - 6gR\,\frac{\omega^3}{G}\cos^3\lambda\Big] + \ldots\Big\} + \ldots \\
Z &= \frac{t^2}{2}\Big\{-G + \frac{h}{R}\left[2g + \omega^2 R\cos^2\Lambda - 3g\sin^2(\Lambda-\lambda)\right] + \ldots\Big\} + \ldots
\end{aligned}\right\} \quad (22)$$

§ 8. *Измѣненіе направленія вертикальной линіи и ускоренія силы тяжести съ поднятіемъ надъ поверхностью земли.* Вмѣсто полученныхъ формулъ (22) можно воспользоваться нѣсколько иными, если ввести въ разсмотрѣніе зависимость между Ξ, Υ и Z и ξ, η и ζ. Формулами (14) опредѣляется географическая широта Λ и ускореніе силы тяжести G въ нижней точкѣ траекторіи (началѣ координатъ $\Xi\,\Upsilon\,Z$). На высотѣ h надъ этой точкой

тѣ же величины имѣютъ нѣсколько иныя значенія Λ_1 и G_1, для вычисленія которыхъ слѣдуетъ въ формулахъ (14) замѣнить R и λ соотвѣтствующими верхней точкѣ величинами R_1 и λ_1 по формуламъ

$$R_1 \sin\lambda_1 = R\sin\lambda + h\sin\Lambda$$
$$R_1 \cos\lambda_1 = R\cos\lambda + h\cos\Lambda.$$

Такимъ образомъ, принимая во вниманіе, что и g мѣняется съ измѣненіемъ разстоянія отъ центра земли, получаемъ формулы:

$$G_1 \sin\Lambda_1 = gR^2 \frac{R\sin\lambda + h\sin\Lambda}{[R^2 + 2Rh\cos(\Lambda-\lambda) + h^2]^{\frac{3}{2}}}$$
$$G_1 \cos\Lambda_1 = gR^2 \frac{R\cos\lambda + h\cos\Lambda}{[R^2 + 2Rh\cos(\Lambda-\lambda) + h^2]^{\frac{3}{2}}} - \omega^2 R\cos\lambda - \omega^2 h\cos\Lambda$$

изъ которыхъ, разлагая въ ряды по степенямъ $\frac{h}{R}$, находимъ выраженія:

$$\left.\begin{aligned} G_1\sin(\Lambda_1-\Lambda) &= \omega^2 h\sin\Lambda\cos\Lambda + g\frac{h}{R}\left\{3\sin(\Lambda-\lambda)\cos(\Lambda-\lambda)\right\} - \\ &\quad - g\left(\frac{h}{R}\right)^2 \sin(\Lambda-\lambda)\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right] + \ldots \\ G_1\cos(\Lambda_1-\Lambda) &= G - \omega^2 h\cos^2\Lambda + g\frac{h}{R}\left\{1 - 3\cos^2(\Lambda-\lambda)\right\} - \\ &\quad - g\left(\frac{h}{R}\right)^2\left\{3\cos(\Lambda-\lambda) - \cos(\Lambda-\lambda)\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right]\right\} + \ldots \end{aligned}\right\} \quad (23)$$

Зависимость между координатами, получающимися при двухъ разныхъ предположеніяхъ относительно начальныхъ условій движенія, имѣетъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \xi\cos(\Lambda_1-\Lambda) - \zeta\sin(\Lambda_1-\Lambda) \\ \Upsilon &= \eta \\ Z &= h + \xi\sin(\Lambda_1-\Lambda) + \zeta\cos(\Lambda_1-\Lambda) \end{aligned}\right\} \quad (24).$$

Значенія ξ, η и ζ получаются по формуламъ (21) съ тою разницей, что всѣ фигурирующія въ нихъ величины должны быть отнесены къ верхней части траекторіи, находящейся на высотѣ h, а не къ началу координатъ $\Xi\Upsilon Z$ (земной поверхности), какъ въ выраженіяхъ (22).

§ 9. *Случай паденія тѣла въ шахту.* Въ томъ случаѣ, когда разсматривается движеніе точки не надъ земной поверхностью, какъ выше, а въ шахтѣ, прорытой въ самой землѣ, результаты получаются нѣсколько

отличающіеся отъ предыдущихъ. Предполагая попрежнему землю сферической и однородной, находимъ дифференціальныя уравненія абсолютнаго движенія

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 x}{dt^2} &= -\frac{g}{R}\,x \\ \frac{d^2 y}{dt^2} &= -\frac{g}{R}\,y \\ \frac{d^2 z}{dt^2} &= -\frac{g}{R}\,z \end{aligned}\right\} \qquad (25)$$

которыя и интегрируемъ разложеніемъ въ ряды по степенямъ времени при начальныхъ условіяхъ

$$\begin{aligned} x_0 &= R\cos\lambda & x_0' &= 0 \\ y_0 &= 0 & y_0' &= R\omega\cos\lambda \\ z_0 &= R\sin\lambda & z_0' &= 0, \end{aligned}$$

соотвѣтствующихъ первому предположенію.

Поступая совершенно такъ же, какъ при разсмотрѣніи вопроса о движеніи надъ поверхностью земли, получаемъ

$$\left.\begin{aligned} \xi &= +\frac{t^4}{8}\,\omega^2 G\sin\Lambda\cos\Lambda - \frac{t^6}{144}\,\omega^2\left(\frac{2g}{R}+\omega^2\right)G\sin\Lambda\cos\Lambda + \ldots \\ \eta &= +\frac{t^3}{3}\,\omega G\cos\Lambda - \frac{t^5}{30}\,\omega\left(\frac{g}{R}+\omega^2\right)G\cos\Lambda + \ldots \\ \zeta &= -\frac{1}{2}\,Gt^2 + \frac{t^4}{24}\left[\frac{gG}{R} + 3\omega^2 G\cos^2\Lambda\right] - \\ &\quad - \frac{t^6}{720}\left(\frac{g^2 G}{R^2} + 5\omega^2\left[\frac{2g}{R}+\omega^2\right]G\cos^2\Lambda\right) + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

При второмъ предположеніи относительно начальныхъ условій получаемъ:

$$\left.\begin{aligned} \Xi &= \frac{t^2}{2}\,\frac{h}{R}\Big\{\omega^2 R\sin\Lambda\cos\Lambda + 3g\sin(\Lambda-\lambda)\cos(\Lambda-\lambda) - \\ &\quad - g\sin(\Lambda-\lambda)\,\frac{h}{R}\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right] + \ldots\Big\} + \\ &\quad + \frac{t^4}{24}\Big\{3\omega^2 G\sin\Lambda\cos\Lambda + \ldots\Big\} + \ldots \\ \Upsilon &= \frac{t^3}{6}\Big\{2\omega G\cos\Lambda + \frac{h}{R}\Big[\Big(-\frac{4g^2\omega}{G} - \frac{4gR\omega^2}{G} + \frac{2R^2\omega^5}{G}\Big)\cos\lambda - \\ &\quad - 6gR\,\frac{\omega^3}{G}\cos^3\lambda\Big] + \ldots\Big\} + \ldots \\ Z &= \frac{t^2}{2}\Big\{G + \frac{h}{R}\Big[2g + \omega^2 R\cos^2\Lambda - 3g\sin^2(\Lambda-\lambda)\Big] + \ldots\Big\} + \ldots \end{aligned}\right\} \qquad (27).$$

Здѣсь величины R, λ, Λ и G относятся къ нижней точкѣ траекторіи (началу координатъ Ξ, Z Υ, находящемуся на глубинѣ h).

§ 10. *Измѣненіе направленія вертикальной линіи и ускоренія силы тяжести съ опусканіемъ въ глубь земли.* Потенціалъ силы тяжести W, зависящей отъ протяженія и вращенія земли въ данномъ случаѣ внутри земли опредѣляется формулой

$$W = -\frac{1}{2}\frac{g}{R}(X^2 + Y^2 + Z^2) + \frac{1}{2}\omega^2(X^2 + Y^2).$$

Найдя частныя производныя W по X и Z и полагая $Y = 0$, получаемъ слагающія полнаго ускоренія силы тяжести

$$G\sin\Lambda = \frac{\partial W}{\partial Z} = -\frac{g}{R}Z$$

$$G\cos\Lambda = \frac{\partial W}{\partial X} = -\left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)X.$$

Для поверхности земли $X = R\cos\lambda$; $Z = R\sin\lambda$; для точки на глубинѣ H

$$X = R\cos\lambda - H\cos\Lambda$$

$$Z = R\sin\lambda - H\sin\Lambda,$$

и для опредѣленія соотвѣтствующихъ этой глубинѣ величинѣ G_1 и Λ_1 имѣемъ равенства:

$$\left.\begin{aligned} G_1\sin\Lambda_1 &= \frac{g}{R}[R\sin\lambda - H\sin\Lambda] \\ G_1\cos\Lambda_1 &= \left(\frac{g}{R} - \omega^2\right)[R\cos\lambda - H\cos\Lambda] \\ G_1\sin(\Lambda_1 - \Lambda) &= -\omega^2 H\sin\Lambda\cos\Lambda \\ G_1\cos(\Lambda_1 - \Lambda) &= G - \frac{g}{R}H + \omega^2 H\cos^2\Lambda \end{aligned}\right\} \quad (28).$$

Искомыя Ξ, Υ и Z опредѣляются формулами (24). Координаты ξ, η и ζ находятся изъ выраженій (26), въ которыхъ всѣ величины отнесены къ поверхности земли.

Глава III. Болѣе общій случай.

§ 11. *Рѣшеніе задачи въ болѣе общемъ случаѣ.* Въ предыдущей главѣ былъ разсмотрѣнъ случай движенія точки подъ вліяніемъ силы притяженія землей, имѣющей потенціалъ

$$V = \frac{gR^2}{r}$$

и полный потенціалъ силы тяжести

$$W = \frac{gR^2}{r} + \frac{1}{2}\,\omega^2\,r^2\cos^2\lambda.$$

Эти выраженія представляютъ только первое приближеніе въ томъ случаѣ, если не считать землю сферической и однородной, болѣе же точное выраженіе имѣетъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} V &= \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{2r^3}(1 - 3\sin^2\lambda) \\ W &= \frac{\alpha}{r} + \frac{\beta}{2r^3}(1 - 3\sin^2\lambda) + \frac{1}{2}\,\omega^2\,r^2\cos^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

гдѣ α и β — постоянныя; α зависитъ отъ массы земли, β отъ моментовъ инерціи относительно экваторіальной и полярной оси. Распредѣленіе массъ предполагается симметричнымъ относительно оси вращенія земли.

Изъ уравненій (29) получаемъ частныя производныя W:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial X} &= \frac{X}{r}\left\{-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^4}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right)\right\} + \omega^2 X \\ \frac{\partial W}{\partial Y} &= \frac{Y}{r}\left\{-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^4}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right)\right\} \\ \frac{\partial W}{\partial Z} &= \frac{Z}{r}\left\{-\frac{\alpha}{r^2} + \frac{\beta}{r^4}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

и формулы для опредѣленія географической широты Λ и ускоренія силы тяжести G:

$$\left.\begin{aligned} G\sin\Lambda &= \left\{\frac{\alpha}{R^2} - \frac{3\beta}{R^4} + \frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\right\}\sin\lambda \\ G\cos\Lambda &= \left\{\frac{\alpha}{R^2} - \frac{6\beta}{R^4} - \omega^2 R + \frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\right\}\cos\lambda \\ G\sin(\Lambda - \lambda) &= \left\{\frac{3\beta}{R^4} + \omega^2 R\right\}\sin\lambda\cos\lambda \\ G\cos(\Lambda - \lambda) &= \frac{\alpha}{R^2} - \frac{3\beta}{R^4} + \left\{\frac{9}{2}\,\frac{\beta}{R^4} - \omega^2 R\right\}\cos^2\lambda \end{aligned}\right\} \quad (31)$$

Дифференціальныя уравненія (3) въ этомъ случаѣ принимаютъ видъ:

$$\left.\begin{aligned} X'' &= 2\omega Y' + \omega^2 X - \frac{\alpha X}{r^3} + \frac{\beta X}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) \\ Y'' &= -2\omega X' + \omega^2 Y - \frac{\alpha Y}{r^3} + \frac{\beta Y}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) \\ Z'' &= \qquad\qquad\qquad\quad - \frac{\alpha Z}{r^3} + \frac{\beta Z}{r^5}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) \end{aligned}\right\} \quad (32)$$

Изъ нихъ находимъ послѣдовательнымъ дифференцированіемъ:

$$X''' = 2\omega Y'' + \omega^2 X' - \frac{\alpha X'}{r^3} + 3\alpha\frac{Xr'}{r^4} + \frac{\beta X'}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 5\beta\frac{Xr'}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 15\frac{\beta X}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda'$$

$$Y''' = -2\omega X'' + \omega^2 Y' - \frac{\alpha Y'}{r^3} + 3\alpha\frac{Yr'}{r^4} + \frac{\beta Y'}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 5\beta\frac{Yr'}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 15\frac{\beta Y}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda'$$

$$Z''' = \qquad - \frac{\alpha Z'}{r^3} + 3\alpha\frac{Zr'}{r^4} + \frac{\beta Z'}{r^5}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 5\beta\frac{Zr'}{r^6}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 15\frac{\beta Z}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda'$$

$$X^{IV} = 2\omega Y''' + \omega^2 X'' - \frac{\alpha X''}{r^3} + 6\alpha\frac{X'r'}{r^4} + 3\alpha\frac{Xr''}{r^4} - 12\alpha\frac{Xr'^2}{r^5} + \frac{\beta X''}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 10\beta\frac{X'r'}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 30\beta\frac{X'}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' - 5\beta\frac{Xr''}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) +$$

$$+ 30\beta\frac{Xr'^2}{r^7}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) - 150\beta\frac{Xr'}{r^6}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' + 15(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\frac{\beta X}{r^5}\lambda'^2 +$$

$$+ 15\frac{\beta X}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda''$$

$$Y^{IV} = -2\omega X''' + \omega^2 Y'' - \frac{\alpha Y''}{r^3} + 6\alpha\frac{Y'r'}{r^4} + 3\alpha\frac{Yr''}{r^4} - 12\alpha\frac{Yr'^2}{r^5} + \frac{\beta Y''}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 10\beta\frac{Y'r'}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 30\beta\frac{Y'}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' - 5\beta\frac{Yr''}{r^6}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) +$$

$$+ 30\beta\frac{Yr'^2}{r^7}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) - 150\beta\frac{Yr'}{r^6}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' + 15(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\frac{\beta Y}{r^5}\lambda'^2 +$$

$$+ 15\frac{\beta Y}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda''$$

$$Z^{IV} = \qquad - \frac{\alpha Z''}{r^3} + 6\alpha\frac{Z'r'}{r^4} + 3\alpha\frac{Zr''}{r^4} - 12\alpha\frac{Zr'^2}{r^5} + \frac{\beta Z''}{r^5}\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$

$$- 10\beta\frac{Z'r'}{r^6}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + 30\beta\frac{Z'}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' - 5\beta\frac{Zr''}{r^6}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) +$$

$$+ 30\beta\frac{Zr'^2}{r^7}\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) - 150\beta\frac{Zr'}{r^6}\sin\lambda\cos\lambda\lambda' + 15(\cos^2\lambda - \sin^2\lambda)\frac{\beta Z}{r^5}\lambda'^2 +$$

$$+ 15\frac{\beta Z}{r^5}\sin\lambda\cos\lambda\lambda''.$$

При начальныхъ условіяхъ

$$X_0 = R\cos\lambda \qquad X_0' = 0$$
$$Y_0 = 0 \qquad Y_0' = 0$$
$$Z_0 = R\sin\lambda \qquad Z_0' = 0$$

получаемъ

$$r_0' = 0 \qquad r_0'' = -\frac{\alpha}{R^2} + 3\frac{\beta}{R^4} - \frac{9}{2}\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda + \omega^2 R\cos^2\lambda$$

$$\lambda_0' = 0 \qquad R\cos\lambda\lambda_0'' = Z_0'' - r_0''\sin\lambda$$

$$X_0'' = \omega^2 R\cos\lambda - \frac{\alpha}{R^2}\cos\lambda + \frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) = -G\cos\Lambda; \quad X_0''' = 0$$

$$Y_0'' = 0 \qquad\qquad Y_0''' = -2\omega G\cos\Lambda$$

$$Z_0'' = -\frac{\alpha}{R^2}\sin\lambda + \frac{\beta}{R^4}\sin\lambda\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) = -G\sin\Lambda; \quad Z_0''' = 0$$

$$X_0^{IV} = 3\omega^2 G\cos\Lambda + \frac{\alpha}{R^3}G\cos\Lambda + \frac{3\alpha}{R^3}\cos\lambda\, r_0'' - \frac{\beta}{R^5}G\cos\Lambda\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$
$$- \frac{5\beta}{R^5}\cos\lambda\, r_0''\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + \frac{15\beta}{R^4}\sin\lambda\cos^2\lambda\lambda_0'' =$$
$$= \left[-2\frac{\alpha^2}{R^5} + 27\frac{\alpha\beta}{R^7} - 54\frac{\beta^2}{R^9} + 2\frac{\alpha\omega^2}{R^2} - 12\frac{\beta\omega^2}{R^4} - 3\omega^4 R\right]\cos\lambda +$$
$$+ \left[-36\frac{\alpha\beta}{R^7} + \frac{225}{2}\frac{\beta^2}{R^9} + 3\frac{\alpha\omega^2}{R^2} - 30\frac{\beta\omega^2}{R^4}\right]\cos^3\lambda + \left[-\frac{135}{2}\frac{\beta^2}{R^9} + \frac{105}{2}\frac{\beta\omega^2}{R^4}\right]\cos^5\lambda$$

$$Y_0^{IV} = 0$$

$$Z_0^{IV} = \frac{\alpha}{R^3}G\sin\Lambda + \frac{3\alpha}{R^3}\sin\lambda\, r_0'' - \frac{\beta}{R^5}G\sin\Lambda\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) -$$
$$- \frac{5\beta}{R^5}\sin\lambda\, r_0''\left(3 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right) + \frac{15\beta}{R^4}\sin^2\lambda\cos\lambda\lambda_0'' =$$
$$= \left[-\frac{2\alpha^2}{R^5} + 18\frac{\alpha\beta}{R^7} - 36\frac{\beta^2}{R^9}\right]\sin\lambda + \left[-36\frac{\alpha\beta}{R^7} + 90\frac{\beta^2}{R^9} - 30\frac{\beta\omega^2}{R^4} + 3\frac{\alpha\omega^2}{R^2}\right]\cos^2\lambda\sin\lambda +$$
$$+ \left[-\frac{135}{2}\frac{\beta^2}{R^9} + \frac{105}{2}\frac{\beta\omega^2}{R^4}\right]\cos^4\lambda\sin\lambda$$

$$X_0^{V} = 0$$

$$Y_0^{V} = -2\omega X_0^{IV} + \omega^2 Y_0''' - \frac{\alpha}{R^3}Y_0''' + \frac{\beta}{R^5}Y_0'''\left(6 - \frac{15}{2}\cos^2\lambda\right)$$

$$Z_0^{V} = 0$$

Для искомыхъ координатъ ξ η и ζ получены формулы, аналогичныя (21).

$$
\left.
\begin{aligned}
\xi = & \frac{t^4}{24}\,\frac{\sin\lambda\cos\lambda}{G}\left\{\left[-\frac{3\alpha\omega^4}{R}+3\,\frac{\alpha^2\beta}{R^9}+9\,\frac{\alpha\beta^2}{R^{11}}-54\,\frac{\beta^3}{R^{13}}+9\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]+\right.\\
& +\left[\frac{3\alpha\omega^4}{R}-18\,\frac{\alpha\beta^2}{R^{11}}+\frac{135}{2}\,\frac{\beta^3}{R^{13}}-12\,\frac{\alpha\beta\omega^2}{R^6}-90\,\frac{\beta^2\omega^2}{R^8}-\frac{105}{2}\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]\cos^2\lambda+\\
& \left.+\left[-\frac{135}{4}\,\frac{\beta^3}{R^{13}}+40\,\frac{\beta^2\omega^2}{R^8}+\frac{105}{2}\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]\cos^4\lambda\right\}+\ldots\\
\eta = & +\frac{t^3}{3}\,\omega G\cos\Lambda+\frac{t^5}{60}\,\frac{\omega}{R}\cos\lambda\left\{\left[\frac{\alpha^2}{R^4}-15\,\frac{\alpha\beta}{R^6}+18\,\frac{\beta^2}{R^8}+2R^2\omega^4\right]+\right.\\
& +\left[-3\,\frac{\alpha\omega^2}{R}+21\,\frac{\alpha\beta}{R^6}-\frac{45}{2}\,\frac{\beta^2}{R^8}+45\,\frac{\beta\omega^2}{R^3}\right]\cos^2\lambda+\\
& \left.+\left[\frac{45}{4}\,\frac{\beta^2}{R^8}-\frac{105}{2}\,\frac{\beta\omega^2}{R^3}\right]\cos^4\lambda\right\}+\ldots\\
\zeta = & -\frac{1}{2}\,Gt^2+\frac{t^4}{24}\,\frac{1}{G}\left\{\left[-\frac{2\alpha^3}{R^7}+24\,\frac{\alpha^2\beta}{R^9}-90\,\frac{\alpha\beta^2}{R^{11}}+108\,\frac{\beta^3}{R^{13}}\right]+\right.\\
& +\left[+7\,\frac{\alpha^2\omega^2}{R^4}-5\,\frac{\alpha\omega^4}{R}+3R^2\omega^6-36\,\frac{\alpha^2\beta}{R^9}+207\,\frac{\alpha\beta^2}{R^{11}}-\right.\\
& \left.-324\,\frac{\beta^3}{R^{13}}-90\,\frac{\alpha\beta\omega^2}{R^6}+216\,\frac{\beta^2\omega^2}{R^8}+30\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]\cos^2\lambda+\\
& +\left[-3\,\frac{\alpha\omega^4}{R}-\frac{279}{2}\,\frac{\alpha\beta^2}{R^{11}}+117\,\frac{\alpha\beta\omega^2}{R^6}+\frac{675}{2}\,\frac{\beta^3}{R^{13}}-495\,\frac{\beta^2\omega^2}{R^8}+\frac{15}{2}\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]\cos^4\lambda+\\
& \left.+\left[-135\,\frac{\beta^3}{R^{13}}+\frac{1415}{4}\,\frac{\beta^2\omega^2}{R^8}-\frac{105}{2}\,\frac{\beta\omega^4}{R^3}\right]\cos^6\lambda\right\}+\ldots
\end{aligned}
\right| \quad (33)
$$

Если въ этихъ формулахъ положить $\beta=0$ и $\alpha=gR^2$, то получаемъ, какъ частный случай, формулы (21).

§ 12. *Измѣненіе направленія вертикальной линіи и ускоренія силы тяжести съ поднятіемъ надъ поверхностью земли.* Формулы этого § являются обобщеніемъ формулъ § 8 и получаются изъ замѣны въ уравненіяхъ (31) величинъ $R\ \mathrm{Cos}\ \lambda$, $R\ \mathrm{Sin}\ \lambda$ и R^2 величинами $R_1\ \mathrm{Cos}\ \lambda_1$, $R_1\ \mathrm{Sin}\ \lambda_1$ и $R_1{}^2$, получаемыми изъ равенствъ:

$$
\begin{aligned}
R_1\cos\lambda_1 &= R\cos\lambda+h\cos\Lambda\\
R_1\sin\lambda_1 &= R\sin\lambda+h\sin\Lambda\\
R_1^2 &= R^2+2Rh\cos(\Lambda-\lambda)+h^2.
\end{aligned}
$$

и разложеніемъ полученныхъ формулъ по степенямъ $\frac{h}{R}\cdot$ Такимъ образомъ получены выраженія:

$$\begin{aligned}
G_1 \sin \Lambda_1 = G \sin \Lambda + \frac{h}{R} \Big\{ & -\frac{3\alpha}{R^2} \sin \lambda \cos(\Lambda-\lambda) + 15 \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - \frac{105}{2} \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos^2 \lambda \cos(\Lambda-\lambda) + \frac{\alpha}{R^2} \sin \Lambda - \frac{3\beta}{R^4} \sin \Lambda + \\
& + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^2 \lambda \sin \Lambda + 15 \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos \lambda \cos \Lambda \Big\} + \\
& + \frac{h^2}{R^2} \Big\{ \frac{\alpha}{R^2} \sin \lambda \left[\frac{15}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{3}{2} \right] - \\
& - \frac{3\beta}{R^4} \sin \lambda \left[\frac{35}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{5}{2} \right] + \\
& + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos^2 \lambda \left[\frac{63}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{7}{2} \right] - \\
& - 3 \frac{\alpha}{R^2} \sin \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) + 15 \frac{\beta}{R^4} \sin \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - \frac{105}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^2 \lambda \sin \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - 105 \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos \lambda \cos \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \sin \lambda \cos^2 \Lambda + 15 \frac{\beta}{R^4} \cos \lambda \sin \Lambda \cos \Lambda \Big\} + \ldots \\
G_1 \cos \Lambda_1 = G \cos \Lambda - \omega^2 h \cos \Lambda + \frac{h}{R} \Big\{ & - \frac{3\alpha}{R^2} \cos \lambda \cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + 30 \frac{\beta}{R^4} \cos \lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \frac{105}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^3 \lambda \cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + \frac{\alpha}{R^2} \cos \Lambda - \frac{6\beta}{R^4} \cos \Lambda + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^2 \lambda \cos \Lambda + \\
& + 15 \frac{\beta}{R^4} \cos^3 \lambda \cos \Lambda \Big\} + \\
& + \frac{h^2}{R^2} \Big\{ \frac{\alpha}{R^2} \cos \lambda \left[\frac{15}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{3}{2} \right] - \\
& - \frac{6\beta}{R^4} \cos \lambda \left[\frac{35}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{5}{2} \right] + \\
& + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^3 \lambda \left[\frac{63}{2} \cos^2 (\Lambda - \lambda) - \frac{7}{2} \right] - \\
& - \frac{3\alpha}{R^2} \cos \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) + 30 \frac{\beta}{R^4} \cos \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - \frac{105}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos^2 \lambda \cos \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - 105 \frac{\beta}{R^4} \cos^2 \lambda \cos \Lambda \cos(\Lambda-\lambda) + \frac{15}{2} \frac{\beta}{R^4} \cos \lambda \cos^2 \Lambda + \\
& + 15 \frac{\beta}{R^4} \cos \lambda \cos^2 \Lambda \Big\} + \ldots
\end{aligned} \qquad (34)$$

$$
\left.
\begin{aligned}
G_1 \sin(\Lambda_1 - \Lambda) = {} & \omega^2 h \sin\Lambda \cos\Lambda + \frac{h}{R}\left\{\left[\frac{3\varkappa}{R^2} - 15\,\frac{\beta}{R^4} + \right.\right. \\
& + \left.\frac{105}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\right]\sin(\Lambda - \lambda)\cos(\Lambda - \lambda) + \\
& + \left. 3\,\frac{\beta}{R^4}\sin\Lambda\cos\Lambda - 15\,\frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\sin(2\Lambda - \lambda)\right\} + \\
& + \frac{h^2}{R^2}\left\{-\frac{\varkappa}{R^2}\sin(\Lambda-\lambda)\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right] + \right. \\
& + \frac{3\beta}{R^4}\sin(\Lambda-\lambda)\left[\frac{35}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{5}{2}\right] - \\
& - \frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\sin(\Lambda-\lambda)\left[\frac{63}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{7}{2}\right] + \\
& + \frac{3\beta}{R^4}\cos\lambda\sin\Lambda\left[\frac{35}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{5}{2}\right] - \\
& - 15\,\frac{\beta}{R^4}\sin\Lambda\cos\Lambda\cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + 105\,\frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\cos\Lambda\sin(\Lambda-\lambda)\cos(\Lambda-\lambda) - \\
& - \left.\frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\Lambda\sin(\Lambda-\lambda)\right\} + \ldots \\
G_1 \cos(\Lambda_1 - \Lambda) = {} & G - \omega^2 h\cos^2\Lambda + \frac{h}{R}\left\{\frac{\varkappa}{R^2}\left[1 - 3\cos^2(\Lambda-\lambda)\right] - \right. \\
& - \frac{3\beta}{R^4}(1 + \cos^2\Lambda) + \frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\left[1 - 7\cos^2(\Lambda-\lambda)\right] + \\
& + \left. 15\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2(\Lambda-\lambda) + 30\,\frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\cos\Lambda\cos(\Lambda-\lambda)\right\} + \\
& + \frac{h^2}{R^2}\left\{\frac{\varkappa}{R^2}\cos(\Lambda-\lambda)\left[\frac{15}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{3}{2}\right] - \right. \\
& - \frac{3\beta}{R^4}\cos(\Lambda-\lambda)\left[\frac{35}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{5}{2}\right] + \\
& + \frac{15}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\cos(\Lambda-\lambda)\left[\frac{63}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{7}{2}\right] - \\
& - 3\,\frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\cos\Lambda\left[\frac{35}{2}\cos^2(\Lambda-\lambda) - \frac{5}{2}\right] - \\
& - \left[\frac{3\varkappa}{R^2} - 15\,\frac{\beta}{R^4} + \frac{105}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\lambda\right]\cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + \frac{45}{2}\,\frac{\beta}{R^4}\cos^2\Lambda\cos(\Lambda-\lambda) + \\
& + \left. 15\,\frac{\beta}{R^4}\cos\lambda\cos\Lambda\left[1 - 7\cos^2(\Lambda-\lambda)\right]\right\} + \ldots
\end{aligned}
\right\} \quad (34)
$$

Координаты Ξ, Υ и Z опредѣляются, какъ и раньше, уравненіями (24).

Глава IV. **Критика результатовъ, полученныхъ изслѣдователями вопроса о траекторіи свободнаго паденія тѣла. Численные примѣры.**

§ 13. *Работы Д. К. Бобылева и R. S. Woodward'а.* Недостаточность предложеннаго Gauss'омъ рѣшенія разсматриваемаго вопроса выяснена выше. Рѣшеніе Laplace'a не точнѣе, такъ какъ въ основныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ отброшены члены съ ω^2. Рѣшеніе задачи, приведенное Д. К. Бобылевымъ, сводится къ нахожденію членовъ до t^4 включительно въ формулахъ (21). Полученный такимъ образомъ правильный результатъ былъ нѣсколько ошибочно истолкованъ, такъ какъ авторъ не дѣлаетъ разницы между значеніями координатъ ξ, η, ζ и Ξ, Υ и Z. Болѣе серьезную ошибку сдѣлалъ Woodward. Онъ получилъ вполнѣ правильно основныя дифференціальныя уравненія какъ абсолютнаго движенія, такъ и относительнаго. Первыя выражены имъ въ абсолютныхъ полярныхъ координатахъ, вторыя тождественны съ уравненіями (3) настоящей работы. Для потенціала V принято выраженіе (29), уравненія абсолютнаго движенія интегрированы достаточно полно, но при нахожденіи относительныхъ координатъ Ξ, Υ и Z допущена ошибка въ опредѣленіи вертикальной линіи. Woodward опредѣляетъ ее не какъ перпендикуляръ къ поверхности равнаго потенціала W, проходящей черезъ нижнюю точку траекторіи, какъ это принято обычно и принималось въ предыдущихъ главахъ, а считаетъ ее перпендикулярной къ поверхности земного эллипсоида, размѣры и сжатіе котораго совершенно произвольно взяты по A. Clarke'y (1866 г.). Въ приводимомъ имъ численномъ примѣрѣ разсматривается паденіе тѣла съ высоты 490.24 met. подъ географической широтой 45°, которой по принятымъ элементамъ земного сфероида соотвѣтствуетъ геоцентрическая широта $\lambda = +44°48'19''.55$ и $\log R = 8.803967$, причемъ во всемъ дальнѣйшемъ принимается *CGS*-система абсолютныхъ единицъ. Для α, β и ω онъ принимаетъ

$$\log \alpha = 20.6005325$$
$$\log \beta = 35.23728$$
$$\log \omega = 5.86285 - 10.$$

Если по этимъ даннымъ, пользуясь формулами (31), опредѣлить истинную географическую широту, т. е. уголъ образованный съ плоскостью экватора перпендикуляромъ къ поверхности равнаго потенціала, опредѣленной предыдущими значеніями $R, \lambda, \alpha, \beta$ и ω, то получается только $\Lambda = +44°59'47''.08$, а не $\Lambda = 45°$. Такимъ образомъ, если черезъ начальное положеніе точки

на высотѣ 490.24 met. провести дѣйствительную вертикальную линію и ту, которую Woodward считаетъ вертикальной, то эти прямыя, расположенныя обѣ въ плоскости меридіана, образуютъ между собой уголъ въ 12″.92 и первая изъ нихъ пересѣкаетъ поверхность земли на 3.07 cm. сѣвернѣе второй. Отсюда понятно, отчего Woodward получилъ значительное отклоненіе къ сѣверу (онъ нашелъ отклоненіе въ 3.03 cm.). Въ дѣйствительности же тѣло отклонилось къ югу на $3.07 - 3.03 = 0.04$ cm., что находится въ прекрасномъ согласіи съ тѣмъ, что даетъ для времени паденія $t = 10^s$ первый членъ формулы (22). Особой точности результатъ Woodward'а не имѣетъ, такъ какъ и число 3.03 cm. получено имъ, какъ разность большихъ чиселъ; общихъ же формулъ, хотя бы подобныхъ (22), Woodward не даетъ. Подобный же результатъ (3.03 cm.) былъ имъ полученъ по его второму способу, сводящемуся въ сущности къ тому, что точныя уравненія (3) замѣняются приближенными (ограничиваюсь случаемъ сферической, однородной земли):

$$X'' = \quad 2\omega\, Y' + \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right) X$$

$$Y'' = -2\omega\, X' + \left(\omega^2 - \frac{g}{R}\right) Y$$

$$Z'' = \qquad\qquad \left(\quad - \frac{g}{R}\right) Z.$$

Трактовать такимъ образомъ вопросъ — это значитъ не дѣлать разницы между движеніемъ тѣла надъ поверхностью земли и паденіемъ его въ шахту. На дѣлѣ это не могло сказаться при той точности результатовъ, на которую разсчитываетъ Woodward, такъ какъ формулы (22) и (27) показываютъ, что наиболѣе значительные члены съ t^2 въ этихъ случаяхъ одинаковы.

§ 14. *Нѣкоторые численные примѣры.* Вопросъ о траекторіи свободнаго паденія точки вполнѣ рѣшенъ формулами (21), (22), (26), (27) и (33) которыя приведены къ такому виду, что примѣненіе ихъ на частномъ примѣрѣ требуетъ только подстановки въ нихъ численныхъ значеній входящихъ величинъ. Полученіе формулъ, опредѣляющихъ движеніе тѣла внутри земли, предполагаемой не однородной и не сферической затрудняется тѣмъ, что результаты въ данномъ случаѣ въ значительной степени зависятъ отъ неизученнаго достаточно распредѣленія массъ внутри земли. Дѣлая то или иное предположеніе относительно распредѣленія потенціала подъ поверхностью земли, можно обобщить формулы (26) и (27) совершенно такъ-же, какъ это было сдѣлано съ формулами (21) и (22).

Въ качествѣ числового примѣра привожу результаты, полученные по формуламъ (21) и (22) для случая $t = 10^s$; $\lambda = 45^\circ$. Принимая при этомъ CGS-систему абсолютныхъ единицъ и полагая

$$\log \alpha = \log [gR^2] = 20.600532$$
$$\log R = 8.803967$$
$$\log \omega = 5.862853 - 10$$

находимъ

$$\log g = 2.992598$$
$$\Lambda = 45^\circ 5' 55''.8$$
$$G = 981.412$$

По формуламъ (21)

$$\xi \text{ (членъ съ } t^4) = -56.36\ \mu\mu$$
$$\xi \text{ (членъ съ } t^6) = -\ \ 2.24\ \mu\mu$$
$$\xi = -\mathit{58.6}\ \ \mu\mu$$

$$\eta \text{ (членъ съ } t^3) = +16.8391 \text{ cm.}$$
$$\eta \text{ (членъ съ } t^5) = +\ \ 0.0001 \text{ cm.}$$
$$\eta = +\mathit{16.8392} \text{ cm.}$$

По формуламъ (22), принимая

$$h = 490.71 \text{ met.}$$

$$\Xi \text{ (членъ съ } t^2) = +0.026124 \text{ cm.}$$
$$\Xi \text{ (членъ съ } t^4) = -0.000006 \text{ cm.}$$
$$\Xi = +\mathit{0.026118} \text{ cm.}$$

Такимъ образомъ при паденіи точки надъ поверхностью земли она въ теченіе 10^s отклоняется отъ плоскости перваго вертикала начальной точки траекторіи къ полюсу на 59 $\mu\mu$ (приблизительно одна десятая длины волны желтаго свѣта). Въ то же время (т. е. падая съ высоты 490 met.) она отклоняется отъ плоскости перваго вертикала нижней точки траекторіи къ экватору на четверть миллиметра.

Для того же времени паденія $t = 10^s$ вглубь земли получаемъ $\xi = +0.003262$ cm., т. е. экваторіальное отклоненіе отъ плоскости пер-

ваго вертикала начала траекторіи, приблизительно въ 500 разъ большее, чѣмъ полярное отклоненіе въ предыдущемъ примѣрѣ.

Предполагая, что тѣло падаетъ въ шахту глубиной въ 2000 met. получаемъ для соотвѣтствующаго времени $t = 20^s.188$ по формулѣ (26) и (27) при остальныхъ величинахъ тѣхъ же, что и въ предыдущемъ примѣрѣ:

$$\xi = +0.05418 \text{ cm.}$$
$$\Lambda_1 - \Lambda = -0''.11180$$
$$\Xi = +0.16258 \text{ cm.}$$

Слѣдовательно при паденіи въ шахту глубиной въ 2 километра точка отклоняется отъ плоскости перваго вертикала верхней точки траекторіи на полмиллиметра къ экватору. Въ то же время она отклоняется отъ плоскости перваго вертикала нижней точки траекторіи тоже къ экватору на 1.6 миллиметра.

Примѣненіе на практикѣ формулъ (33) и формулъ § 12 не представляетъ затрудненій. При этомъ можно полагать по R. S. Woodward'у

$$\log \alpha = 20.6005325$$
$$\log \beta = 35.23728,$$

но результаты практически мало зависятъ отъ того, считать ли землю сферической и однородной, или пользоваться болѣе общимъ случаемъ.

§ 15. *Заключеніе.* Резюмируя все сказанное въ предыдущихъ §§, приходимъ къ слѣдующимъ заключеніямъ.

1. Вопросъ о видѣ кривой, описываемой точкой, падающей въ пустотѣ безъ начальной скорости вблизи земной поверхности оставался до послѣдняго времени нерѣшеннымъ, такъ какъ нѣкоторые авторы пользовались неточными уравненіями движенія, другіе неправильно опредѣляли положеніе вертикальной линіи.

2. Въ разсматриваемомъ вопросѣ слѣдуетъ отличать вертикальную линію и плоскость перваго вертикала въ верхней точкѣ траекторіи, соотвѣтствующей начальному положенію падающаго тѣла, отъ вертикальной линіи и плоскости перваго вертикала нижней точки траекторіи, въ которой кончается паденіе тѣла. Въ каждой точкѣ вертикальная линія опредѣляется, какъ проходящій черезъ начальное положеніе тѣла перпендикуляръ къ поверхности равнаго потенціала полной силы тяжести, проведенной черезъ разсматриваемую точку. Плоскость меридіана проходитъ черезъ ось вра-

щенія земли и начальное положеніе тѣла. Плоскость перваго вертикала проходитъ черезъ опредѣленную выше вертикальную линію и перпендикулярна къ плоскости меридіана.

3. Пользуясь приведенными въ предыдущемъ пунктѣ опредѣленіями, можно утверждать, что при паденіи точки надъ земной поверхностью она отклоняется отъ плоскости перваго вертикала верхней точки траекторіи *къ полюсу* и притомъ совершенно незначительно. Относительно плоскости перваго вертикала нижней точки траекторіи она отклоняется болѣе замѣтно *къ экватору*.

4. При паденіи тѣла внутри земли (въ шахтѣ) оно отклоняется отъ плоскости перваго вертикала верхней точки траекторіи *къ экватору*. Относительно плоскости перваго вертикала нижней точки траекторіи тоже *къ экватору*. При прочихъ равныхъ условіяхъ отклоненіе при паденіи въ шахту больше, чѣмъ при паденіи съ той же высоты надъ поверхностью земли.

5. Численныя значенія указанныхъ отклоненій нѣсколько мѣняются при переходѣ отъ предположенія, что земля однородный шаръ къ болѣе общему случаю.

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ въ апрѣлѣ 1916 года).

33) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 7, 15 апрѣля. Стр. 457—554. 1916. lex. 8°.—1616 экз.

34) **Труды Ботаническаго Музея Императорской Академіи Наукъ.** (Travaux du Musée Botanique de l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd). Выпускъ XV. Съ 5 табл. и 2 рис. въ текстѣ (I+IV+182 стр.). 1916. 8°.—500 экз. Цѣна 2 руб.; 2 rbl.

35) **Труды Радіевой Экспедиціи Императорской Академіи Наукъ.** № 3. Д. Бѣлянкинъ. Петрографическая карта Ильменскихъ горъ. (Съ приложеніемъ списка минеральныхъ копей Ильменскихъ горъ, составленнаго В. И. Крыжановскимъ и Е. Д. Ревуцкой (I+67 стр.+2 табл.+1 карта). 1915. lex. 8°.—415 экз. Цѣна 1 руб. 25 коп.; 1 rbl. 25 cop.

36) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 1. Русскія мѣсторожденія сукновальныхъ глинъ и близкихъ къ нимъ веществъ. А. Е. Ферсмана. (Съ аналитическими данными Ѳ. А. Николаевскаго). Изданіе второе, дополненное (I+23 стр.). 1916. 8°.—2016 экз. Цѣна 20 коп.; 20 cop.

37) **Путеводитель по Музею Антропологіи и Этнографіи имени Императора Петра Великаго.** Этажъ III. Залъ 5. Археологія. Составилъ Б. Э. Петри (I+52 стр.). 1916. 8°.—115 экз. Цѣна 10 коп.

38) **Словарь Русскаго языка**, составленный Вторымъ Отдѣленіемъ Императорской Академіи Наукъ. Четвертаго тома выпускъ девятый. Кошо́ба—Крику́нъ (VI+I+столб. 2561—2880). 1916. lex. 8°.—6015+50 вел. экз. Цѣна 75 коп.; 75 cop.

39) **Памятники древне-русской литературы.** Выпускъ 2-й. Житія святыхъ мучениковъ Бориса и Глѣба и службы имъ. Приготовилъ къ печати Д. И. Абрамовичъ. Изданіе Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ (II+XXIII+II+1—26+II+27—66+II+67—204+I стр. 1916. lex. 8°—816. Цѣна 2 руб.; 2 rbl.

40) **Сборникъ Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ.** Томъ XCV, № 1. Діалектологическіе матеріалы, собранные В. И. Тростянскимъ, И. С. Гришкинымъ и др. Приготовилъ къ печати и снабдилъ примѣчаніями А. А. Шахматовъ (I+IV+158 стр.). 1916. 8°.—665 экз. Цѣна 1 руб. 50 коп.; 1 rbl. 50 cop.

41) **Сборникъ Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ.** Томъ XCV, № 2. В. И. Тростянскій. Къ изученію мѣстныхъ говоровъ въ Воронежской губерніи (II+28 стр.). 1916. 8°.—665 экз. Цѣна 30 коп.; 30 cop.

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.

Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Апрѣль 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 9.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

15 МАЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

15 MAI.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того, — 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Развитіе дыхательной полости у *Salpa fusiformis*.

В. В. Заленскаго.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 2 марта 1916 г.).

Въ восьмидесятыхъ годахъ существовалъ взглядъ, по которому дыхательная полость развивается у сальпъ изъ одной полости, которую называли первичною пищеварительною полостью и которая раздѣляется потомъ на клоакальную и глоточную полости. Этого взгляда придерживался и я въ своихъ изслѣдованіяхъ[1]. Въ девяностыхъ годахъ, благодаря изслѣдованіямъ Тодаро[2], отказавшагося отъ своихъ прежнихъ воззрѣній, Брукса[3] и Гейдера[4], было доказано, что дыхательная полость сальпъ, такъ же какъ и асцидій, образуется изъ двухъ отдѣльныхъ зачатковъ: клоаки и глотки, которыя впослѣдствіи соедиНяются другъ съ другомъ прорывающимися въ ихъ стѣнкахъ жаберными щелями. Въ настоящее время этотъ фактъ можно считать вполнѣ установленнымъ. Я въ недавно напечатанной, но еще не выпущенной въ свѣтъ своей работѣ о развитіи *S. zonaria* собственными наблюденіями убѣдился въ совершенной правильности этого взгляда.

Въ частности, по отношенію къ развитію дыхательной полости у *S. fusiformis* Гейдеромъ[4] и Коротневымъ[5] было доказано, что клоакальная полость образуется гораздо раньше глоточной полости. Вполнѣ соглашаясь

[1] W. Salensky. Neue Untersuchungen über die embryonale Entwicklung der Salpen (Mittheil. aus der Zoologischen Station zu Neapel. Bd. IV).

[2] Fr. Todaro. Sul omologia della branchia delle Salpe un quelle degli altri tunicati (Rend. Acad. Lincei Ser. 4, Vol. 4).

[3] W. K. Brooks. The origin of the organs of Salpa (John Hopkins University Circular Vol. XII), а также The Genus Salpa (Memoirs from the Biological Laboratory of John Hopkins University 1893).

[4] K. Heider. Beiträge zur Embryologie von *Salpa fusiformis* Cuv. (Abhandl. der Senkenbergschen naturforschenden Gesellschaft B. XVIII. 1895) и другія мелкія статьи.

[5] A. Korotneff. Zur Embryologie von *Salpa runcinata-fusiformis* (Zeitschr. für wiss. Zoologie. Bd. LXII).

съ этимъ, какъ я показалъ уже въ своей статьѣ о зародышевыхъ листахъ *S. fusiformis* (Изв. Акад. Наукъ. № 7 1916 г.), я расхожусь однако съ названными учеными въ существенныхъ чертахъ.

Во 1-хъ, я въ цитированной сейчасъ работѣ своей показалъ, что оба зачатка дыхательной полости—клоака и глотка—образуются исключительно изъ калиммоцитовъ. Какимъ измѣненіямъ подвергаются потомъ стѣнки этихъ полостей, и насколько въ окончательномъ ихъ развитіи принимаютъ потомъ бластомеры, — объ этомъ я подробнѣе буду говорить въ одномъ изъ слѣдующихъ очерковъ. Гейдеръ, въ противуположность этому взгляду, считаетъ, что обѣ части дыхательной полости, съ самаго начала, образуются изъ бластомеръ. По моему же мнѣнію, бластомеры помѣщаются сначала внѣ зачатковъ клоакальной и глоточной полости.

Во 2-хъ, я показалъ, что клоакальная полость образуется не въ видѣ инвагинаціи эктодерма, какъ думаетъ Гейдеръ, а въ видѣ плотнаго зачатка, въ которомъ появляется маленькая полость, впослѣдствіи вырастающая. Этотъ плотный зачатокъ клоаки я разсматриваю какъ энтодермъ, а поэтому, по моимъ изслѣдованіямъ, клоака образуется не изъ эктодерма, какъ думаетъ Гейдеръ, а изъ энтодерма, что совершенно не противорѣчитъ образованію клоаки у другихъ туникатъ, напр., у асцидій, гдѣ она образуется и изъ эктодерма, и изъ энтодерма.

Въ 3-хъ, мои изслѣдованія относительно развитія глоточной полости находятся въ полномъ противорѣчіи съ изслѣдованіями Гейдера, и это противорѣчіе объясняется тѣмъ, что Гейдеръ, во 1-хъ, не видѣлъ раннихъ стадій развитія глоточныхъ полостей, а, во 2-хъ, въ тѣхъ стадіяхъ, гдѣ онъ ихъ увидѣлъ, онъ ихъ принялъ за провизорныя образованія, амніональную полость, которой у сальпъ совершенно нѣтъ. Я же считаю эти первыя складки, которыя онъ называетъ амніональными складками, и амніональную полость за глоточныя складки, изъ которыхъ образуются глоточныя полости. Этотъ процессъ образованія глоточныхъ складокъ и соединенія ихъ въ одну глоточную полость составляетъ главную задачу теперешняго моего очерка. Описавъ затѣмъ сложный процессъ образованія глоточной полости, я постараюсь объяснить, въ чемъ заключается причина разногласія моего взгляда со взглядомъ Гейдера. Вмѣстѣ съ тѣмъ я укажу подробнѣе на особенности взгляда Гейдера и постараюсь подробнѣе уяснить значеніе разницы нашихъ мнѣній.

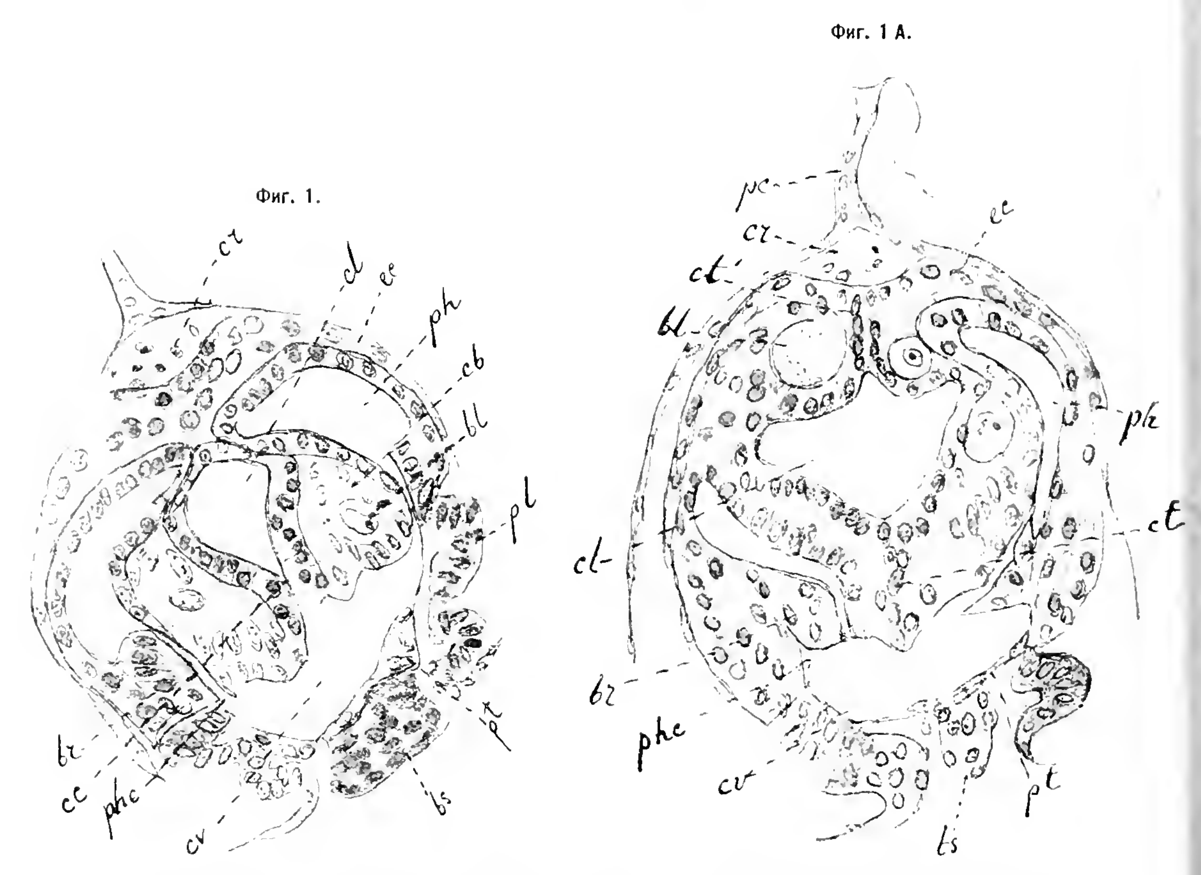
Прежде чѣмъ приступить къ описанію развитія глоточныхъ и клоакальной полостей, я напомню топографическое расположеніе этихъ полостей въ той стадіи развитія, на которой мы остановились въ статьѣ объ образо

ванія зародышевыхъ листовъ у *S. fusiformis* (ИАН. 1916. 503 слл.). Въ центральной части зародыша находится зачатокъ клоакальной полости грушевидной формы, дающій внизъ отростокъ, проходящій въ осевомъ направленіи до нижней части мезодермальной массы, занятой глоточными полостями и ихъ соединительною пластинкой. Между этою послѣднею и крышею плаценты образуется полость, которая есть не что иное какъ прежняя полость яйцевой камеры, обнаруживаяся теперь вслѣдствіе того, что мезо-энтодермальная масса яйца, или «зачатокъ», какъ я ее назвалъ, сокращается и поднимается вверхъ. Эту полость я видѣлъ и прежде у *S. pinnata* и *S. africana* и назвалъ ее вторичною фолликулярною полостью. Съ тѣхъ поръ эмбріологи видѣли ее также и называли иначе: Бруксъ назвалъ ее полостью тѣла (body cavity), Гейдеръ — амніональною полостью. Въ виду краткости и удобства я считаю болѣе удобнымъ удержать названіе Брукса, вмѣсто моего прежняго, тѣмъ болѣе, что въ самомъ дѣлѣ эта полость играетъ впослѣдствіи роль полости тѣла у зародыша.

Въ позднѣйшей изъ описанныхъ въ статьѣ о зародышевыхъ листахъ стадіи эта полость еще очень мала (ср. фиг. 8, помѣщенную въ этой статьѣ). Въ той стадіи, съ которой мы начнемъ теперь описаніе развитія глоточной полости (фиг. 1), она значительно увеличилась. Въ нее открывается посрединѣ клоакальная полость своимъ каналомъ, по обѣимъ сторонамъ обѣ глоточныя складки. Послѣднія очень сильно выросли вверхъ и прикрываютъ своими верхними концами края клоакальной полости. Онѣ доходятъ почти до осевой части зародыша, но не сходятся другъ съ другомъ. Форма этихъ складокъ существенно измѣнилась во многихъ отношеніяхъ, и эти измѣненія имѣютъ важное значеніе для уразумѣнія дальнѣйшихъ процессовъ развитія; поэтому мы разсмотримъ ихъ подробнѣе.

Центральная часть разрѣза занята клоакою (фиг. 1 *cl*), ограниченною эпителіемъ, состоящимъ изъ кубическихъ клѣтокъ. На разрѣзахъ, окрашенныхъ гематеиномъ Апати, ядра ихъ окрашиваются очень рѣзко. Эта полость имѣетъ грушевидную форму и состоитъ изъ расширенной верхней части, составляющей собственно клоакальную полость, и суженой нижней, имѣющей видъ канала и могущей быть названной клоакальнымъ каналомъ (*cc*). Этой послѣдней частью клоака открывается въ полость тѣла отверстіемъ, окруженнымъ толстыми валикообразными губами. Въ описываемомъ теперь разрѣзѣ стѣнки клоакальнаго канала уже тѣсно сближены между собою, хотя и не срослись. Въ слѣдующемъ, отстоящемъ отъ перваго всего на два разрѣза, т. е. на шесть микроновъ (фиг. 1 А), стѣнки клоакальнаго канала уже срослись, и на мѣстѣ канала ихъ находится шовъ, состоящій

изъ двухъ родовъ клѣтокъ, расположенныхъ въ осевомъ направленіи. Такой слѣдъ прежняго канала мы можемъ различить на нѣсколькихъ разрѣзахъ того же зародыша, а также на многихъ слѣдующихъ стадіяхъ развитія.



Фиг. 1. 1 А. Два поперечныхъ разрѣза зародыша въ той стадіи развитія, когда клоакальная полость (*cl*) и глоточныя полости (*ph*) открываются въ полость тѣла (*cv*); на фиг. 1 А нарисованъ разрѣзъ изъ той же серіи разрѣзовъ, прошедшій черезъ ту часть зародыша, въ которой стѣнки клоакальнаго канала (*ce*) срослись и на мѣстѣ канала виденъ швъ (*ct*), какъ слѣдъ срастанія; *cc* — эктодермъ; *cb* — центральная ячеистая масса (мезодермъ съ бластомерами); *bl* — бластомера; *pl* — плацента; *pt* — крыша плаценты; *bs* — кровеобразовательная почка; *phe* — каналъ глоточной полости, открывающійся въ полость тѣла; *d'* — остатокъ верхней осевой части энтодерма, являющейся въ первыхъ стадіяхъ образованія клоаки; *cr* — клѣтки, появляющіяся въ замкнутой полости клоакальныхъ складокъ, вѣроятно, остатокъ яйцевода; *pc* — гребень, происшедшій отъ срастанія клоакальныхъ складокъ (Zeiss. Apochr. Oc. 2 + Imm. 1,5).

Въ послѣдней стадіи развитія, описанной въ статьѣ о зародышевыхъ листахъ *S. fusiformis*, между клоакальною полостью и глоточными полостями находятся большія бластомеры (нижній рядъ бластомеръ) и небольшое количество калиммоцитовъ. Въ описываемой сейчасъ стадіи (фиг. 1) количество калим-

моцитовъ значительно увеличивается. Здѣсь мы можемъ различать калиммоциты, образующіе капсулу вокругъ бластомеръ, и другіе, заключающіеся между стѣнками клоакальной полости и глоточныхъ полостей. Между этими двумя органами находится, слѣдовательно, ткань, состоящая изъ калиммоцитовъ и бластомеръ. Происхожденіе этой ткани понятно изъ описанія раннихъ стадіи развитія дыхательной полости: она образуется изъ мезоэнтодермальной ткани, внутри которой образуется зачатокъ клоаки (срав. фиг. 2 моей статьи о зародышевыхъ листахъ сальпъ). Когда вся мезоэнтодермальная масса — назовемъ ее центральной клѣточной массой — отстаетъ отъ крыши плаценты вмѣстѣ съ зачатками клоаки и глотки, то она будетъ по прежнему окружать зачатокъ клоаки и раздѣляетъ его отъ зачатковъ глотки. Когда клоакальный каналъ замыкается, то шовъ его останется въ центральной массѣ этой мезоэнтодермальной ткани, какъ это видно на фиг. 1 A.

Гейдеръ[1] (стр. 412) описываетъ это отношеніе клоаки къ окружающимъ ея клѣткамъ иначе. Онъ полагаетъ, что въ томъ мѣстѣ, гдѣ происходитъ замыканіе клоаки, изъ губъ клоакальнаго углубленія, по его взгляду, изъ эктодерма, образуется скопленіе клѣтокъ, которое онъ считаетъ гомологомъ тому, которое Тодаро называетъ желточной почкой (bottone vitellino). Изъ этого скопленія клѣтокъ, по Гейдеру, образуется эндофарингеальный ячеистый стволъ (Endopharyngealer Zellenstrang) появляющійся потомъ въ глоткѣ, такъ какъ вокругъ этого скопленія клѣтокъ или ячеистой пробки (Zellenpfropf) закладывается, по его мнѣнію, зачатокъ глотки. Ничего подобнаго я не видѣлъ у *S. fusiformis;* такъ называемый эндофарингеальный стволъ образуется у нея другимъ путемъ, а мезоэнтодермальныя клѣтки, окружающія клоаку и отдѣляющія ее отъ глотки, впослѣдствіи становятся свободными и наполняютъ полость тѣла.

Слѣдуетъ упомянуть, что на фиг. 1 A въ верхней части зародыша также видны два ряда клѣтокъ, идущихъ въ осевомъ направленіи отъ верхней стѣнки клоаки вверхъ къ энтодерму, подобно шву, идущему внизъ и происшедшему отъ срастанія стѣнокъ клоакальнаго канала (фиг. 1 A). Они представляютъ остатокъ верхняго отдѣла осевой части зачатка клоаки, упомянутаго въ статьѣ о зародышевыхъ листахъ *S. fusiformis* (ИАН. 1916. 503 сл.).

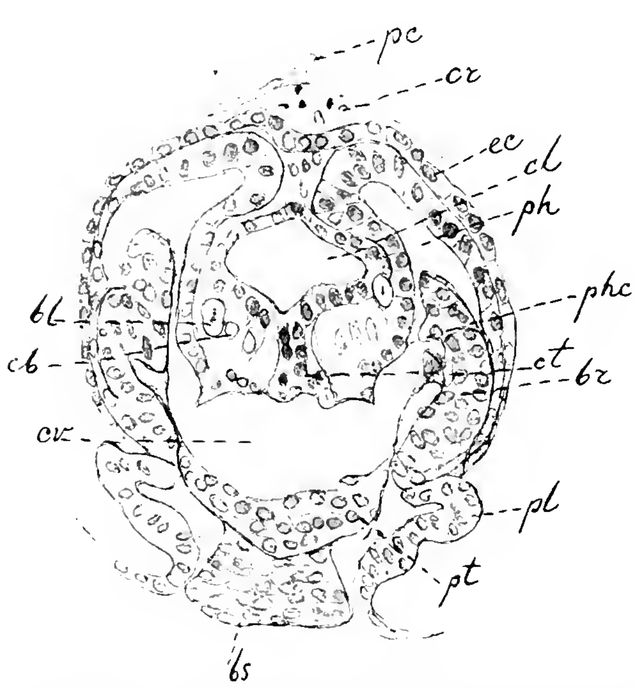
Весьма существенныя измѣненія замѣчаются также и въ глоточныхъ складкахъ на разрѣзѣ фиг. 1 и 1 A. Стѣнки верхней части этихъ полостей состоятъ изъ эпителія, совершенно похожаго на эпителій клоакальной стѣнки.

---

[1] K. Heider. Beiträge zur Embryologie von *Salpa fusiformis* (Abhandl. der Senkenbergschen naturf. Gesellschaft. Bd. XVII).

Нижняя часть наружной стѣнки глоточныхъ полостей очень сильно утолщается въ видѣ валиковъ (фиг. 1, 1 A *br*). Эти образованія имѣютъ очень важное значеніе, такъ какъ съ ихъ помощью происходитъ замыканіе глоточныхъ полостей. Въ описываемой теперь стадіи развитія они суживаютъ нижнюю часть глоточныхъ полостей и превращаютъ ихъ въ щели (фиг. 1, 1 A). Съ появленіемъ ихъ глоточныя полости раздѣляются на двѣ части: верхнія расширенныя и нижнія узкія, имѣющія форму каналовъ, открывающихся въ полость тѣла. Нижнія отверстія этихъ каналовъ, которыя можно назвать глоточными, открываются какъ разъ у верхней границы плаценты въ полость тѣла.

Крышка плаценты (*pt* фиг. 1 и 1 A) утолщена только въ центральной части, гдѣ она прилегаетъ къ кровяной почкѣ (*bs*), края же ея очень тонки и своими концами спаиваются съ упомянутыми выше валиками нижней части глоточныхъ стѣнокъ.



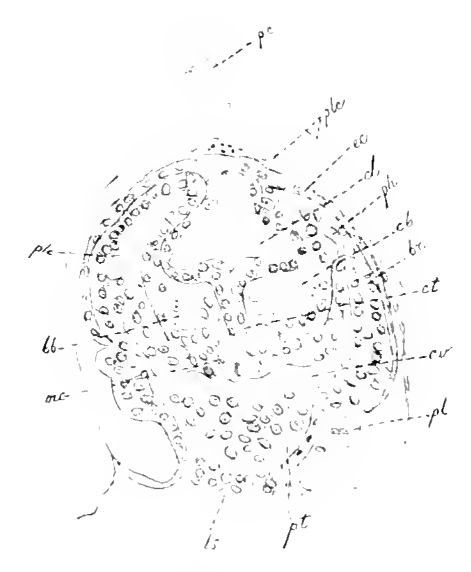
Фиг. 2. Разрѣзъ черезъ зародыша, у котораго глоточные валики (*br*) далѣе развились. Значеніе буквъ какъ на фиг. 1, 1 A. (Zeiss. Apochr. Oc. 2 + Im. 1,5).

Переходимъ къ слѣдующей стадіи (фиг. 2). Зародышъ нѣсколько выросъ, и увеличилась его полость тѣла. Зачатокъ клоаки претерпѣлъ мало измѣненій. Въ немъ попрежнему можно различить центральную часть (*cl*), или клоакальную полость, и швовъ, происшедшій отъ сростанія стѣнокъ клоакальной трубки и лежащій внутри центральной ячеистой массы, окружающей клоаку. Въ этой массѣ ясно можно различить бластомеры, большія клѣтки, снабженныя овальными ядрами, лежащія на прежнихъ мѣстахъ и окруженныя калиммоцитами. Я не буду останавливаться здѣсь на строеніи бластомеръ, такъ какъ намѣренъ посвятить имъ спеціальную замѣтку. Скажу только, что величина ихъ уменьшилась. Въ разрѣзъ попали только нижнія бластомеры.

Наиболѣе важныя измѣненія касаются развитія указанныхъ выше валикообразныхъ утолщеній въ нижней части глоточныхъ полостей. Они значительно выросли въ этой стадіи и измѣнили свою форму. Эти валики (фиг. 2 *br*) складываются теперь въ складки, верхушки которыхъ направлены къ верхней части зародыша. Въ нихъ, конечно, можно различить наружную и внутреннюю пластинки. Первая длиннѣе, вторая оканчивается заостреннымъ концомъ и направляется внизъ и къ ячеистой массѣ, окружающей клоаку. Она соединяется также съ крышей центральной плаценты. Сообщеніе глоточныхъ полостей съ полостью тѣла еще не прервано.

Эта стадія развитія глоточныхъ полостей есть переходная, въ которой опредѣляются только отдѣльныя части глоточныхъ валиковъ. Значеніе и смыслъ этихъ образованій выясняется въ позднѣйшей стадіи развитія, которая представлена въ разрѣзахъ на фигурахъ 3-й и 4-й.

Фиг. 3, 4 и 4 A представляютъ разрѣзы изъ двухъ зародышей, находящихся почти на одинаковой стадіи развитія. Фиг. 3 представляетъ поперечный разрѣзъ, 4, 4 A — два разрѣза сагиттальныхъ. Всѣ эти разрѣзы дополняютъ другъ друга. Сравнивая поперечный разрѣзъ фиг. 3 съ только что разсмотреннымъ разрѣзомъ фиг. 2, мы видимъ, что зародышъ, изъ котораго онъ сдѣланъ не далеко ушелъ въ своемъ развитіи отъ зародыша фиг. 2. Остатокъ шва клоакальнаго канала и здѣсь виденъ очень ясно (*ct*), хотя нѣсколько сократился и не доходитъ внизу до края ячеистой массы (*mc*), въ которой онъ находится. Очевидно въ настоящей стадіи развитія начинается уже разрушеніе остатковъ клоакальнаго канала, сначала въ нижней его части, а потомъ въ верхней, гдѣ онъ остается виденъ довольно долго. Полость (тѣла *cr*) сохраняетъ свои прежніе размѣры. Значительно, однако, измѣнились глоточные валики. Независимо отъ ихъ выростанія, они измѣнили свое отношеніе къ ячеистой массѣ, окружающей клоаку, что соста-



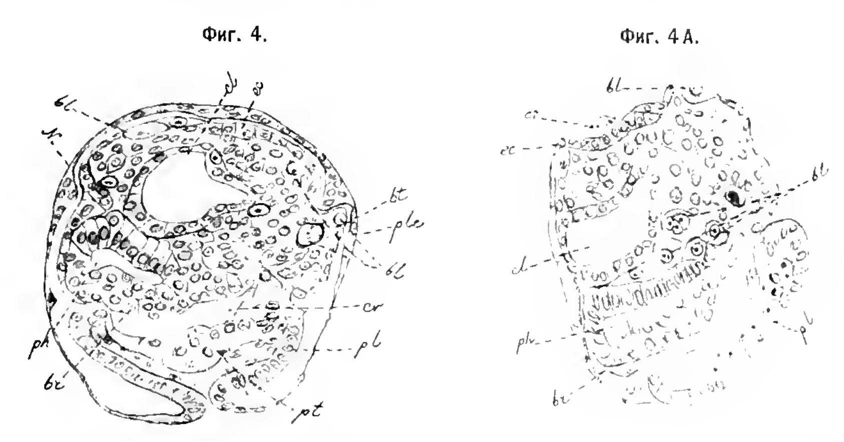
Фиг. 3. Поперечный разрѣзъ черезъ зародышъ въ стадіи, когда глоточные валики (*br*) дошли до центральной ячеистой массы (*mc*) и, сросшись съ нею, замкнули глоточныя полости (*ph*); *cb* — бластомерныя клѣтки въ центральной ячеистой массѣ. Зародышъ нарисованъ въ клоакальныхъ складкахъ матери (*plc*), въ которыя онъ окутанъ. Остальныя буквы какъ на фиг. 1, 1 A. (Zeiss. Apochr. Oc. 4 + Syst. 4).

вляетъ очень важный шагъ впередъ въ смыслѣ развитія глоточныхъ полостей изъ глоточныхъ складокъ. Мы видѣли при изслѣдованіи разрѣза фиг. 2, что глоточные валики (*br*), выросши до извѣстнаго предѣла, загибаются по направленію къ центру зародыша, образуютъ складку, внутренняя пластинка которой (фиг. 2 *br*) подходитъ къ ячеистой массѣ такъ близко, что между этими двумя образованіями остаются только тонкіе каналы (*phc*), служащіе сообщеніемъ для глоточныхъ полостей съ полостью тѣла. Отверстія этихъ каналовъ въ стадіи фиг. 2 довольно широки. Въ слѣдующей стадіи развитія (фиг. 3), которую мы теперь разсматриваемъ, внутреннія пластинки глоточныхъ валиковъ сильно выростаютъ по направленію къ центральной ячеистой массѣ, окутывающей клоаку, проходятъ подъ нею. срастаются съ нею нижнею частью и прикрѣпляются своими концами къ осевой части ея (фиг. 3 *mc*). При взглядѣ на фиг. 3 становится яснымъ, что послѣдствіемъ такого развитія внутреннихъ пластинокъ глоточныхъ валиковъ является то, что онѣ, проходя подъ нижними отверстіями глоточныхъ каналовъ, отдѣляютъ сначала глоточныя полости отъ полости тѣла, а впослѣдствіи, срастаясь съ ячеистой массою, замыкаютъ глоточныя полости. Какъ мы увидимъ изъ изслѣдованія сагиттальныхъ разрѣзовъ, это замыканіе не совершается на всемъ протяженіи глоточныхъ пластинокъ за одинъ разъ; въ задней части зародыша сообщеніе глоточныхъ полостей съ полостью тѣла еще временно остается. Въ тѣхъ мѣстахъ, гдѣ замыканіе глоточныхъ полостей совершилось, они имѣютъ характерную форму, сходную съ ихъ формой въ предыдущихъ стадіяхъ развитія. Онѣ представляютъ форму гриба, шляпка котораго представлена расширенной верхней частью, или собственно глоточной полостью (фиг. 3 *ph*), ножка — съуженной частью также замкнутой теперь внизу, — каналомъ глоточной полости. Разрѣзъ. нарисованный на фиг. 3, прошелъ не совершенно правильно, поэтому на лѣвой сторонѣ глоточная полость видна вполнѣ, на правой — только одна часть ея. Глоточный каналъ въ большей своей части является здѣсь только въ видѣ узкой щели, расширяющейся только въ нижней части, въ формѣ овальной замкнутой полости.

Для дополненія картины распредѣленія органовъ въ этой стадіи развитія служатъ сагиттальные разрѣзы, нарисованные на фигурахъ 4 и 4 A. Фиг. 4 представляетъ одинъ изъ центральныхъ разрѣзовъ, фиг. 4 A — одинъ изъ боковыхъ разрѣзовъ зародыша. На центральномъ разрѣзѣ, который однако не совсѣмъ точно прошелъ черезъ осевую часть зародыша, можно легко оріентироваться по положенію клоакальной полости. Она является въ видѣ довольно большого пузыря (фиг. 4 *cl*), расширеннаго въ

передней части и суживающагося въ заостренный коническій отростокъ въ задней. Непосредственно книзу отъ клоакальнаго пузыря видна одна изъ глоточныхъ полостей, верхняя стѣнка которой, плотно прилегающая къ клоакѣ, состоитъ изъ высокихъ цилиндрическихъ эпителіальныхъ клѣтокъ (фиг. 4 *ph*). Нижняя стѣнка, представленная глоточнымъ валикомъ, состоитъ изъ многоугольныхъ клѣтокъ (*br*). Глоточная полость замкнута вполнѣ и обѣ ея стѣнки переходятъ кзади въ центральную ячеистую массу. На фиг. 4 A разрѣзаны также клоакальныя и глоточныя полости, но разрѣзъ

Фиг. 4. **Фиг. 4 A.**



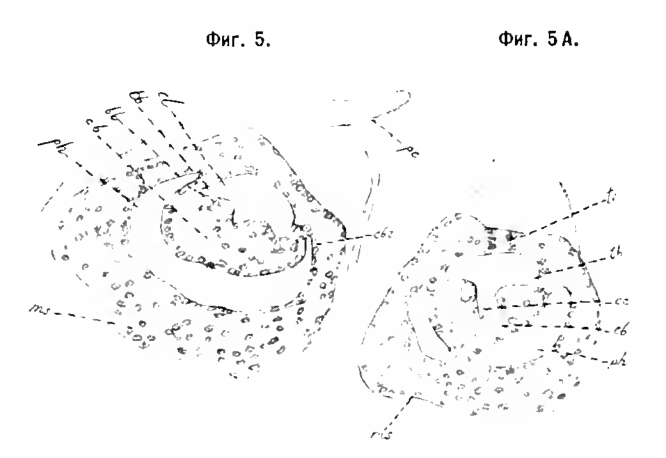
Фиг. 4, 4 A. Два сагиттальныхъ разрѣза зародыша изъ стадіи развитія очень близкой къ изображенной на фиг. 3. Фиг. 4 — разрѣзъ прошелъ черезъ центральную часть, фиг. 4 A — нѣсколько въ сторону. *bt* — отростокъ задней части зародыша съ бластомерами внутри; *N* — зачатокъ ганглія въ видѣ утолщенія эктодерма. Остальныя буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Фиг. 4 Zeiss. Apochr. Oc. 2 + Immas. 1.5, фиг. 4 A — Oc. 4 + Obj. 4).

прошелъ черезъ боковую часть глоточной полости, которая является еще не вполнѣ замкнутою. Какъ видно на приведенномъ рисункѣ, верхняя стѣнка глоточной полости здѣсь упирается въ центральную ячеистую массу, въ которой видны многочисленныя бластомеры (*bl*), нижняя стѣнка, мало-по-малу утончается кзади и оканчивается тамъ заостреннымъ концомъ, лежащимъ свободно въ полости тѣла. На заднемъ концѣ видно отверстіе, черезъ которое глоточная полость сообщается еще съ полостью тѣла.

Изъ сказаннаго видно, что глоточныя полости у *S. fusiformis* закладываются въ видѣ двухъ симметрично расположенныхъ зачатковъ. Для образованія одинарной глоточной полости оба эти зачатка должны слиться вмѣстѣ. Этотъ процессъ совершается въ той стадіи развитія, когда клѣтки, окружающія клоакальную и глоточную полости — клѣтки мезодерма — значительно измѣняются. Въ стадіяхъ, разсмотрѣнныхъ до сихъ поръ, центральная ячеистая масса, образующаяся изъ клѣтокъ, остающихся за обра-

зованіемъ энтодермальныхъ органовъ, представляетъ плотную ткань, въ которой полигональныя клѣтки плотно прилегаютъ другъ къ другу. Послѣ замыканія глоточныхъ полостей эта мезодермальная ткань становится рыхлою (фиг. 5), вѣроятно, вслѣдствіе накопленія между клѣтками прозрачной однородной жидкости, раздвигающей клѣтки другъ отъ друга. На разрѣзахъ, представленныхъ на фигурахъ 5 и 5 А, весь мезодермъ состоитъ изъ клѣтокъ, разсѣянныхъ въ полости тѣла и принявшихъ разнообразныя формы, большею частью вытянутыхъ или снабженныхъ отростками, что указываетъ на ихъ амебообразную подвижность. Мѣстами эти клѣтки соединяются въ маленькія группы, мѣстами лежатъ одиночно. Съ распаденіемъ мезодерма на подвижныя клѣтки, которыя свободно могутъ заползать въ полость тѣла, послѣдняя теряетъ свои опредѣленныя границы и совершенно исчезаетъ какъ опредѣленная полость. Теперь весь промежутокъ, заключающійся между энтодермомъ и энтодермальными органами (клоакальною и глоточными полостями), превращается въ общую полость тѣла.

На фиг. 5 А разрѣзъ прошелъ черезъ ту часть зародыша, въ которой обѣ глоточныя полости являются въ видѣ отдѣльныхъ полостей (Фиг. 5 А, *ph*). Надъ этими полостями помѣщается клоакальная полость, состоящая изъ верхней овальной части и изъ нижней, расположенной къ ней перпендикулярно и заостренной книзу. По формѣ и расположенію этой нижней части, легко можно заключить, что она произошла изъ той части клоакальной полости, которая въ



Фиг. 5. 5 А. Два разрѣза зародыша изъ стадіи сліянія глоточныхъ полостей (Фиг. 5) въ одну глоточную полость (*ph*); *tb* — жаберные мѣшки клоаки; *bb* — жаберные валики; *ms* — мезодермъ; *cbr* — глоточные жаберные мѣшки. (Zeiss. Apochr. Oc. 2 + Imm. 1.5).

предыдущихъ стадіяхъ развитія продолжалась книзу въ клоакальный каналъ. Никакихъ остатковъ отъ этого канала въ этой стадіи развитія уже не видно, такъ какъ центральная ячеистая масса, въ которой были замѣтны еще въ стадіяхъ фиг. 3 слѣды въ видѣ шва, распалась на отдѣльныя клѣтки и уничтожился шовъ. Замѣчательно, что остатки верхняго отдѣла осевой части энтодерма (фиг. 5 *tc*) можно различить и теперь очень ясно.

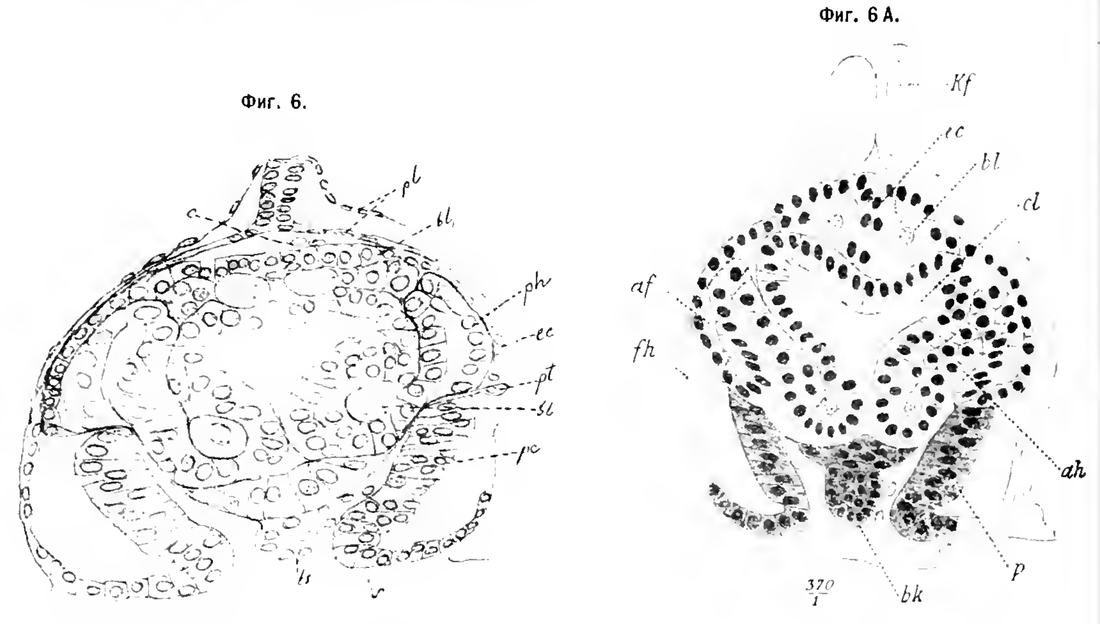
На фиг. 5 нарисованъ сагиттальный разрѣзъ черезъ тотъ же зародышъ въ плоскости слiянiя обѣихъ глоточныхъ полостей (*ph*). Расположенiе органовъ зародыша то же самое, какъ на предыдущей фигурѣ. Въ верхней части разрѣза видна клоака той же формы какъ на предыдущей фигурѣ (фиг. 5 A *cl*). Нижняя стѣнка клоаки образуетъ два возвышенiя по обѣ стороны оси, два продольныхъ валика, о которыхъ я упоминаю теперь вскользь, такъ какъ подробнѣе мы съ ними познакомимся при описанiи жабернаго ствола. Они были описаны Гейдеромъ и Коротневымъ подъ именемъ жаберныхъ валиковъ; это названiе мы оставляемъ и при нашемъ описанiи. Подъ клоакой располагается большая глоточная полость полулунной формы (фиг. 5 *ph*), происшедшая, какъ въ этомъ легко убѣдиться изъ сравненiя съ фиг. 5 A, отъ слiянiя двухъ глоточныхъ полостей. Средняя часть ея широкая, къ бокамъ и кверху съуживается и оканчивается, наконецъ, двумя слѣпыми концами (*cbr*), плотно прилегающими съ обѣихъ сторонъ къ клоакальной полости. Ихъ можно назвать глоточными жаберными мѣшками. Стѣнка глоточной полости состоитъ изъ довольно низкихъ эпителiальныхъ клѣтокъ, которыя по сравненiю съ предыдущими стадiями развитiя стали гораздо площе.

Между клоакой и глоточной полостью лежитъ ткань, мезодермъ, состоящая теперь изъ звѣздчатыхъ или веретенообразныхъ клѣтокъ, лежащихъ въ прозрачной массѣ межклѣтнаго вещества. Несмотря на довольно сильное измѣненiе строенiя мы легко узнаемъ въ этой ткани прежнюю центральную ячеистую массу, окружавшую глотку и состоявшую изъ бластомеръ и калиммоцитовъ. Одновременно съ измѣненiемъ мезодермальныхъ клѣтокъ и центральная масса, отдѣлявшая и прежде, какъ и теперь, клоаку отъ глотки также измѣнилась. Бластомеръ мы въ ней теперь не видимъ. Частью они превратились въ бластомерныя клѣтки, частью перешли въ другiя части зародыша; о судьбѣ ихъ я поговорю въ спецiальной статьѣ.

Съ образованiемъ глоточной полости заканчивается образованiе обѣихъ частей дыхательной полости, образующейся отъ слiянiя клоакальной и глоточной полостей. Это соединенiе полостей совершается позднѣе въ связи съ образованiемъ жабернаго ствола и жаберныхъ щелей. Прежде чѣмъ мы разсмотримъ образованiе этихъ обоихъ органовъ, я считаю не лишнимъ познакомиться нѣсколько подробнѣе съ изслѣдованiями прежнихъ авторовъ: Гейдера и Коротнева, которые, какъ сказано выше, придерживаются другихъ взглядовъ на образованiе глоточныхъ полостей. Въ этомъ отношенiи между моими взглядами и взглядами Гейдера есть очень большая разница, хотя наблюденiя наши настолько сходны, что на любомъ рисункѣ я могу показать всѣ части, которыя описаны ими. Вмѣстѣ съ тѣмъ разница

въ нашихъ взглядахъ такъ сложна, что она гораздо лучше будетъ понятна, если мы вмѣсто описанія сравнимъ соотвѣтственные рисунки разрѣзовъ между собою.

На фиг. 6 представленъ одинъ изъ разрѣзовъ, изъ той стадіи развитія, когда начинаетъ образовываться полость тѣла зародыша (полость яйцевой камеры, появляющаяся вновь). На фиг. 6 A изображенъ рисунокъ Гейдера, относящійся къ этой же стадіи развитія.



Фиг. 6. *pb* — клоакальныя складки, bl_1 — бластомеры верхнія; *ph* — глоточная складка; *ee* — эктодермъ; *pt* — крышка плаценты; *bl* — нижнія бластомеры; *pe* — плацента; *bs* — кровеобразовательная почка; *s* — кровяной синусъ.

Фиг. 6 A. Поперечный разрѣзъ черезъ стадію развитія съ только что замкнутыми клоакальными складками. Отверстіе клоакальнаго углубленія (*cl*) сузилось. Гребень клоакальныхъ складокъ (*kf*) находится въ періодѣ образованія. Амніональныя складки (*af*) развиты сильнѣе (чѣмъ въ предыдущей стадіи); Бластомеры (*bl*) не содержатъ болѣе калиммоцитовъ; *af* — амніональная складка; *ah* — амніональная полость; *bk* — кровеобразовательная почка; *bl* — бластомерообразныя клѣтки (мезоэнтодермъ); *cl* — клоакальная полость; *ce* — эктодермъ; *fh* — клоакальныя складки; *kf* — гребень клоакальныхъ складокъ; *p* — плацента (Увел. $\frac{370}{1}$). Изъ Гейдера (loc. cit. Taf. II, Fig. 11).

Изъ сравненія обоихъ рисунковъ видно, что полость глоточныхъ складокъ Гейдеръ считаетъ амніональною полостью, которая по его мнѣнію ограничена снаружи внутренней пластинкою амніональной складки, а съ другой — нижнею частью эктодерма. Амніональная полость переходитъ внизу непосредственно въ полость тѣла, поэтому онъ вообще считаетъ обѣ эти полости за одну, называя ихъ общимъ именемъ амніональной полости. Амніо-

нальная складка происходитъ, по его словамъ и рисункамъ, черезъ загибаніе краевъ эктодерма, прилежащихъ къ краю плаценты, внутрь. Понятно, что между обоими листами этой складки — наружнымъ, или эктодермомъ, и внутреннимъ, загнутымъ эктодермомъ внутрь — должна существовать полость, внутрь которой входятъ потомъ клѣтки изъ зародыша. Существенная разница между взглядомъ Гейдера и моимъ на продолженіе обоихъ этихъ образованій заключается въ томъ, что, по моему мнѣнію, глоточныя полости (Гейдеровскія амніональныя полости) происходятъ въ складкахъ, которыя я назвалъ глоточными складками, по мнѣнію Гейдера — происходятъ, такъ сказать, пассивно, вслѣдствіе того, что отъ поверхности зародыша образуются складки, идущія внутрь, которыя, понятнымъ образомъ ограничиваютъ между собою и поверхностью тѣла зародыша полость, названную имъ амніональною. Другими словами, происходитъ тоже самое что и у всѣхъ зародышей, имѣющихъ амніонъ: и тамъ между зародышемъ и складками амніона само собою образуется пространство, которое въ случаяхъ замыканія амніональныхъ складокъ въ амніонъ, превращается въ замкнутую со всѣхъ сторонъ полость, называемую также амніональною полостью, какъ напр. у амніональныхъ позвоночныхъ и насѣкомыхъ. Отсюда понятно и Гейдеровское названіе: амніонъ и амніональная полость, кажущееся на первый взглядъ страннымъ.

Такой взглядъ, основательность котораго мы разсмотримъ дальше, совершенно согласуется съ взглядомъ Гейдера на зародышъ *S. fusiformis* вообще. По Гейдеру зародышъ передъ образованіемъ его амніональныхъ складокъ одѣтъ не только сверху, но и снизу, т. е. со стороны плаценты эктодермомъ, происходящимъ, по его мнѣнію изъ микромерныхъ бластомеръ. Поэтому, принимая, что клоакальная полость образуется черезъ углубленіе поверхностнаго слоя зародыша, онъ считаетъ, что она образуется изъ эктодерма. Увидѣвши складки на краяхъ зародыша (мои глоточныя складки) онъ ошибочно заключилъ, что онѣ образуются также изъ эктодерма и вмѣстѣ съ тѣмъ подъискалъ и физіологическую роль для нихъ. Онъ вывелъ именно заключеніе, что эти складки служатъ для соединенія зародыша съ плацентою. Разъ онъ принялъ эти складки за амніональныя, то дальнѣйшимъ слѣдствіемъ этого было, что полость, которую онѣ ограничиваютъ, есть амніональная полость, подобная одноименной полости другихъ амніотическихъ животныхъ. Она, правда, не замыкается, такъ какъ амніотическія складки у *S. fusiformis* не сходятся другъ съ другомъ, но это объясняется, конечно, тѣмъ, что амніональныя складки приспособились къ другой функціи, тѣмъ болѣе, что прикрываніе зародыша амніономъ и не нужно, такъ какъ онъ до-

статочно прикрытъ клоакальной складкой матери. Причиною ошибки Гейдера послужило то, что онъ замѣтилъ связь наружнаго листка глоточной складки (моей) съ эктодермомъ, на самомъ дѣлѣ не существующую.

Посмотримъ теперь насколько взглядъ Гейдера основателенъ и насколько онъ доказывается рисунками, приложенными къ его монографіи. Уже Коротневъ[1] положительно отрицаетъ существованіе амніональныхъ складокъ и считаетъ ихъ за искусственный продуктъ. Я совершенно согласенъ въ этомъ отношеніи съ Коротневымъ, хотя не считаю такъ называемыя амніональныя складки Гейдера за продуктъ обработки препарата, а думаю, что онѣ суть результатъ недостаточности наблюденія и неправильности толкованія наблюдаемаго. Въ моей статьѣ «О зародышевыхъ листахъ *Salpa fusiformis* (ИАН. 1916. 553 слл.) я указалъ уже, что тѣхъ стадій развитія, когда образуются глоточныя складки и когда должны были образоваться и Гейдеровскія амніональныя, если бы онѣ были, Гейдеръ не наблюдалъ, такъ какъ его фиг. 8 представляетъ зародышъ задолго до образованія какихъ-либо органовъ, а на слѣдующей за нею фиг. 9 изображенъ зародышъ, у котораго уже хорошо развиты клоака, амніональныя складки и амніональная полость. Поэтому на его фиг. 9 трудно разобрать откуда образуются эти складки: изъ края-ли внѣшней части эктодерма, или изъ энтодерма, обращеннаго къ плацентѣ. Установленіе того или другого способа образованія складокъ, однако, было бы очень важно, такъ какъ если эти складки образуются черезъ инвагинацію нижней части эктодерма (Гейдеровскаго, конечно), обращеннаго къ плацентѣ, то это именно тотъ самый процессъ, который я наблюдалъ, при образованіи глоточныхъ складокъ, потому что то, что Гейдеръ называетъ эктодермомъ, есть по моему энтодермъ. Я поэтому прихожу къ тому заключенію, что амніональныхъ складокъ вообще (въ смыслѣ Гейдера) нѣтъ, что онѣ явились не искусственнымъ продуктомъ, а результатомъ неправильнаго толкованія разрѣзовъ и пробѣловъ въ стадіяхъ развитія, которыя наблюдалъ Гейдеръ.

Во время развитія *S. fusiformis*, въ теченіе тѣхъ стадій, на которыя ссылается Гейдеръ, образуются единственныя складки: это именно глоточныя складки, служащія зачатками глоточной полости, которая совершенно неправильно названа Гейдеромъ амніональною.

Дальнѣйшія стадіи развитія амніональныхъ складокъ и амніональной полости имѣютъ, по Гейдеру, регрессивный характеръ; наружная пластинка амніональной складки, представляющая наружную часть эктодерма,

[1] A. Korotneff. Zur Embryologie von *Salpa runcinata-fusiformis* (Zeitschr. für wissensch. Zoologie. Bd. LXII).

должна превращаться въ эпидермисъ, что конечно иначе и быть не могло; внутренняя пластинка, по словамъ Гейдера подвергается регрессу т. е. вѣроятно должна распадаться на клѣтки. Амніональныя полости сливаются вмѣстѣ въ одну общую полость. Этотъ процессъ описанъ Гейдеромъ подъ названіемъ регрессивнаго развитія амніональной полости (Rückbildung der Amnionhöhle). Этотъ взглядъ вполнѣ вяжется съ его представленіемъ объ амніональной полости какъ о провизорномъ образованіи. Сліяніе амніональныхъ полостей, которое совершенно правильно описано Гейдеромъ и которое до мелкихъ подробностей сходно съ моимъ описаніемъ и моими рисунками, касающимися сліянія глоточныхъ мѣшковъ еще разъ доказываетъ, что амніональныя полости Гейдера суть глоточныя полости.

Вообще наблюденія Гейдера вполнѣ сходны съ моими; толкованіе ихъ только различно. Онъ видѣлъ напримѣръ глоточные валики, которые я описываю выше и которые служатъ для замыканія глоточныхъ полостей; его рисунокъ 21 (l. c. Taf. III) совершенно похожъ на мою фиг. 3. Казалось бы, что сліяніе полостей, отношеніе полости происшедшей отъ этого сліянія къ клоакальной полости, должно было бы его убѣдить, что здѣсь мы имѣемъ дѣло не съ чѣмъ другимъ, какъ съ образованіемъ глоточной полости, а не съ какой то амніональною полостью, даже и не похожею на амніонъ другихъ животныхъ. Просматривая его рисунки, изображающіе разрѣзы дальнѣйшихъ стадій развитія, можно замѣтить, что неудовлетворительность разрѣзовъ служитъ главнымъ образомъ причиною оригинальнаго и вполнѣ ложнаго взгляда Гейдера на глоточныя складки. На этихъ рисункахъ (фиг. 27, 28, 29 l. c. Taf. IV) нѣтъ совсѣмъ глоточной полости, тогда какъ она въ этихъ стадіяхъ должна быть видна совершенно ясно. Произошло ли это отъ дефектовъ при приготовленіи разрѣзовъ, или отъ какихъ либо другихъ причинъ, я рѣшить не могу, но думаю, что такъ какъ онъ въ этихъ стадіяхъ не видѣлъ глоточной полости, то, естественно, онъ долженъ былъ искать ея зачатка въ другомъ мѣстѣ, чтобы уяснить себѣ вопросъ относительно ея происхожденія. И вотъ онъ началъ искать ее, кстати сказать весьма неудачно, въ центральной ячеистой массѣ подъ клоакальною полостью. Получился вслѣдствіе этого цѣлый рядъ рисунковъ очень мало убѣдительныхъ (фиг. 27, 28, 29 l. c.) и, я долженъ сказать, мало правдоподобныхъ. Я по крайней мѣрѣ, изслѣдовавъ внимательно больше сотенъ зародышей, ни разу не встрѣтилъ ни одного разрѣза, который оправдывалъ бы указанныя выше рисунки Гейдера.

Коротневъ отрицаетъ существованіе амніональныхъ складокъ, считая ихъ за искусственный продуктъ, какъ сказано выше, но онъ одновременно

принимаетъ существованіе амніональныхъ полостей. Относительно происхожденія этихъ полостей онъ расходится съ Гейдеромъ, полагая, что онѣ образуются въ видѣ двухъ рядовъ клѣтокъ, раздѣленныхъ другъ отъ друга продольной, лежащей параллельно оси зародыша «демаркаціонной линіей», по которой, по его мнѣнію, оба ряда клѣтокъ расходятся и между ними образуется полость. Очень можетъ быть, что ему попались такіе разрѣзы, въ которыхъ стѣнки его амніональной (моей глоточной) полости искусственно слипились, поэтому онъ полости не видѣлъ, такъ какъ въ той стадіи развитія, которую онъ рисуетъ на своей фиг. 5 (loc. cit.), полость должна быть, и, притомъ, довольно большая. Болѣе раннихъ стадій развитія, въ которыхъ собственно начинается ростъ полости въ глоточныхъ складкахъ онъ не видѣлъ, слѣдовательно и не имѣлъ основаній судить о томъ, какъ образуются эти полости (сравни мою фиг. 5 въ статьѣ «Объ образованіи зародышевыхъ листовъ» въ ИАН. № 7 1916 г.). Поэтому его сообщеніе о способѣ развитія амніональныхъ полостей имѣетъ мало значенія. Вообще же я думаю, что называть эти полости амніональными, отрицая одновременно существованіе амніональныхъ складокъ, не совсѣмъ логично, такъ какъ амніональною полостью называется такая, которая ограничена съ одной стороны стѣнкою тѣла зародыша, а съ другой амніональными складками. Если послѣднихъ нѣтъ, то само собою, что не можетъ быть и рѣчи объ амніональной полости.

Коротневъ, такъ же какъ и Гейдеръ, видѣлъ сліяніе амніональныхъ полостей, и не призналъ это сліяніе за образованіе единой глоточной полости. Поэтому ему надо было, такъ-же какъ и Гейдеру, подыскать зачатокъ глоточныхъ полостей. Онъ находитъ ихъ тамъ же, гдѣ и Гейдеръ. По его мнѣнію онѣ образуются въ видѣ двухъ полостей, лежащихъ по бокамъ и внизу клоаки, стѣнки которыхъ состоятъ частью изъ бластомеръ (его бластоцитовъ), частью изъ калиммоцитовъ (стр. 402). Какъ, однако, эти полости образуются, какъ и когда онѣ сливаются вмѣстѣ для образованія одной глоточной полости, — объ этомъ мы у Коротнева не находимъ никакихъ свѣдѣній. Я, съ своей стороны, могу только замѣтить, что ничего подобнаго описанный Коротневымъ явленіямъ я не наблюдалъ, а потому и не могу сказать какія полости имѣлъ онъ въ виду при описаніи развитія глоточной полости. По своему положенію подъ клоакальною полостью онѣ соотвѣтствуютъ Гейдеровскому зачатку глоточной полости: по своему симметричному расположенію и двойному составу онѣ отъ нея отличаются. У Коротнева нѣтъ, однако, детальнаго описанія развитія этихъ полостей, что особенно сильно затрудняетъ вообще сужденіе о природѣ ихъ и о томъ, какъ онъ представляетъ себѣ развитіе цѣльной глоточной полости.

Съ замыканіемъ глоточной полости связано появленіе двухъ эмбріональныхъ образованій, которыя Гейдеръ назвалъ «эктодермальною основною пластинкою» (ectodermale Basalplatte) и «эндофарингеальнымъ ячеистымъ стволомъ» (endopharyngealer Zellenstrang). Послѣдній образуется позднѣе, во время образованія жабернаго ствола; о немъ мы поговоримъ послѣ описанія развитія жабры. Образованіе же эктодермальной основной пластинки связано по Гейдеру непосредственно съ замыканіемъ амніональныхъ полостей (моихъ глоточныхъ полостей). Объ этой пластинкѣ мы поговоримъ сейчасъ.

Гейдеръ (стр. 404), описывая замыканіе амніональныхъ полостей посредствомъ валиковъ, отходящихъ отъ внутреннихъ пластинокъ амніональныхъ складокъ, говоритъ, что клѣтки этихъ валиковъ весьма скоро сливаются другъ съ другомъ въ замѣчательный синцитій, представляющій зернистую основную массу, въ которой заключены многочисленныя ядра. Такимъ путемъ образуется горизонтальная пластинка, названная имъ эктодермальной основной пластинкой, которая служитъ для раздѣленія полости тѣла зародыша отъ полости плаценты, т. е. другими словами исполняетъ роль крыши плаценты. Въ этомъ смыслѣ и высказывается Гейдеръ совершенно опредѣленно, указывая на мои рисунки, на которыхъ изображена крыша плаценты у *S. pinnata*, *S. punctata*, *S. fusiformis*. Мы видѣли, однако, выше, что крышка плаценты развивается изъ нижней части фолликула, тогда какъ основная пластинка Гейдера, хотя онъ ее и называетъ эктодермальной, развивается внутри полости тѣла зародыша, въ которой эктодерма по моему нѣтъ. Если основная пластинка представляетъ крышку плаценты, отгораживающую вмѣстѣ съ тѣмъ полость тѣла зародыша отъ полости плаценты, то изъ этого слѣдуетъ заключить, что раньше ея появленія обѣ эти полости были въ непосредственномъ сообщеніи и перегородки между ними не существовали. Справившись по этому вопросу съ рисунками Гейдера, мы увидимъ однако, что на разрѣзахъ зародыша, представленныхъ имъ на фиг. 9 и 11 въ раннихъ стадіяхъ развитія, т. е. тогда когда амніональныя полости развиты вполнѣ и нѣтъ никакихъ намековъ на ихъ сліяніе, существуетъ крышка плаценты, совершенно такъ же развитая, какъ и на моихъ разрѣзахъ. Гейдеръ, обозначая ее буквами (фиг. 9, *p'* loc. cit.), называетъ ее не крышкою, а верхнею стѣнкою плаценты. Въ данномъ случаѣ это конечно все равно, потому что какъ бы ее не назвали, она отгораживаетъ полость тѣла отъ полости плаценты. На фиг. 11 (loc. cit.) онъ не обозначаетъ ее никакой буквою, но всякій, знакомый съ его фиг. 9 легко узнаетъ на фиг. 11 крышу или верхнюю стѣнку плаценты уже по тому, что къ ея центральной части прикрѣпляется кровеобразовательная почка. Итакъ, крышка,

или по Гейдеру верхняя стѣнка плаценты, существуетъ, начиная съ очень раннихъ стадій развитія; если Гейдеръ ее не признаетъ у болѣе позднихъ стадій, то это происходитъ оттого, что она вообще очень сильно измѣняется. Во всякомъ случаѣ ее найти можно довольно легко по ея положенію относительно кровеобразовательной почки.

Изъ всего сказаннаго слѣдуетъ, что если наблюденія Гейдера относительно существованія основной пластинки справедливы, то она не можетъ играть той роли, которую ей приписываетъ Гейдеръ, т. е. служить для отдѣленія полости тѣла отъ полости плаценты, потому что, при наличности крыши плаценты, такая роль является излишнею.

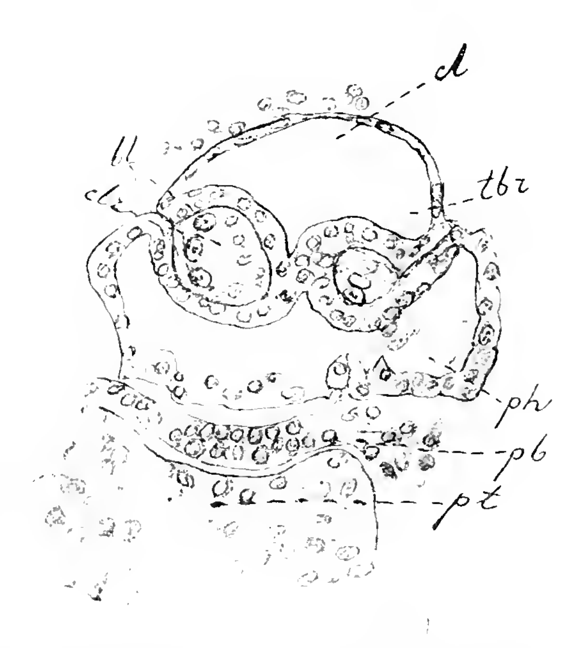
Я могу вполнѣ подтвердить существованіе Гейдеровской основной пластинки, хотя вполнѣ опредѣленно не могу сказать, что она образуется именно изъ глоточныхъ валиковъ. Гейдеръ, собственно говоря, также не приводитъ доказательствъ въ пользу такого происхожденія. Въ полости тѣла зародыша находится такая масса элементовъ, что трудно сказать навѣрно, что основная пластинка образуется именно изъ клѣтокъ глоточныхъ валиковъ, а не изъ какихъ нибудь другихъ элементовъ. Я считаю это возможнымъ, но не доказаннымъ вполнѣ.

Гистологическія особенности основной пластинки, описанныя Гейдеромъ, я могу также вполнѣ подтвердить. Основная пластинка представляетъ синцитій, состоящій изъ основного плазматическаго вещества, заключающаго внутри себя большое количество ядеръ, какъ это видно на фиг. 7. Ядра скопляются въ нѣкоторыхъ мѣстахъ большими группами, въ другихъ ихъ совершенно нѣтъ, и пластинка состоитъ только изъ плазмы. Краями своими, которые нѣсколько утончены и загнуты внизъ, основная пластинка налегаетъ на верхній край стѣнки плаценты, совершенно такъ, какъ описываетъ Гейдеръ. Поэтому очень легко можно было бы ее принять за крышу плаценты, если бы настоящая крыша плаценты не была найдена.

Особенность строенія основной пластинки, именно ея синцитіальный характеръ облегчаетъ значительно задачу изслѣдованія ея дальнѣйшей судьбы. При другомъ строеніи было бы гораздо труднѣе найти эту пластинку среди очень разнообразныхъ элементовъ, наполняющихъ полость тѣла.

На фиг. 7 представленъ поперечный разрѣзъ дыхательной полости въ стадіи образованія жабры. Видна сверху клоакальная полость (фиг. 7 *cl*), подъ нею — глоточная полость (фиг. 7 *ph*), между обѣими полостями располагается двойной зачатокъ жабернаго ствола. Подъ глоточною полостью лежитъ сначала основная пластинка (*pb*), а подъ нею видна верхняя часть плаценты. Въ расположеніи этихъ двухъ частей слѣдуетъ обратить вниманіе

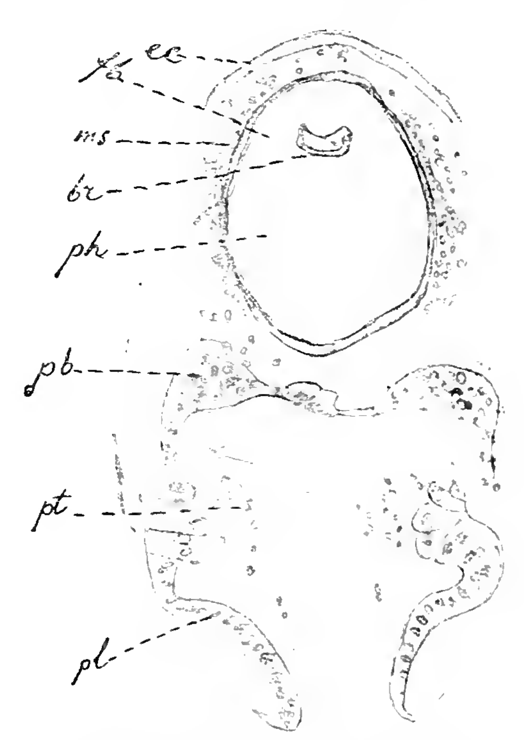
на два важныхъ пункта. Во 1-хъ основная пластинка не прилегаетъ непосредственно къ плацентѣ; между обоими этими органами есть маленькій промежутокъ, являющійся на разрѣзѣ въ видѣ щели. Во 2-хъ можно ясно убѣдиться на разрѣзѣ, что полость плаценты не открыта сверху, а закрывается крышкою (*pl*), которую мы видѣли уже въ раннихъ стадіяхъ развитія. Въ описываемой теперь стадіи развитія она измѣнила свое строеніе. Эпителіальныя клѣтки, изъ которыхъ она первоначально образовалась, удлиняются, принимаютъ треугольную форму и крышка плаценты является теперь не въ видѣ пластинки, а въ видѣ треугольной пробки, затыкающей полость плаценты. Это измѣненіе крыши плаценты станетъ понятнымъ, если мы обратимъ вниманіе на болѣе раннія стадіи; мы легко увидимъ, что, начиная съ раннихъ стадій образованія дыхательной полости, крыша плаценты начинаетъ очень сильно измѣняться. Сначала она состоитъ изъ одного слоя эпителіальныхъ клѣтокъ, которыя очень сильно растутъ въ центрѣ пластинки и суживаются къ краямъ ея (ср. фиг. 1, 1 А и 2, а также фиг. 8 моей статьи о зародышевыхъ листахъ сальпъ въ ИАН. 1916, стр. 503 сл.); при этихъ измѣненіяхъ, какъ бы они не были велики, всегда можно на разрѣзѣ отличить крышу плаценты, такъ какъ она плотно прилегаетъ къ кровеобразовательной почкѣ, а послѣдняя, до распаденія ея на отдѣльныя клѣтки, всегда видна ясно. Затѣмъ начинается сильное размноженіе клѣтокъ центральной части крыши. Она очень сильно утолщается и состоитъ изъ многихъ рядовъ клѣтокъ (фиг. 3 и 4 *pt*). Наконецъ, въ періодѣ образованія жаберъ, клѣтки ея размножаются на столько, что наполняютъ всю полость плаценты, при чемъ въ верхней части крышки онѣ сливаются въ синцитій, въ нижней части онѣ принимаютъ звѣздчатую форму. Такое состояніе крыши плаценты пари-



Фиг. 7. Поперечный разрѣзъ зародыша, въ которомъ образовалась основная пластинка (*pb*). Между нею и крышкою плаценты находится промежутокъ; *cl* — клоака; *tbr* — жаберные мѣшки; *bl* — бластомеры; *cbr* — жаберныя трубки; *ph* — глотка. (Zeiss. Apochr. Oc. 2 + Im. 1, 5).

совано на разрѣзѣ фиг. 10. Здѣсь очень ясно можно различить боковыя стѣнки плаценты, состоящія изъ совершенно яснаго эпителія высокаго въ верхней части плаценты и болѣе низкаго въ нижней. Вся полость плаценты занята описанными сейчасъ клѣтками. Въ томъ, что онѣ произошли изъ крыши плаценты можно легко убѣдиться потому, что на концѣ этой большой массы клѣтокъ лежитъ кровеобразовательная почка, занимающее, слѣдовательно, совершенно то же положеніе какъ и въ раннихъ стадіяхъ, когда крыша плаценты состояла только изъ одного слоя клѣтокъ. При такихъ измѣненіяхъ не удивительно, что крышку плаценты можно и не узнать, если не слѣдить за ней внимательно черезъ цѣлый рядъ стадій развитія.

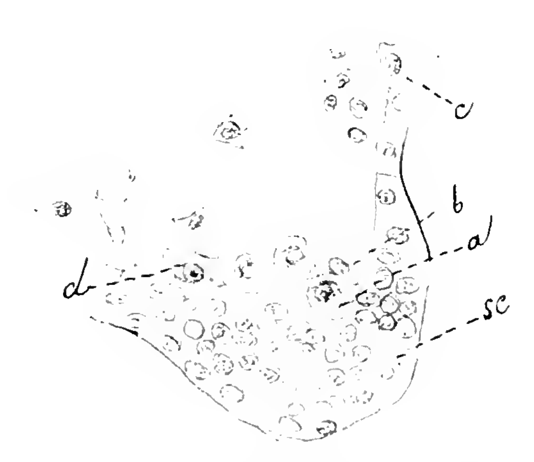
Изъ описанія стадіи развитія фиг. 7 можно убѣдиться, что основная пластинка не образуетъ крыши плаценты. Она отдѣлена отъ послѣдней тонкимъ щелевиднымъ промежуткомъ и лежитъ въ полости тѣла. На болѣе позднихъ стадіяхъ развитія основная пластинка еще болѣе удаляется отъ плаценты. Фиг. 8 представляетъ поперечный разрѣзъ изъ довольно поздней стадіи развитія, въ которой уже образовалась вполнѣ жабра (*br*) и начинается образованіе мускулатуры тѣла (*msc*). Подъ дыхательной полостью видна основная пластинка (*bp*), которая совершенно не измѣнила своего строенія, но измѣнила положеніе. Она не только не придвинулась къ плацентѣ, что должно бы было случиться, если бы она играла роль крыши плаценты, а напротивъ значительно отодвинулась отъ послѣдней внутрь полости тѣла зародыша.



Фиг. 8. Поперечный разрѣзъ зародыша; у котораго образовались уже жабра (*br*) и жаберныя щели (*fb*); *ec* — эктодермъ; *ph* — глоточная полость; *ms* — мезодермъ; *pb* — основная пластинка; *pt* — жаберная крышка; *pl* — плацента. (Zeiss. oc. 4 + obj. 8).

Можно, слѣдовательно, считать доказаннымъ на основаніи всего описаннаго выше, что основная пластинка Гейдера не играетъ роли крыши плаценты, какъ это высказалъ раньше и Коротневъ, впрочемъ не аргументируя своего взгляда. Изслѣ-

дованіе болѣе позднихъ стадій развитія показываетъ, что она вообще не имѣетъ никакого отношенія къ плацентѣ. Она остается всегда въ полости тѣла и распадается, наконецъ, на отдѣльныя клѣтки. Фиг. 9 представляетъ разрѣзъ центральной части основной пластинки изъ болѣе поздней стадіи развитія. Главная масса ея состоитъ еще изъ синцитія; она вдается выпуклою поверхностью въ плацентную крышку, вогнутая же часть ея обращена въ полость тѣла. Возлѣ нея находится довольно много клѣтокъ амебообразныхъ, такъ какъ онѣ снабжены отростками, нѣкоторыя изъ нихъ вытянуты и имѣютъ полулунную форму. Многія изъ этихъ клѣтокъ лежатъ свободно въ полости тѣла, но есть нѣсколько клѣтокъ лежащихъ еще въ плазматической массѣ въ особыхъ полостяхъ, наполненныхъ прозрачной свѣтлой жидкостью. Относительно происхожденія этихъ клѣтокъ можетъ быть два предположенія: эти клѣтки можно было бы разсматривать какъ клѣтки питающіяся плазмою синцитія, или, наоборотъ, какъ отдѣляющіяся отъ синцитія и ведущія свободную жизнь. Первое предположеніе мнѣ кажется менѣе вѣроятнымъ, такъ какъ тѣ изъ этихъ клѣтокъ, которыя заключены въ плазмѣ, окружены слоемъ прозрачнаго жидкаго вещества. Изъ этого слѣдовало бы заключить, если видѣть въ нихъ клѣтки питающіяся плазмою, что послѣдняя выдѣляетъ какую-то питательную жидкость, которую клѣтки поѣдаютъ эндосмотически; значитъ онѣ будутъ питаться не плазмой синцитія, а какимъ то веществомъ выдѣляемымъ этой плазмой. Подобное питаніе мало вѣроятно: если клѣтки питаются на счетъ плазмы синцитія, то конечно онѣ въ состояніи пожирать ее. Гораздо болѣе вѣроятно для меня предположеніе, что вокругъ ядеръ синцитія скопляется сначала жидкость, въ которую попадаетъ ядро съ извѣстнымъ количествомъ плазмы. Скопившаяся жидкость мало по малу растягиваетъ периферическій слой плазмы синцитія, утончаетъ его, заставляетъ лопаться, а отдѣлившаяся отъ синцитія клѣтка освобождается черезъ прорывъ слоя синцитальной плазмы и попадаетъ въ полость тѣла. Въ пользу этого предположенія говоритъ то обстоятельство, что на вогнутой поверхности основной пластинки



Фиг. 9. Часть синцитія основной пластинки съ выходящими изъ нея клѣтокъ (*a*, *b*. *c*, *d*). (Zeiss. Oc. 2 + Im. 1, 5).

замѣтны вырѣзки полукружной формы, которыя можно объяснить тѣмъ, что онп составляютъ остатки полостей, изъ которыхъ освободились клѣтки. Въ нѣкоторыхъ мѣстахъ можно видѣть происхожденіе этихъ вырѣзокъ, допускающее только такое толкованіе, которое я сейчасъ предложилъ. Подъ литерою *a* нарисована клѣтка, которая еще лежитъ въ вырѣзкѣ; она совсѣмъ освободилась изъ синцитія и могла бы выйти въ полость тѣла, если бы вырѣзка не была заперта другой клѣткой (*b*), раньше освободившеюся и лежащею возлѣ вырѣзки, запирая выходъ изъ нея своимъ тѣломъ. Подъ литерою *c* видна клѣтка, еще не освободившаяся, но лежащая въ полости, отдѣленной отъ полости тѣла только очень тонкою стѣнкою; съ прорывомъ этой стѣнки выходъ изъ полости дѣлается для клѣтки свободнымъ. Подъ литерою *d* лежитъ клѣтка, очевидно только освобожденная изъ полости; она лежитъ свободно, снабжена на своей поверхности, обращенной къ полости тѣла, короткими псевдоподіями, а поверхность ея, обращенная къ основной пластинкѣ, выпукла и совершенно соотвѣтственно вырѣзкѣ синцитія.

На болѣе позднихъ стадіяхъ изъ основной пластинки видны только остатки въ видѣ синцитія, но вмѣсто нея видны вблизи ея массы подвижныхъ клѣтокъ, составляющихъ вмѣстѣ съ другими клѣтками мезодермъ.

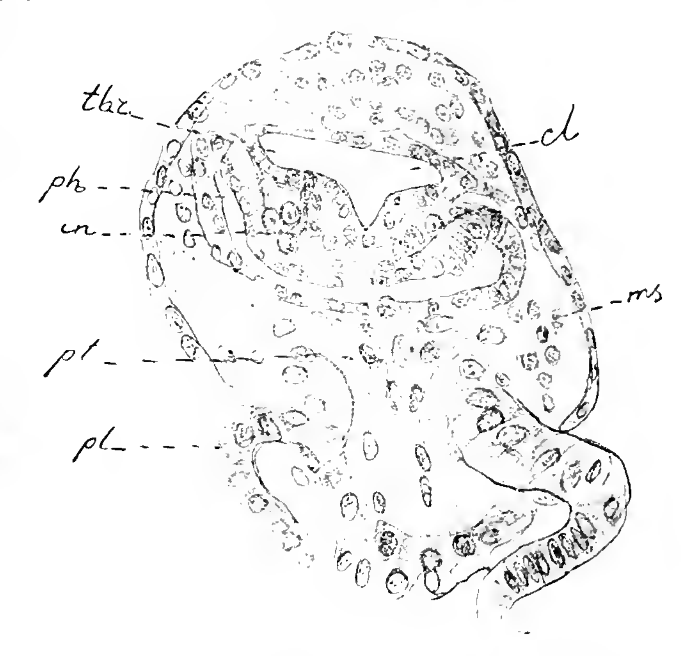
Перейдемъ теперь къ развитію *жабернаго аппарата*, который состоитъ у сальпъ, какъ извѣстно изъ жаберной трубки и изъ двухъ, лежащихъ по обѣимъ сторонамъ послѣдней, жаберныхъ отверстій, служащихъ для сообщенія клоакальной полости съ глоточной. Образованіе жаберной трубки или жабры описывалось соотвѣтственно съ общими представленіями относительно образованія дыхательной полости. Тѣ эмбріологи, которые полагали, что дыхательная полость сальпъ образуется въ видѣ одной полости, впослѣдствіе раздѣляющейся на клоакальную и глоточную полости (Тодаро, Барруа и я) описывали развитіе жаберной трубки въ видѣ двухъ боковыхъ складокъ, соединяющихся потомъ въ центрѣ и раздѣляющихъ такимъ образомъ общую дыхательную полость на двѣ. Первымъ отсталъ отъ этого воззрѣнія Тодаро[1], который убѣдился, что клоакальная и глоточная полости образуются изъ отдѣльныхъ зачатковъ. Затѣмъ Бруксъ[2] доказалъ болѣе основательно такое отдѣльное образованіе обѣихъ полостей. Наконецъ къ такимъ же результатамъ пришелъ и Гейдеръ, съ взглядами

---

[1] Fr. Todaro. Sul omologia della branchia delle Salpe con quella degli altri Tunicati Rend. Accad. Lincei Ser. 4. Vol. 4, 2 Sem.).

[2] W. K. Brooks. The origin of the organs of Salpa (John Hopkins University Circular Vol. XII, 1893 также и въ The genus Salpa (Memoirs from the Biological Laboratory of John Hopkins University 1893).

котораго, изложенными въ цитированномъ мною сочиненіи, мы познакомились подробно. Я пришелъ къ тому же заключенію при изслѣдованіи развитія *Salpa zonaria*, а теперь также и для *Salpa fusiformis*. Такой способъ развитія дыхательной полости долженъ быть типичнымъ для сальпъ вообще, хотя и представляетъ у различныхъ видовъ сальпъ не маловажныя особенности. Въ частности, по отношенію къ *Salpa fusiformis*, по наблюденіямъ Гейдера и Коротнева развитіе жаберной трубки сводится къ тому, что перегородка дыхательной полости, происходящая отъ сближенія нижней стѣнки клоаки съ верхней стѣнкой глоточной полости прорывается двумя отверстіями съ боковъ и отдѣляетъ такимъ образомъ среднюю часть, которая и составляетъ жаберную трубку, состоящую, слѣдовательно, вверху изъ стѣнки клоаки, внизу — изъ стѣнки глотки. Предварительно нижняя стѣнка клоаки утолщается въ видѣ двухъ симметричныхъ валикахъ, которые Гейдеръ называетъ жаберными валиками.

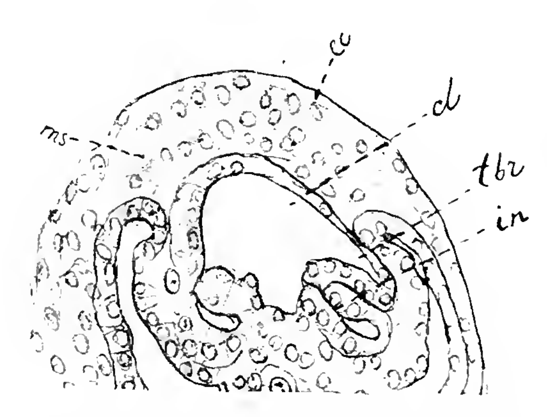


Фиг. 10. Поперечный разрѣзъ зародыша съ сжавшимися глоточными мѣшками, въ одну глотку (*ph*); *tbr* — клоакальный жаберный мѣшокъ; *cl* — клоака; *ms* — мезодермъ; *pt* — жаберная крышка; *pl* — плацента; *in* — углубленіе стѣнки жабернаго валика для образованія жабернаго канала.

При описаніи послѣднихъ стадій развитія глотки мы познакомились уже съ этими образованіями. Онѣ играютъ дѣйствительно важную роль въ образованіи жаберной трубки, какъ полагаетъ Гейдеръ; однако, слѣдуетъ замѣтить что развитіе жаберной трубки идетъ гораздо сложнѣе, чѣмъ описываетъ австрійскій ученый. Оно усложняется именно двумя важными обстоятельствами, не принятыми Гейдеромъ во вниманіе въ его изслѣдованіи. Первое изъ нихъ заключается въ томъ, что между клоакой и глоткой находится клѣточная масса, состоящая изъ калиммоцитовъ и бластомеръ; это: названная мною выше центральная ячеистая масса. Когда обѣ глоточныя

полости сливаются вмѣстѣ для образованія одной полости (фиг. 5, 5 А), бластомеры изъ центральной ячеистой массы переселились въ заднюю часть зародыша, и она состоитъ теперь исключительно изъ калиммоцитовъ. Эта клѣточная ткань служитъ, по моему мнѣнію, источникомъ для Гейдеровскаго эндофарингеальнаго ствола клѣтокъ. Во время образованія жаберной трубки, она остается на нижней стѣнкѣ клоаки и входитъ въ глоточную полость (фиг. 11 и 12). Когда будетъ идти рѣчь о позднихъ стадіяхъ образованія жаберной трубки, мы разсмотримъ ее подробнѣе.

Гейдеръ (стр. 420 loc. cit.), собственно говоря, считаетъ ту же массу клѣтокъ за источникъ образованія эндофарингеальнаго ствола, но онъ описываетъ образованіе этой массы клѣтокъ иначе. Онъ говоритъ, что послѣ замыканія клоакальныхъ углубленій, на нижнемъ концѣ его образуется ячеистая пробка, по обѣимъ сторонамъ которой ложатся бластомеры, изъ которыхъ строится стѣнка глотки. Послѣ образованія глотки, ячеистая пробка остается въ глоточной полости и превращается въ эндофарингеальный стволъ. По моимъ наблюденіямъ развитіе глотки происходитъ не изъ бластомеръ, окружающихъ ячеистую пробку Гейдера, а изъ калиммоцитовъ глоточныхъ складокъ, принимаемыхъ Гейдеромъ за амніональную полость. Тѣмъ не менѣе, несмотря на такое различіе во взглядѣ на развитіе глотки, я нахожу, что источникомъ для образованія эндофарингеальнаго ствола служитъ та же ячеистая масса, хотя, по мнѣнію Гейдера, она образуется послѣ замыканія клоакальнаго углубленія, въ сущности же существуетъ еще раньше образованія зачатка клоаки.



Фиг. 11. Верхняя часть разрѣза черезъ зародышъ во время замыканія жаберныхъ каналовъ. Буквы какъ на фиг. 10. (Zeiss. Apochr. 2 + 1, 5).

Второй фактъ, не замѣченный Гейдеромъ, относится спеціально къ образованію жабры. У *S. fusiformis* этотъ процессъ идетъ сложнѣе, чѣмъ у нѣкоторыхъ другихъ сальпъ.

Вскорѣ за замыканіемъ глоточныхъ полостей, стѣнки каждаго жабернаго валика углубляются въ видѣ очень тонкаго, но глубокаго канала, расширеннаго внизу. На разрѣзѣ, нарисованномъ на фиг. 10, такой каналъ видѣнъ только на одномъ изъ жаберныхъ валиковъ, именно на лѣвомъ; правый каналъ разрѣзомъ не задѣтъ. Возлѣ канала, который мы назовемъ

жабернымъ каналомъ (*in*), находятся три бластомеры; нахожденіе бластомеръ въ стѣнкахъ жаберныхъ каналовъ очень характерно и мы встрѣтимъ ихъ и въ дальнѣйшихъ стадіяхъ развитія. Въ слѣдующей стадіи развитія (фиг. 11), очень мало подвинувшейся, сравнительно съ только что разсмотрѣнной, жаберные каналы замыкаются. Замыканіе происходитъ путемъ сближенія стѣнокъ канала; на фиг. 11 виденъ еще слѣдъ этого сближенія въ видѣ тонкой линіи. Края отверстія углубленій жаберныхъ трубокъ видны также довольно ясно и впродолженіе дальнѣйшихъ стадій развитія. Послѣ замыканія жаберныхъ каналовъ расширенія ихъ принимаютъ форму замкнутыхъ трубокъ, лежащихъ въ центральной ячеистой массѣ, и покрытыхъ сверху нижней стѣнкой клоаки, а снизу — верхней стѣнкой глоточной полости.



Фиг. 12. Поперечный разрѣзъ черезъ зародышъ съ образовавшимися жаберными мѣшками: клоакальными (*tbr*) и глоточными (*cbr*). Буквы какъ на предыдущихъ фигурахъ. (Zeiss. Apochr. 2 и 1, 5).

На фиг. 12 представленъ поперечный разрѣзъ зародыша въ стадіи окончательнаго образованія жаберныхъ трубокъ.

Изъ этой фигуры видно, что зачатокъ жабернаго аппарата, образовавшійся изъ соприкасающихся другъ съ другомъ стѣнокъ глотки и клоаки, имѣетъ слѣдующій составъ (фиг. 12, 12А). Въ центрѣ его находится ямка — остатокъ отъ прежняго клоакальнаго канала, отмѣченнаго выше; по обѣимъ сторонамъ его находятся жаберные валики (фиг. 12), заключающіе въ себѣ жаберныя трубки *cbr*, а по обѣимъ сторонамъ жаберныхъ валиковъ стѣнки клоаки и глотки плотно сростаются другъ съ другомъ въ пластинки, которыя позднѣе прорываются отверстіями — жаберныя отверстія (*tbr*). Если мы сравнимъ это устройство жабернаго аппарата сальпы съ жабернымъ аппаратомъ другихъ туникатъ, напр. асцидій, то не трудно опредѣлить гомологію этихъ частей. Жаберныя отверстія сальпъ, какъ происходящія отъ прорыва глоточной полости въ клоаку соотвѣтствуютъ жабернымъ отверстіямъ (tremata) асцидій. Жаберные валики, или такъ называемыя жабры сальпъ будетъ представлять слѣдовательно гомологъ тѣхъ перекладинъ, лежащихъ между трематами, которыя содержатъ сосуды жабры. Такъ какъ у сальпъ количество жаберныхъ отверстій низведено до одной пары, то перекладина между ними будетъ сведена до одной, такъ называемой жабры сальпъ, которая, также какъ

перекладины у сальпъ функціонируетъ въ качествѣ органа проводящаго кровь, подлежащую окисленію.

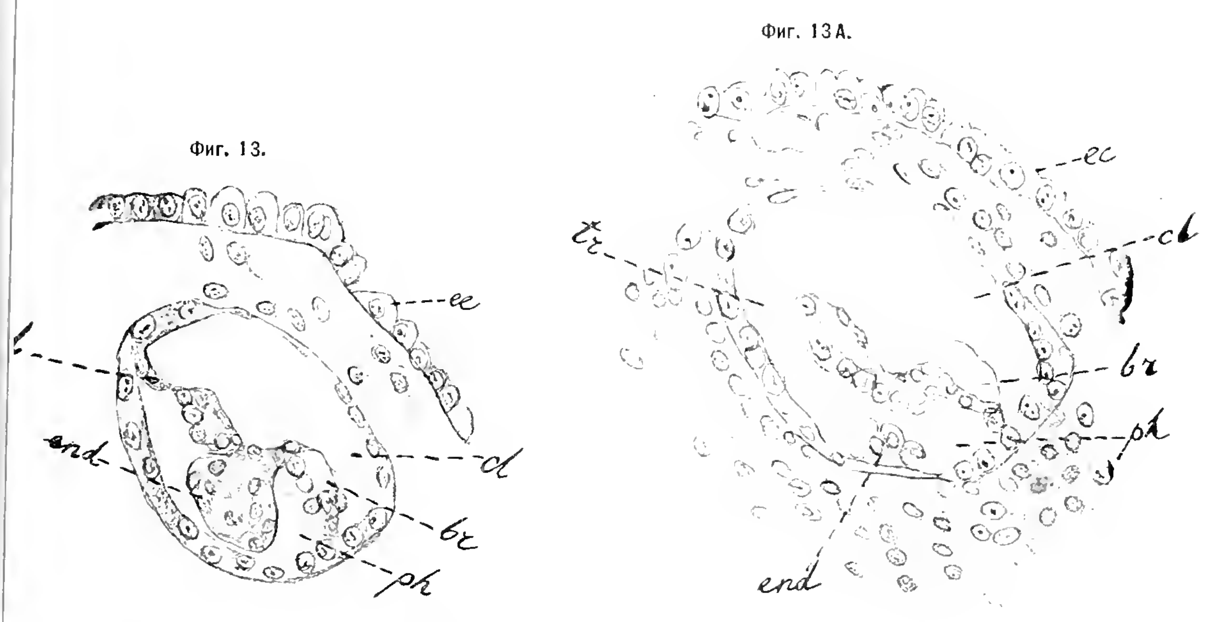
Въ слѣдующихъ стадіяхъ развитія (фиг. 13, 13 А) жаберныхъ трубокъ уже не видно и слѣда. По всей вѣроятности онѣ распадаются на отдѣльныя клѣтки, которыя затѣмъ уносятся кровью. Мнѣ не приходилось видѣть самаго процесса распаденія, но я заключаю о немъ изъ того, что жабра въ стадіяхъ, изображенныхъ на фиг. 13, 13 А состоитъ изъ одного слоя клѣтокъ, ограничивающихъ кровяной синусъ. Между этими клѣтками находятся какъ калиммоциты, такъ и бластомеры, очень рѣзко отличающіеся другъ отъ друга строеніемъ своихъ ядеръ. Жабра состоитъ въ этой стадіи развитія изъ двухъ симметричныхъ половинъ, связанныхъ между собою еще однослойною перемычкою на нѣкоторыхъ разрѣзахъ. Каждая половина имѣетъ свою отдѣльную полость. На разрѣзѣ фиг. 13 А полости обѣихъ половинъ начинаютъ уже соединяться. Въ концѣ концовъ обѣ половины жабры сливаются въ одну общую трубку, верхняя стѣнка которой гораздо тоньше нижней (фиг. 8 *br*).

Описанный сейчасъ способъ развитія жабры я наблюдалъ покуда только у *S. fusiformis*. У *S. zonaria* я не видѣлъ ничего похожаго на жаберныя трубки, вслѣдствіе чего развитіе жабры у нея идетъ гораздо проще. Вообще въ развитіи сальпъ можно встрѣтиться съ такими сюрпризами, когда у одного вида органы образуются иначе чѣмъ у другого, или имѣются такіе зачатки, которыхъ у другого нѣтъ.

На описанныхъ сейчасъ разрѣзахъ (фиг. 13, 13 А), отъ перемычки между обѣими половинами жабры, отходитъ внутрь глоточной полости круглый комокъ клѣтокъ, состоящій, судя по ядрамъ ихъ, изъ калиммоцитовъ (*end*). Это и есть эндофарингеальный стволъ Гейдера. Судя по его положенію въ дыхательной полости, слѣдуетъ заключить, что онъ образуется изъ калиммоцитовъ центральной ячеистой массы. Сравнивая разрѣзы фиг. 13 и 13 А между собою, не трудно заключить, что на фиг. 13 А, гдѣ эндофарингеальный стволъ лежитъ на днѣ глоточной полости, отрѣзана только нижняя часть его. Изъ этого положенія эндофарингеальнаго ствола Коротневъ заключаетъ, что онъ образуется въ нижней части глоточной полости. Такое заключеніе ошибочно, такъ какъ на фиг. 13 можно вполнѣ убѣдиться, что онъ образуется въ верхней части этой полости, гдѣ онъ и прикрѣпленъ. Онъ лежитъ именно въ той области, гдѣ прежде лежала центральная ячеистая масса, помѣщающаяся послѣ сформированія глоточной полости между клоакой и глоткой. Отсюда она внѣдряется внутрь глоточной полости, какъ сказано выше, и здѣсь виситъ сначала въ видѣ ствола, состоящаго изъ клѣ-

токъ, калиммоцитовъ, а потомъ разсыпающагося на отдѣльныя клѣтки, странствующія въ дыхательной полости.

Эндофарингеальный стволъ свойственъ не одной только *S. fusiformis*. Онъ былъ наблюдаемъ и у другихъ видовъ сальпъ и при томъ гораздо болѣе



Фиг. 13, 13 A. Поперечные разрѣзы черезъ зародышъ во время образованія эндофарингеальнаго ствола (*end*) и жаберныхъ щелей (*tr*); *br* — жабра; *l* — пластинка, прикрѣпляющая жабру къ стѣнкѣ дыхательной полости остатокъ соединенныхъ вмѣстѣ стѣнокъ клоакальнаго и глоточнаго жаберныхъ мѣшковъ; остальныя буквы какъ на предыдущихъ разрѣзахъ. (Zeiss. Apochr. 2 + I, 5).

развитымъ, чѣмъ у *S. fusiformis*. Способъ образованія его также различенъ у разныхъ видовъ сальпъ. У *S. punctata* онъ проникаетъ изъ мезоэнтодермальной массы какъ въ полость клоаки, такъ и въ полость глотки (см. мой Neue Unters. über die embryonale Entwickl. d. Salpen. Mitth. aus der zool. Station zu Neapel Bd. IV) въ видѣ большого количества клѣтокъ, разсѣянныхъ въ этихъ полостяхъ. У *S. punctata* мнѣ не удалось прослѣдить дальнѣйшую судьбу эндофарингеальныхъ клѣтокъ. У *S. zonaria* мнѣ удалось убѣдиться, что эндофарингеальныя клѣтки служатъ питательнымъ матерьяломъ для зародыша. Въ извѣстныхъ стадіяхъ развитія клѣтки глоточной стѣнки вытягиваются внутрь глоточной полости въ видѣ пальцевидныхъ отростковъ, которыми онѣ присасываются къ проходящимъ мимо эндофарингеальнымъ клѣткамъ, ловятъ ихъ такимъ образомъ и высасываютъ ихъ содержимое. По всей вѣроятности и у другихъ видовъ сальпъ происходитъ

то же самое: клѣтки, попавшія въ глоточную полость поѣдаются эпителіальными клѣтками ея стѣнокъ.

Образованіе *жаберныхъ щелей* происходитъ послѣ того, какъ вполнѣ развилась жабра, т. е. послѣ того, какъ образовались и затѣмъ разрушились жаберныя трубки. Симметричный двойной зачатокъ жабры превращается въ одиночную жабру; когда начинается этотъ процессъ, весьма несложный и состоящій въ сліяніи обоихъ зачатковъ жабры, по бокамъ жабернаго ствола прерываются стѣнки соединенныхъ стѣнокъ глотки и клоаки отверстіями — жаберными щелями. На фиг. 13 A съ лѣвой стороны уже образовалась жаберная щель, съ правой — жабра подвѣшена еще къ стѣнкѣ глотки. На фиг. 13 жабра подвѣшена съ обѣихъ сторонъ тонкими пластинками къ стѣнкѣ дыхательной полости. Эти пластинки (фиг. 13 *l*) составляютъ, какъ нетрудно убѣдиться сравненіемъ съ предыдущею стадіею развитія (фиг. 12 *tbr* и *cbr*), остатокъ соединенія жаберныхъ мѣшковъ глоточной и клоакальной полостей съ боковъ жабры. Въ стадіи фиг. 12 въ этой пластинкѣ можно, конечно, различить два слоя: клоакальную и глоточную стѣнки; на фиг. 13 она состоитъ изъ одного слоя сплющенныхъ клѣтокъ. При такой нѣжности строенія, конечно такая пластинка, связывающая жабры со стѣнкою дыхательной полости, легко можетъ разорваться и дать начало образованію жаберной щели.

Въ заключеніе, надо упомянуть еще объ одномъ образованіи, не относящемся прямо къ развитію дыхательной полости, но появляющемся именно въ періодъ ея развитія. Это, именно, клѣтки, появляющіяся въ полости материнскихъ клоакальныхъ складокъ, между ними и зародышемъ. Въ стадіяхъ, изображенныхъ на фигурахъ 1, 1 A, 2, 3 и 4 A въ верхней части этой полости появляются маленькія клѣтки (*cr*), повидимому подвижныя и снабженныя очень темно окрашенными ядрами. Я не могъ прослѣдить происхожденія этихъ клѣтокъ и могу высказать въ этомъ отношеніи только предположеніе. Принимая во вниманіе, что эти клѣтки появляются только въ верхней части полости клоакальныхъ складокъ, гдѣ гораздо раньше лежитъ остатокъ яйцевода, я предполагаю, что эти клѣтки, по всей вѣроятности, происходятъ отъ распавшагося яйцевода.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О новомъ видѣ *Helicoprion* (*Helicoprion Clerci*, n. sp.).

Предварительное сообщеніе.

А. Карпинскаго.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 27 апрѣля 1916 г.).

Извѣстный американскій ученый C. B. Eastman отмѣтилъ въ 1905 году поучительность и неожиданность нѣкоторыхъ палеонтологическихъ открытій послѣднихъ предшествовавшихъ лѣтъ, указавъ особенно на *Pareiasaurus* среди рептилій, *Helicoprion* среди рыбъ и *Daemonohelix (Daemonelix)* — между проблематическими формами. Природа послѣдняго ископаемаго съ тѣхъ поръ, повидимому, окончательно разгадана. Свѣдѣнія объ ископаемыхъ рептиліяхъ сильно увеличились многими замѣчательными открытіями, а парейазавры и сопутствующія имъ формы, благодаря работамъ Амалицкаго на С. Двинѣ, продолжаютъ обогащаться совершенно исключительнымъ, по научному значенію, матеріаломъ. Выдающійся интересъ и значеніе имѣютъ и новыя открытія остатковъ млекопитающихъ въ третичныхъ отложеніяхъ юга Европейской Россіи и Тургайской области, остатковъ почти невѣроятной сохранности одной изъ древнѣйшихъ, средне-кембрійской фауны въ Канадѣ и пр., и пр. Истманъ, какъ ихтіологъ по преимуществу, остановился на *Helicoprion* и родственныхъ ему формахъ *Edestus* и другихъ и опубликовалъ перечень литературныхъ данныхъ объ этихъ своеобразныхъ ископаемыхъ[1]. Съ тѣхъ поръ интересъ къ нимъ не уменьшился, и литература продолжаетъ довольно быстро пополняться новыми и новыми данными.

Самою обильною областью распространенія и разнообразія едестидъ являются Соединенные Штаты С. Америки, а затѣмъ Европейская Россія, гдѣ найдено не менѣе 4-хъ видовъ *Edestus;* остатки же *Helicoprion*, извѣстные теперь почти изъ всѣхъ частей свѣта, кромѣ Африки и Южнаго полярнаго материка, наиболѣе часты въ Россіи, особенно на Уралѣ и притомъ главнымъ образомъ въ одномъ мѣстѣ, около Красноуфимска. Они до сихъ поръ принадлежали здѣсь къ одному виду, *H. Bessonovi* (другой видъ, пока не описанный, найденъ А. П. Ивановымъ въ Московской губ.).

Недавно М. О. Клеръ прислалъ мнѣ только что доставленные изъ Красноуфимска[2] инженеромъ Д. Д. Корнисъ въ Уральское Общество Лю-

[1] Amer. Naturalist. XXXIX, p. 405.

[2] Изъ артинскихъ отложеній Дивьей горы.

бителей Естествознанія 5 обломковъ новаго вида *Helicoprion*, отличающагося многими существенными признаками. Три изъ этихъ обломковъ были мною склеены, по найденнымъ поверхностямъ соприкосновенія, какъ это показано

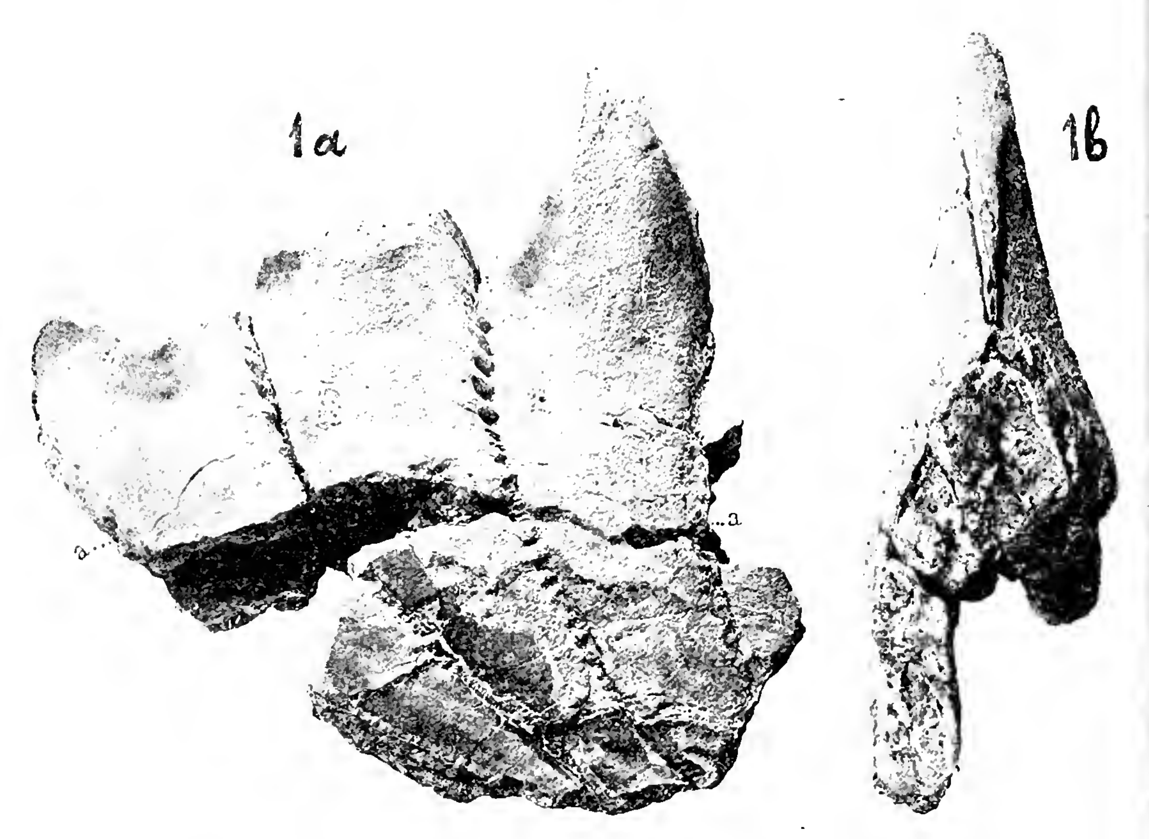


Рис. 1. *Helicoprion Clerci*, n. sp. Натур. вел. Экземпляръ составленъ изъ трехъ обломковъ. 1 *a* — боковой видъ; 1 *b* — поперечный видъ. Эмаль сохранилась мѣстами. У новѣйшихъ, обломанныхъ сверху зубовъ, ниже ихъ основанія, гдѣ толщина сегментовъ быстро увеличивается, находятся дугообразныя складки, явственно замѣтныя на рис. 1 *a*. На вершинѣ продольной выемки въ основаніи сегментовъ сохранились остатки вмѣщавшей породы (зеленоватаго мергеля), оставленные тамъ какъ свидѣтельство, что выемка не образовалась вслѣдствіе разлома ископаемаго при добычѣ породы. На боковомъ изображеніи мѣста вершины выемки отмѣчены буквами a, a.

на рис. 1 *a*. Остальные два обломка, рис. 2 *a* и *b* и рис. 3, безъ сомнѣнія принадлежатъ этому же экземпляру, разбитому при добычѣ породы, когда, вѣроятно, значительная его часть была утеряна или не собрана.

Прежде всего бросается въ глаза, кромѣ наибольшихъ размѣровъ, какіе до сихъ поръ, были наблюдаемы у сегментовъ *Helicoprion*, массивность этихъ сегментовъ у новаго ископаемаго, форма его зубовъ, а также и зазубренность по краямъ эмалевыхъ полосъ ниже основанія обособленныхъ зубовъ, отсутствующая у всѣхъ ранѣе извѣстныхъ видовъ *Helicoprion* и

вообще едестидъ; наконецъ не наблюдалось и такой глубокой выемки въ основаніи оборота спирали.

Массивность зубовъ и сегментовъ выражается отношеніями ихъ размѣровъ. Найденный отдѣльно меньшій зубъ (рис. 2), высотою въ 24 мм.,

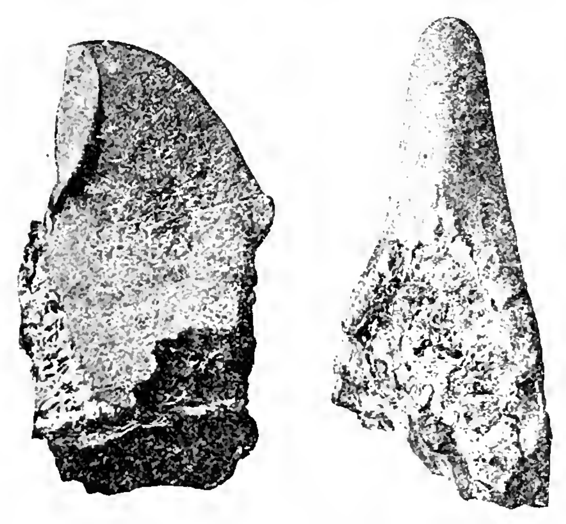


Рис. 2. *Helicoprion Clerci*, n. sp. Натур. вел. Вершина выемки заполнена мергелемъ.



Рис. 3. Обломокъ лѣвой нижней части 4-хъ сегментовъ *Helicoprion Clerci*. Натур. вел. Поверхность образца при добычѣ отчасти стерта. Эмаль сохранилась лишь мѣстами.

имѣетъ ширину въ 29 мм., при толщинѣ у основанія зуба въ 15 мм., увеличивающейся ниже, на сегментѣ, на двойномъ разстояніи отъ вершины зуба, почти вдвое. Сравнивая этотъ меньшій зубъ съ наибольшимъ, непосредственно измѣреннымъ зубомъ *Helicoprion Bezsonovi*, мы видимъ, что послѣдній только на 4 мм. ниже перваго, ширина котораго почти въ 2 раза, а толщина почти въ 3 раза достигаетъ большей величины, чѣмъ у *H. Bezsonovi*. Кромѣ того, вершина зубовъ послѣдняго вида и всѣхъ извѣстныхъ до настоящаго времени видовъ *Helicoprion* и вообще едестидъ является заостренной; зубы же новой формы заканчиваются тупой вершиной, діаметръ полукруглаго поперечнаго разрѣза которой достигаетъ у меньшаго зуба $7\frac{1}{2}$ мм. У большаго зуба этой формы (длина — 34 мм., шир. — 30 мм., толщ. — 19 мм.) вершина имѣетъ такую же форму, но она болѣе узка (соотвѣтствующій діаметръ = 6 мм.). Передній край (ребро) зуба[1] образуетъ пологую дугу, постепенно склоняющуюся назадъ къ вершинѣ, около которой дуга круто закругляется къ заднему ребру. Переднее ребро не является рѣжущимъ, какъ у всѣхъ другихъ *Helicoprion*, но закругленнымъ, тупымъ, суживающимся къ основанію, гдѣ эмаль и образовала небольшую

[1] Передній край зубовъ *Helicoprion* находится на той сторонѣ, куда направлены основанія сегментовъ (эмалевыхъ полосъ), что слѣдуетъ считать окончательно установленнымъ.

рѣжущую нижнюю часть ребра. Задній же край отъ округленнотупой вершины является рѣжущимъ, долотообразно заостреннымъ, и, насколько удалось мѣстами отпрепарировать тонкій рѣжущій край эмали, лишеннымъ всякой зазубренности, такъ свойственной почти всѣмъ едестидамъ.

Средняя выступающая наружу часть сегментовъ, покрытая эмалью, сливается съ дугообразнымъ продолженіемъ внизъ и впередъ съуживающейся эмалевой полосы.

Какъ показываютъ рисунки 1 *a* и 3, края эмалевыхъ полосъ, въ противность простымъ рѣжущимъ краямъ самого зуба и краямъ эмалевыхъ полосъ всѣхъ другихъ видовъ *Helicoprion*, снабжены относительно большими, книзу косвенно направленными зубцами съ передней стороны [1] и приблизительно вдвое меньшими со стороны задней, гдѣ они скорѣе имѣютъ видъ появляющихся у края и загибающихся за него поперечныхъ округленныхъ ребрышекъ, какъ это видно на обломкѣ рис. 3 п, въ увеличенномъ видѣ, на рис. 4. Передними зубцами новый сегментъ какъ бы захватываетъ сегментъ предыдущій, совершенно или почти не оставляя промежутковъ между ними. Самое окончаніе эмалевыхъ полосъ у основанія ископаемаго, судя по одному сохранившемуся концу, имѣетъ болѣе сложный контуръ (показанный въ увеличенномъ видѣ на рис. 4), чѣмъ простое постепенное съуживаніе или заостреніе, наблюдаемое у другихъ видовъ.



Рис. 4. Сохранившійся нижній конецъ наружной части сегмента. Нижній сегментъ на рис. 3; увелич. $3^1/_2$ раза.

Наконецъ весьма отличительнымъ признакомъ новаго вида является глубокая выемка въ основаніи, проникающая, вѣроятно, не менѣе какъ до половины высоты сегментовъ. На горизонтѣ вершинной части этой выемки и находится наибольшая толщина сегмента.

Гистологическое строеніе ископаемаго, хорошо различимое на поверхности его изломовъ, вполнѣ аналогично съ изслѣдованнымъ у *Helicoprion Bezsonovi.* На поперечномъ разломѣ сегментовъ видно, что продольнаго канала, идущаго вдоль всей спирали, у новаго вида нѣтъ; нѣтъ и менѣе

[1] Иногда нѣсколько изогнутыми и снабженными продольнымъ ребрышкомъ.

правильнаго нижняго канала. Все пространство, соотвѣтствующее положенію ихъ въ сегментахъ *H. Bezsonovi*, занято выемкой, какъ будто губчатый вазодентинъ внутренней части спирали, особенно отчетливо ограниченный и различающійся на нѣкоторыхъ поперечныхъ ея разрѣзахъ (напр. на изображенномъ на фиг. 1, табл. III, Зап. И. Ак. Наукъ, т. VIII, № 7, 1899), вмѣстѣ съ примыкающей частью, вмѣщающей продольный каналъ, замѣщенъ у новаго вида мягкими частями, съ тѣмъ лишь отличіемъ что толщина сегментовъ, ниже указаннаго горизонта, не увеличивается. Губчатый же вазодентинъ, находящійся выше, наблюдается и въ сегментахъ новаго вида.

Вмѣстѣ съ изслѣдованными обломками была найдена часть весьма своеобразнаго ихтіодорулита, судя по характеру сохраненія и по сопровождающей породѣ, принадлежащаго къ этому же ископаемому. Ихтіодорулитъ не имѣетъ никакого сходства съ зубнымъ спиральнымъ аппаратомъ *Helicoprion*, который нѣкоторыми, повидимому, продолжаетъ считаться за иный.

Итакъ, новый видъ *Helicoprion* отличается отъ всѣхъ другихъ формъ этого рода[1]. Сопоставленія, сдѣланныя въ одинаковомъ масштабѣ на рис. 5, въ достаточной мѣрѣ это подтверждаютъ. Часть отличительныхъ признаковъ настолько существенна, что нѣкоторые палеонтологи нашли бы ихъ достаточными для установленія новаго рода, отчего я пока воздерживаюсь, до полученія новыхъ матеріаловъ, отчасти повидимому уже имѣющихся, и тѣхъ, которые въ ближайшее время могутъ быть найдены.

Я посвящаю новый видъ *Helicoprion Clerci* имени Онисима Егоровича Клера (O. Clerc), учредителя, секретаря, почетнаго секретаря и наконецъ Президента Уральскаго Общества Любителей Естествознанія, такъ много и неустанно содѣйствовавшаго научнымъ задачамъ Общества и благоустройству его Музея.

Въ заключеніе — одно замѣчаніе. Сегменты другихъ видовъ *Helicoprion* прикрѣплялись къ животному, не только частью основанія, непокрытаго эмалью, но и по поднимающимся до половины сегмента и болѣе раздѣляющимъ ихъ промежуткамъ. Въ новомъ видѣ этихъ промежутковъ, можно сказать, не существуетъ. Поэтому надо думать, что помимо непокрытой эмалью части основанія сегментовъ, размѣры которой остаются пока неизвѣстными, сегменты поддерживались тѣми мягкими частями (мускулами, тяжами, сосудами), которыя внѣдрялись въ глубокую выемку въ основаніи спирали[2].

---

[1] Сегменты внутреннихъ оборотовъ новаго вида вѣроятно были болѣе сходны съ сегментами другихъ формъ *Helicoprion*.

[2] На изслѣдованномъ экземплярѣ повидимому замѣчаются слѣды соединенія сегментовъ, какъ это гораздо чаще и яввѣе наблюдается у видовъ *Edestus*, обособленные сегменты которыхъ встрѣчаются иногда и отдѣльно. Востановленіе ихъ у новаго вида *Helicoprion*, если я правильно представляю себѣ ихъ форму, можетъ подать лишній поводъ къ выдѣленію его въ особый родъ.

Интересно остановиться на разнообразіи едестидъ, на рѣдкомъ нахожденіи ихъ остатковъ при широкомъ географическомъ распространеніи, обнимающемъ очень короткое, въ геологическомъ смыслѣ, время. Все разнообразіе типическихъ видовъ рода *Edestus* ограничивается верхнеі каменно-

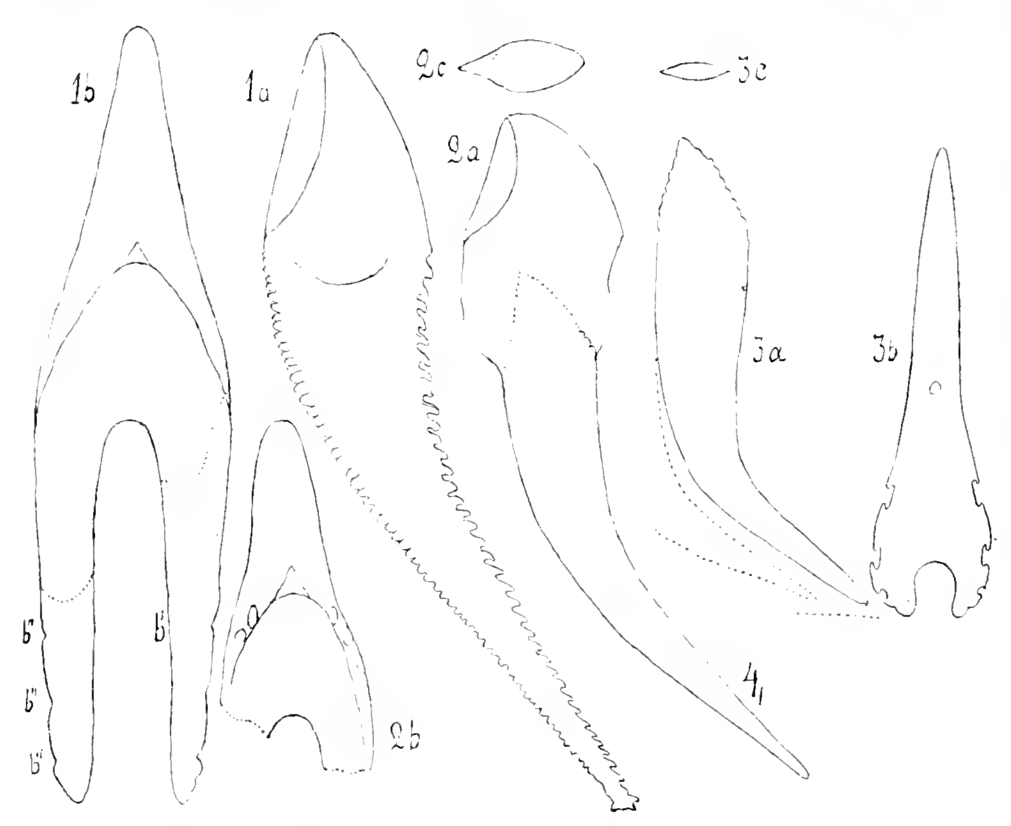


Рис. 5. Сравненіе *Helicoprion Clerci* съ нѣкоторыми другими видами. $^3/_4$ натур. вел.

Фиг. 1 и **2.** *Helicoprion Clerci*, n. sp. **1 a** — видъ сбоку реставрированной наружной части сегмента. **Фиг. 1 b** — реставрированный поперечный разрѣзъ ископаемаго черезъ середину зуба. Часть *b'* реставрирована по обломку рис. 3. Обломокъ этотъ оріентированъ по общему направленію волоконъ вазодентина и гаверзоныхъ каналовъ (соотвѣтствующему въ основной части *Helicoprion* спиральному очертанію оборотонъ) и по ширинѣ эмалевыхъ полосъ на обломкѣ. — Пересѣченія разрѣзомъ наружныхъ границъ сегментовъ означены черезъ *b''*.

Фиг. 2 a. — боковой видъ меньшаго зуба, рис. 2 a. **Фиг. 2 b.** — поперечный видъ (рис. 2 b). **Фуг. 2 c.** — горизонтальный разрѣзъ на половинѣ высоты меньшаго зуба.

Фиг. 3. *Helicoprion Bezsonovi*. **Фиг. 3 a.** — боковой видъ сегмента. **Фиг. 3 b.** — поперечный разрѣзъ оборота. **Фиг. 3 c.** — горизонтальный разрѣзъ зуба на половинѣ его высоты.

Фиг. 4. *Helicoprion annectans* Eastm. Очертаніе наружной боковой части сегмента (по гипсовому слѣпку съ оригинала Eastman'a). Вершина зуба реставрирована.

угольной эпохоі. Одинъ видъ (*Ed. minor*) повидимому можно считать космополитическимъ (Соединенные Штаты и Центральная Россія); кромѣ *Ed. minor*, еще 6 видовъ найдено исключительно въ Соединенныхъ Штатахъ и 3 или 4 — только въ Центральной Россіи; въ Англіи найденъ 1 видъ и, вѣроятно,

1 видъ въ Германіи (см. ИАН., 1911, стр. 1113, 1114). Ископаемыя типа *Helicoprion* встрѣчены какъ въ самыхъ верхнихъ отложеніяхъ каменноугольной системы, такъ и въ нижнемъ горизонтѣ пермской системы, въ пермо-карбонѣ — въ Европейской Россіи, въ Артинскомъ ярусѣ, — 2 вида и въ гжельскихъ слояхъ — 1 видъ[1]. Кромѣ того, весьма вѣроятно, что проблематическое ископаемое найденное Д. И. Мушкетовымъ въ Восточной Ферганѣ и относимое имъ къ *Helicoprion*, дѣйствительно представляетъ обмытый отпечатокъ спирали этого животнаго. Въ Соединенныхъ Штатахъ извѣстно 2 вида[2] и по одному виду найдено въ Японіи, въ Индіи и въ Австраліи.

Никакихъ ближайшихъ предковъ какъ бы сразу появившихся разнообразныхъ едестидъ мы не знаемъ. Неполнота геологической лѣтописи въ настоящемъ случаѣ бросается въ глаза. Dr. A. Smith Woodward сопоставляетъ эти формы съ маленькой селахіей *Protodus*, остатки которой были найдены въ нижнедевонскихъ отложеніяхъ Канады, Англіи, Шотландіи, Шпицбергена и Португаліи[3]. На опубликованномъ этимъ ученымъ рисункѣ черепа *Protodus scoticus* Newton видны очень маленькія дуги изъ ряда зубовъ, расположенныя по краю челюсти. Это ископаемое сближается съ едестидами не только по дугообразному расположенію сросшихся зубовъ, но, повидимому, и по кожнымъ покровамъ изъ полигональныхъ зернышекъ[4].

Если развитіе едестидъ дѣйствительно шло отъ *Protodus* или сходныхъ формъ, то въ зубной системѣ *Edestus* и *Helicoprion*, можно думать, произошло уничтоженіе гомологовъ и замѣщеніе ихъ однимъ рядомъ зубовъ, превращеннымъ въ большой органъ нападенія и защиты, какъ это непосредственно подтверждается экземпляромъ *Edestus mirus* Hay съ одною зубною дугою въ верхней и нижней челюстяхъ[5].

Неоднократно обращалось вниманіе на явленіе, принимаемое нѣкоторыми учеными за законъ, что при филогенетическомъ развитіи рядовъ

---

[1] По указанію, только что сдѣланному профессоромъ П. А. Православлевымъ въ засѣданіи Минерал. Общ. 26 апр., *Helicoprion* найденъ въ Донецкомъ бассейнѣ.

[2] Кромѣ родственной формы *Edestus* (*Campyloprion* Eastman, *Toxoprion* Hay) *Lecontei* Dean.

[3] Quart. Journ. Geol. Soc. № 281, 1915, p. LXXI.

[4] Зап. Уральск. Общ. Люб. Ест. XXXV, 1915, 138, рис. 14 и 15.

[5] O. P. Hay. Proceed. U. St. Nation. Museum, v. 42, 1912, p. 31, pl. 1 a, 2.

Быть можетъ, нѣкоторымъ покажется страннымъ, что передній край зубовъ у *Helicoprion Clerci* является тупымъ и массивнымъ, а задній заостреннымъ и рѣжущимъ. Но при томъ представленіи о спиральномъ аппаратѣ, которое было сдѣлано какъ объ органѣ нападенія или защиты, при загибѣ ряда зубовъ по краю челюсти, заднее рѣжущее ихъ лезвее было обращено къ полости рта и при хватаніи являлось активной стороной. При дальнѣйшемъ же ростѣ спирали, задній рѣжущій край зубовъ становился на всей части аппарата, могущей быть активной, направленнымъ впередъ.

формъ, послѣднія, достигая большой специализаціи и значительнаго роста, угасаютъ. Оба эти условія, какъ нельзя болѣе, подходятъ къ едестидамъ. Трудно представить себѣ размѣры животнаго, въ зубной аппаратъ котораго входила такая дуга, какъ, напримѣръ, у *Edestus giganteus* Newberry или *Ed. vorax* Leidy, или у *Helicoprion Clerci*, дѣйствительная высота найденной части оборота спирали котораго вѣроятно лишь немного уступаетъ высотѣ дуги *Ed. giganteus* и превосходитъ высоту *Ed. vorax*. Специализація же органовъ какъ у *Edestus*, такъ и особенно у *Helicoprion*, можно сказать. достигаетъ крайняго предѣла.

Мечущіяся почти по всему тогдашнему водному пространству, эти своеобразныя эласмобранхіи повидимому широко пользовались уже существовавшимъ въ то время огромнымъ широтнымъ средиземноморскимъ бассейномъ (Тетисомъ) и его сѣверною вѣтвью, какою являлось въ верхнекаменноугольную и нижнепермскую эпохи восточная часть Европейской Россіи. Вѣтвь эта въ теченіе пермскаго періода заглохла на геологически продолжительное время. Условія, сопровождавшія такое затуханіе, не могли не повліять на уничтоженіе едестидъ въ предѣлахъ теперешней Россіи. Но такая же участь постигла ихъ повидимому всюду. Приспособленіе къ условіямъ существованія вызвали быстрое распаденіе ихъ на многія вѣтви и виды и на ихъ широкое, при вѣроятной малочисленности особей, географическое распространеніе, которое при указанной крайней специализаціи не спасло ихъ отъ окончательнаго вымиранія [1].

---

[1] Изъ всѣхъ нынѣ живущихъ селахій наиболѣе аналогичной по условіямъ существованія является, какъ мнѣ кажется, *Chlamydoselachus anguineus* Garm., самая архаическая форма акулъ съ конечнымъ ртомъ, какъ у палеозойскихъ *Cladodus* (*Cladoselachus*). Не часто находимая у береговъ Японіи и чрезвычайно рѣдкими единичными экземплярами въ немногихъ пунктахъ, но почти на всемъ океаническомъ пространствѣ (отъ ЮЗ. Австраліи до 70° с. ш. въ С. Полярномъ Океанѣ — въ Варангерскомъ зал.) *Chlamydoselachus* также обладаетъ специализаціей, но благопріятной для его выживанія. Акула эта живородящая, эмбріоны ея снабжены зубами (Röse, Morpholog. Arbeit. Jena, IV, 1894, p. 199), дѣлающими ихъ при началѣ ихъ отдѣльнаго существованія не беззащитными, а змѣеобразная форма животнаго способствуетъ быстротѣ и увертливости его движеній. *Chlamydoselachus anguineus* является, насколько извѣстно, единственно уцѣлѣвшимъ представителемъ и рода, и семейства.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О коэффиціентѣ дисперсіи.

А. Маркова.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 27 апрѣля 1916 г.).

Не останавливаясь на вопросѣ о значеніи коэффиціента дисперсіи для статистики, я имѣю въ виду въ настоящей замѣткѣ, во-первыхъ, доказать предложеніе профессора А. А. Чупрова, что математическое ожиданіе коэффиціента дисперсіи въ случаѣ независимыхъ испытаній съ постоянной вѣроятностью точно равно единицѣ, если не извлекать корня квадратнаго, а придерживаться опредѣленія, принятаго въ моей книгѣ «Исчисленіе вѣроятностей» 1913 г., и, во-вторыхъ, установить для случая одинаковыхъ серій довольно простое приближенное выраженіе математическаго ожиданія квадрата отклоненія этого коэффиціента отъ единицы, нѣсколько превосходящее точную величину послѣдняго математическаго ожиданія, какъ обнаруживаетъ мой выводъ.

Предложеніе о математическомъ ожиданіи коэффиціента дисперсіи я связываю съ именемъ проф. А. А. Чупрова по той причинѣ, что, насколько мнѣ извѣстно, А. А. Чупровъ первый сталъ разсматривать не въ отдѣльности числитель и знаменатель этого дробнаго выраженія, но самую дробь и пришелъ къ вышеуказанному заключенію, по крайней мѣрѣ, въ случаѣ одинаковыхъ серій.

Что касается второго вопроса, то нѣкоторое рѣшеніе его давно найдено профессоромъ Л. Борткевичемъ, но оно соединено съ такими допущеніями, какихъ мы не можемъ принять, заботясь о точности и ясности опредѣленій и о полной строгости выводовъ.

§ 1. Возьмемъ общій случай нѣсколькихъ серій независимыхъ испытаній съ постоянной вѣроятностью. Число серій обозначимъ буквою σ и,

отличая ихъ нумерами 1, 2, . . ., σ, обозначимъ символомъ s_i число наблюденій (испытаній) серіи съ нумеромъ i и символомъ x_i соотвѣтствующее число появленій отмѣченнаго событія E, наконецъ буквами n и m обозначимъ, соотвѣтственно, суммы

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_\sigma \quad \text{и} \quad x_1 + x_2 + \ldots + x_\sigma,$$

буквою p постоянную вѣроятность событія E и буквою Q коэффиціентъ дисперсіи для разсматриваемой совокупности серій, который опредѣляется формулой

$$Q = \frac{n(n-1)\sum^{i} s_i\left(\frac{x_i}{s_i} - \frac{m}{n}\right)^2}{(\sigma-1)\,m\,(n-m)} = \frac{(n-1)\left\{\sum^{i}\frac{nx_i^2}{s_i} - m^2\right\}}{(\sigma-1)\,m\,(n-m)};$$

а квадратъ его формулой

$$Q^2 = \frac{(n-1)^2}{(\sigma-1)^2}\cdot\frac{\sum^{i}\frac{n^2x_i^4}{s_i^2} + 2\sum^{i,j}\frac{n^2x_i^2x_j^2}{s_is_j} - 2m^2\sum^{i}\frac{nx_i^2}{s_i} + m^4}{m^2(n-m)^2}.$$

Эти выраженія Q и Q^2 теряютъ смыслъ при $m = 0$ и при $m = n$, когда ихъ числители и знаменатели обращаются въ нуль; въ указанныхъ исключительныхъ случаяхъ мы будемъ считать $Q = Q^2 = 1$.

Для вычисленія математическихъ ожиданій Q и Q^2 мы должны помножить приведенныя ихъ выраженія на вѣроятность

$$P$$

совокупности чиселъ

$$x_1, x_2, \ldots, x_\sigma$$

равную произведенію

$$\frac{s_1!}{x_1!\,s_1 - x_1!}\cdot\frac{s_2!}{x_2!\,s_2 - x_2!}\cdots\frac{s_\sigma!}{x_\sigma!\,s_\sigma - x_\sigma!}\,p^m q^{n-m},$$

гдѣ $q = 1 - p$, и составить суммы

$$\sum PQ \quad \text{и} \quad \sum PQ^2$$

для всѣхъ возможныхъ совокупностей

$$x_1, x_2, \ldots, x_\sigma.$$

Это суммированіе, которое не слѣдуетъ смѣшивать съ $\sum^{i}$ и $\sum^{i,j}$, мы разобьемъ на двѣ операціи: въ первомъ суммированіи мы будемъ предполагать сумму

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_\sigma,$$

обозначенную буквою m, неизмѣнною, а во второмъ намъ придется измѣнять одно число m. Такую послѣдовательность операцій можно, при помощи двухъ знаковъ Σ, изобразить такъ

$$\sum^{m=0,1,2,\ldots,n} \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} PQ \quad \text{и} \quad \sum^{m=0,1,2,\ldots,n} \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} PQ^2.$$

При первомъ суммированіи знаменатели $m(n-m)$ и $m^2(n-m)^2$ выраженій Q и Q^2 сохраняютъ постоянныя значенія и потому задача о разысканіи суммъ

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} PQ \quad \text{и} \quad \sum^{x_1+x_2+\cdots x_\sigma=m} PQ^2$$

сводится къ разысканію суммъ

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P, \quad \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^2, \quad \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^4, \quad \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^2\, x_j^2,$$

гдѣ i и j означаютъ какіе-нибудь два значка нашей системы $1, 2, 3, \ldots, \sigma$, остающіеся при суммированіи неизмѣнными.

Для разысканія всѣхъ этихъ суммъ вводимъ $\sigma + 1$ произвольныхъ величинъ

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\sigma, t$$

и составляемъ ихъ функцію

$$W = (pte^{\xi_1} + q)^{s_1} \ldots (pte^{\xi_i} + q)^{s_i} \ldots (pte^{\xi_\sigma} + q)^{s_\sigma},$$

которая разлагается на слагаемыя

$$Pt^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma} e^{x_1\xi_1+x_2\xi_2+\cdots+x_\sigma\xi_\sigma}.$$

Чтобы найти при помощи W сумму

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P,$$

стоитъ только приравнять всѣ ξ_i нулю и затѣмъ, разложивъ полученное такимъ образомъ выраженіе

$$W_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0}=(pt+q)^n$$

по степенямъ t, взять коэффиціентъ при t^m:

$$\frac{1.2.3..\,n}{1.2..m.1.2..(n-m)}\,p^m q^{n-m},$$

который и будетъ равенъ искомой суммѣ $\sum\limits^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P$.

Подобнымъ же образомъ коэффиціенты при t^m въ выраженіяхъ

$$\left(\frac{d^2 W}{d\xi_i^2}\right)_{\xi_1=\xi_2=\cdots\xi_\sigma=0},\quad \left(\frac{d^4 W}{d\xi_i^4}\right)_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0}$$

и

$$\left(\frac{d^4 W}{d\xi_i^2\,d\xi_j^2}\right)_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0}$$

будутъ, соотвѣтственно, равны суммамъ

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^2,\quad \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^4,\quad \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} Px_i^2x_j^2.$$

Послѣднія суммы намъ надо разсматривать только при $0 < m < n$, такъ какъ согласно установленному опредѣленію

$$\sum^{m=0} PQ=\sum^{m=0} PQ^2=q^n \quad \text{и} \quad \sum^{m=n} PQ=\sum^{m=n} PQ^2=p^n.$$

Останавливаясь сначала, для вычисленія математическаго ожиданія Q, на первой изъ только что указанныхъ суммъ, находимъ

$$\left\{\frac{d^2 W}{d\xi_i^2}\right\}_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0}=s_i\,pt\,(pt+q)^{n-1}+s_i(s_i-1)\,p^2t^2(pt+q)^{n-2}$$

и отсюда выводимъ

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P\,\frac{nx_i^2}{s_i}=\left\{\frac{n-1!}{m-1!\;n-m!}+(s_i-1)\,\frac{n-2!}{m-2!\;n-m!}\right\}np^m q^{n-m}.$$

Слѣдовательно

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P\left\{\frac{nx_1^2}{s_1}+\frac{nx_2^2}{s_2}+\cdots+\frac{nx_\sigma^2}{s_\sigma}-m^2\right\}=$$

$$=\frac{1.2.3\ldots(n-2).n}{1.2\ldots(m-1)\,1.2\ldots(n-m)}\{\sigma(n-1)+(n-\sigma)(m-1)-m(n-1)\}\,p^m q^{n-m}$$

$$=\frac{(\sigma-1).1.2.3..(n-2)\,n}{1.2\ldots(m-1).1.2\ldots(n-m-1)}\,p^m q^{n-m}$$

и потому

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} PQ=\frac{1.2.3\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)}\,p^m q^{n-m}.$$

Эга формула выведена нами при $0<m<n$, а раньше она была установлена при $m=0$ и при $m=n$. Произведя второе суммированіе, получаемъ предложеніе профессора А. А. Чупрова

$$\sum^{m=0,1,2\ldots,n}\ \sum^{x_1+x_1+\cdots+x_\sigma=m} PQ=(p+q)^n=1.$$

Переходя къ математическому ожиданію $(Q-1)^2$, которое въ силу доказанчаго равно разности

$$\text{мат. ожид. } Q^2-\sum^{m=0,1,2,\ldots,n}\frac{n!}{m!\,n-m!}\,p^m q^{n-m},$$

мы ограничимся случаемъ, когда всѣ числа $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ имѣютъ одно и тоже значеніе s.

Въ этомъ частномъ случаѣ Q приводится къ единицѣ при $m-1$ и при $m=n-1$, какъ показываетъ прямое вычисленіе; такъ что въ выраженіи

$$\text{мат. ожид. } Q^2-(p+q)^n$$

пропадаютъ не только старшія степени p и q, но и произведенія $p^{n-1}q$ и pq^{n-1}. И на основаніи формулъ

$$\frac{1}{s}\left\{\frac{d^4W}{d\xi_i^4}\right\}_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0}=pt(pt+q)^{n-1}+7(s-1)p^2t^2(pt+q)^{n-2}$$

$$+6(s-1)(s-2)\,p^3t^3(pt+q)^{n-3}+$$

$$+(s-1)(s-2)(s-3)\,p^4t^4(pt+q)^{n-4}$$

и

$$\frac{1}{s^2}\left(\frac{d^4 W}{d\xi_i^2\, d\xi_j^2}\right)_{\xi_1=\xi_2=\cdots=\xi_\sigma=0} = p^2 t^2 (pt+q)^{n-2} + 2p^3 t^3 (s-1)(pt+q)^{n-3}$$
$$+ (s-1)^2 p^4 t^4 (pt+q)^{n-4}$$

безъ большого труда находимъ

$$\sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P(Q^2-1) = \frac{1.2.3\ldots(n-4)(n-1)\, n\, p^m q^{n-m}}{(\sigma-1)^2\, 1.2.3\ldots(m-1)\, m^2 .1.2\ldots(n-m)\,(n-m)^2} R^{(m)},$$

гдѣ

$$R^{(m)} = \sigma^2 (n-3)(n-2)(n-1)^2 + 7\sigma^2 (s-1)(n-3)(n-2)(n-1)(m-1$$
$$+ 6\sigma^2 (s-1)(s-2)(n-3)(n-1)(m-1)(m-2) +$$
$$+ \sigma^2 (s-1)(s-2)(s-3)(n-1)(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$+ n\sigma(\sigma-1)(n-3)(n-2)(n-1)(m-1) +$$
$$+ 2n\sigma(\sigma-1)(s-1)(n-3)(n-1)(m-1)(m-2)$$
$$+ n\sigma(\sigma-1)(s-1)^2 (n-1)(m-1)(m-2)(m-3)$$
$$- 2m\sigma^2 (n-3)(n-2)(n-1)^2$$
$$- 2m^2 (n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1)(m-1)$$
$$+ m^3 (n-3)(n-2)(n-1)^2 - (\sigma-1)^2 m (n-m)^2 (n-3)(n-2).$$

Для облегченія изслѣдованія довольно сложнаго выраженія $R^{(m)}$ можно воспользоваться тѣмъ обстоятельствомъ, что Q не измѣняетъ своей величины при замѣнѣ всѣхъ чиселъ x_i разностями $s - x_i$, что ведетъ къ замѣнѣ числа m разностью $n - m$. Въ силу этого обстоятельства имѣетъ

$$p^{n-m} q^m \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=m} P(Q^2-1) = p^m q^{n-m} \sum^{x_1+x_2+\cdots+x_\sigma=n-m} P(Q^2-1)$$

и потому

$$m R^{(m)} = (n-m) R^{(n-m)}.$$

Отсюда прежде всего слѣдуетъ, что $R^{(m)}$ содержитъ множитель $n-m$. Установивъ затѣмъ прямою выкладкою равенство

$$R^{(1)} = 0,$$

мы раскрываемъ присутствіе въ выраженіи $R^{(m)}$, которое представляетъ цѣлую функцію третьей степени относительно m, не только множителя $m-1$, но и множителя $n-m-1$. Слѣдовательно $R^{(m)}$ дѣлится на произведеніе

$$(n-m)(n-m-1)(m-1)$$

и для полнаго его опредѣленія остается разсмотрѣть только коэффиціентъ при m^3 равный выраженію

$$\begin{aligned}A = \sigma^2(s-1)(s-2)(s-3)(n-1) + n\sigma(\sigma-1)(s-1)^2(n-1) + \\ + (n-3)(n-2)(n-1)^2 - (\sigma-1)^2(n-3)(n-2) \\ - 2(n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1),\end{aligned}$$

гдѣ $n = s\sigma$. Соединяя послѣдніе три члена выраженія A, находимъ

$$\begin{aligned}&(n-3)(n-2)(n-1)^2 - 2(n-\sigma)(n-3)(n-2)(n-1) - (\sigma-1)^2(n-3)(n-2) \\ &= -(n-3)(n-2)(n-\sigma)^2 = -\sigma^2(s-1)^2(n-3)(n-2),\end{aligned}$$

что даетъ намъ возможность выдѣлить изъ A множитель $\sigma^2(s-1)$. Дальнѣйшее вычисленіе ведемъ такъ:

$$\begin{aligned}A &= \sigma^2(s-1)\left\{(s-2)(s-3)(n-1) + (n-s)(s-1)(n-1) - (s-1)(n-2)(n-3)\right\} \\ &= \sigma^2(s-1)\left\{(s-2)(s-3)(n-1) - (s-2)(s-1)(n-1)\right. \\ &\qquad \left. + (n-2)(s-1)(n-1) - (s-1)(n-2)(n-3)\right\} \\ &= 2\sigma^2(s-1)\left\{-(n-1)(s-2) + (n-2)(s-1)\right\} = 2\sigma^2(s-1)(n-s) \\ &= 2\sigma^2 s(s-1)(\sigma-1).\end{aligned}$$

Итакъ

$$\sum^{x_1+x_2\cdots+x_\sigma=m} P(Q^2-1) = \frac{2\sigma^2 s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)} \cdot \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)} p^m q^{n-m}$$

и

$$\text{мат. ож.}(Q-1)^2 = \frac{2\sigma^2 s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)} \sum^{m=1,2,\ldots,n-1} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)} p^m q^{n-m}$$

откуда немедленно вытекаетъ неравенство

$$\text{мат. ожид. } (Q-1)^2 < \frac{2\sigma^2 s(s-1)}{(\sigma s-2)(\sigma s-3)(\sigma-1)},$$

ибо произведенiе

$$\frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m}$$

постоянно остается меньше единицы.

Если же $\sigma \geqq 5$, то изъ найденнаго нами неравенства нетрудно вывести очень простое

$$\text{мат. ожид. } (Q-1)^2 < \frac{2}{\sigma-1}.$$

Указанный нами высшiй предѣлъ математическаго ожиданiя $(Q-1)^2$ представляетъ также приближенную его величину, при большихъ значенiяхъ n; ибо въ суммѣ

$$\sum^{n=1, 2, \ldots, n-1} \frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m} \cdot \frac{1.2\ldots n}{1.2\ldots m.1.2\ldots(n-m)} p^m q^{n-m}$$

главное значенiе имѣютъ тѣ члены, для которыхъ m близко къ np, а разность $n-m$ близка къ nq, а для такихъ членовъ произведенiе

$$\frac{m-1}{m} \cdot \frac{n-m-1}{n-m}$$

мало отличается отъ единицы, если $n = s\sigma$ число большое.

Пользуюсь случаемъ, чтобы сказать нѣсколько словъ о модной теорiи *корреляцiи*. Къ этому побуждаетъ меня статья Е. Тихомирова «Методъ корреляцiи и его примѣненiя въ метеорологiи», помѣщенная въ 3-мъ выпускѣ второго тома Геофизическаго Сборника.

Положительная часть теорiи корреляцiй не велика и состоитъ въ простомъ примѣненiи способа наименьшихъ квадратовъ къ разысканiю линейныхъ зависимостей. Но теорiя корреляцiй, не довольствуясь приближеннымъ опредѣленiемъ различныхъ коэффицiентовъ, указываетъ еще ихъ вѣроятныя погрѣшности и здѣсь она вступаетъ въ область фантазiи, гипноза и вѣры въ математическiя формулы, которыя въ дѣйствительности не имѣютъ твердаго научнаго основанiя.

Такова, напримѣръ, формула Пирсона, которая въ статьѣ Е. Тихомирова играетъ важную роль и приведена вслѣдъ за напрасной ссылкой на мою книгу «Исчисленiе вѣроятностей».

Гипноз теоріи корреляціи проявляется въ слѣдующихъ словахъ той же статьи: «При r, равномъ нулю, говорятъ, что между элементами корреляціи не существуетъ, и въ этомъ случаѣ судить по отклоненіямъ одного элемента объ измѣненіяхъ другого совершенно нельзя». Въ дѣйствительности же не трудно составить сколько угодно связей, совершенно не обнаруживаемыхъ коэффиціентомъ корреляціи, въ которыхъ однако измѣненія одного элемента опредѣляютъ измѣненія другого. Нѣкоторое указаніе на подобные случаи находится и въ статьѣ Е. Тихомирова (стр. 34). Оно начинается даже заявленіемъ «Важно отмѣтить...» но, противорѣча выше приведеннымъ словамъ, остается безрезультатнымъ и заканчивается такъ: «Въ такомъ случаѣ говорятъ, что перемѣнныя не находятся въ корреляціи, но въ то же время не являются независимыми другъ относительно друга».

Къ области вѣры надо отнести и такое мнѣніе: «Уравненіе регрессіи означаетъ только, что, зная, чему равняется x_i, можно сказать, что наиболѣе вѣроятнымъ значеніемъ y_i будетъ $r \frac{\sigma_2}{\sigma_1} x_i$» (тамъ же, стр. 26).

Для характеристики утвержденій, основанныхъ на теоріи корреляціи, можетъ служить примѣръ, приведенный въ таблицѣ IV той же статьи (стр. 43). Для 23 паръ величинъ Δx и Δy этой таблицы коэффиціентъ корреляціи оказывается малымъ (0,09), а его вѣроятная ошибка сравнительно большою (0,14). Отсюда сдѣлано заключеніе, что существованіе корреляціи между этими величинами нельзя считать доказаннымъ; такого неопредѣленнаго заключенія, конечно, я не стану опровергать.

Однако, если вмѣсто всѣхъ 23 паръ взять послѣднія десять, то коэффиціентъ корреляціи превыситъ 0,7, а Пирсоновская вѣроятная ошибка упадетъ до 0,1 и будетъ менѣе $\frac{1}{6}$ коэффиціента корреляціи. Тогда придется сдѣлать совершенно иное заключеніе согласно правилу, указанному на стр. 24 той же статьи: «На практикѣ обыкновенно принимаютъ, что о существованіи корреляціи между разсматриваемыми элементами можно утверждать съ полной достовѣрностью, если коэффиціентъ корреляціи превышаетъ вѣроятную ошибку не меньше, чѣмъ въ шесть разъ. Это равносильно условію существованія многихъ тысячъ шансовъ противъ одного въ пользу того, что связь дѣйствительно существуетъ».

Во избѣжаніе недоразумѣній и возможныхъ споровъ о томъ, что десять число малое, а 23 достаточно большое, замѣчу, что даже въ теоріи ошибокъ наблюденій я не придаю большого значенія, такъ называемымъ, вѣроятнымъ погрѣшностямъ и считаю ихъ только средствомъ для условнаго сравненія достоинства различныхъ наблюденій. Что же касается коэффи-

ціента корреляціи, то, пока рѣчь идетъ о данной совокупности чиселъ, онъ имѣетъ вполнѣ опредѣленную величину, которую можно вычислить безъ всякой погрѣшности. Если же эта совокупность разсматривается какъ часть совершенно неизвѣстной совокупности, то коэффиціентъ корреляціи послѣдней нельзя опредѣлить, ни въ случаѣ, когда данная совокупность состоитъ изъ 10 паръ, ни въ случаѣ, когда она состоитъ изъ 23 или гораздо бо́льшаго числа паръ. При желаніи можно, конечно, считать приближенною величиною этого коэффиціента, самое существованіе котораго подлежитъ сомнѣнію, число, найденное для данной совокупности; но вѣроятную погрѣшность такого опредѣленія и связанный съ нею подсчетъ шансовъ нельзя не признать чистою фикціей.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Sur le développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes de Tchébychef-Laguerre.

Par W. Stekloff (V. Steklov).

(Présenté à l'Académie le 30 mars (12 avril) 1916).

1. Dans mon Mémoire «Sur le développement d'une fonction donnée en séries procédant suivant les polynomes de Tchébychef et, en particulier, suivant les polynomes de Jacobi» (Journ. für die reine und angew. Mathem., Bd. 125, Heft 3, 1902) j'ai étudié, pour la première fois, la question, dont il s'agit, au point de vue de la théorie que j'appelle maintenant «théorie de fermeture».

J'avais considéré alors en détail ce problème pour les polynomes $\varphi_k(x)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), définis par les conditions

$$(1) \qquad \begin{gathered} \int_a^b p(x)\, \varphi_k(x)\, P_{k-1}(x)\, dx = 0, \\ \int_a^b p(x)\, \varphi_k^2(x)\, dx = 1, \end{gathered}$$

où $P_{k-1}(x)$ est un polynome arbitraire de degré $\leqq k-1$ et

$$p(x) = C(x-a)^{\alpha-1}(b-x)^{\beta-1}, \qquad (\alpha > 0,\ \beta > 0)$$

c'est à dire, pour les polynomes de Jacobi, ou, selon la terminologie de notre confrère défunt M. N. Sonin, pour les *fonctions spéciales de Tchébychef de la troisième classe.*

J'ai remarqué cependant, dans le Mémoire cité, que «la même méthode s'applique sans peine à deux premières classes de fonctions spéciales de Tchébychef» (ibid., p. 209), c'est à dire, aux polynomes, définis par les équations (1), où $p(x)$ a l'une de deux formes suivantes[1]

$$(\alpha) \qquad p(x) = Ce^{-\alpha(x+\beta)^2}, \quad \alpha > 0, a = -\infty, b = +\infty,$$

$$(\beta) \qquad p(x) = C(x-a)^{\beta}\, e^{-\alpha(x-a)}, \quad \alpha > 0, \beta > -1, b = +\infty.$$

Un an après, en 1903, j'ai perfectionné essentiellement la méthode et dans une Note, publiée le 25 Mai 1903 dans les Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, je suis arrivé au résultat suivant:

«Toute fonction $f(x)$ admettant une dérivée du premier ordre, bornée et intégrable dans l'intervalle $(-1, +1)$, se développe dans tout intervalle, intérieur à l'intervalle donné, en série uniformément convergente procédant suivant les polynomes de Jacobi. *Une méthode tout à fait analogue conduit au même résultat dans les cas des fonctions spéciales de deux premières classes de Tchébychef*».

L'analyse détaillée, pour le cas des polynomes de Jacobi, a été exposée ensuite au n⁰ 12 de mon Mémoire «Sur certaines égalités génerales communes à plusieurs séries de fonctions etc.», paru en 1904 dans les Mémoires de l'Académie des Sciences de St. Pétersbourg (Cl. Ph. M. VIII s., Vol. XV, n⁰ 7), où j'ai attiré encore une fois l'attention sur ce fait que la même méthode, légèrement modifiée, conduit aux résultats analogues pour les polynomes correspondant aux fonctions caractéristiques (α) et (β).

Quelques ans après (dépuis l'année 1907) la question a été reprise dans une série de travaux, où les auteurs, retrouvant les résultats moins généraux par les méthodes différentes, beaucoup plus artificielles et compliquées, ne font cépendant aucune allusion sur nos recherches qui viennent d'être rappelées.

Tout porte à croire que nos remarques sont resté incomprises, à cause de leur concision peut être, car, en effet, l'extension de la méthode au cas, où les limites de l'intervalle deviennent infinies, exige quelques considérations complémentaires.

Cela m'engage à entrer dans quelques détails, d'autant plus que le problème, dont il s'agit, a une connexion intime avec les recherches de ma Note récente «Théorème de fermeture pour les polynomes de Tchébychef-

---

[1] L. c. p. 208.

Laguerre» (Bulletin, n⁰ 8, le 1 Mai 1916) et que nous pouvons maintenant simplifier les raisonnements et en déduire les résultats plus généraux.

Quant aux polynomes à fonction caractéristique (α), que j'appelle «polynomes de Laplace-Hermite-Tchébychef», j'ai déjà exposé une démonstration détaillée dans mon Mémoire récent «Application de la théorie de fermeture à la solution de certaines questions qui se rattachent au problème des moments» (Mémoires de l'Académie des Sciences, Vol. XXXIII, n⁰ 9, Cl. Ph. M., VIII s., 1915); il ne nous reste qu'à considérer les polynomes correspondant à la fonction caractéristique (β) que nous allons appeler «polynomes de Tchébychef-Laguerre».

2. Faisons, pour plus de simplicité,

$$p(x) = x^{\beta} e^{-x}$$

et désignons par

$$\psi_0(x, \beta), \quad \psi_1(x, \beta), \quad \psi_2(x, \beta) \ldots, \psi_k(x, \beta), \ldots$$

les polynomes définis par les conditions

$$(1) \qquad \begin{gathered} \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} \psi_k(x, \beta) P_{k-1}(x)\, dx = 0, \\ \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} \psi_k^2(x, \beta)\, dx = 1. \end{gathered}$$

Rappelons quelques propriétés de ces polynomes dont nous allons faire usage dans ce qui va suivre.

1°. Ils forment un système orthogonal, c'est à dire

$$(2) \qquad \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} \psi_k(x, \beta)\, \psi_m(x, \beta)\, dx = 0, \quad si\ k \neq m.$$

2°. Ils forment un système fermé, comme je viens d'en montrer dans ma Note précédente (Bulletin, n⁰ 8, le 1 Mai, 1916).

En d'autres termes, si l'on désigne par $f(x)$ une fonction intégrable et telle que l'intégrale

$$\int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} f^2(x)\, dx$$

existe, on aura

$$(3) \qquad S_n(f(x)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k^2 < \varepsilon^2 \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

où

$$A_k = \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} f(x)\, \psi_k(x, \beta)\, dx,$$

ε est un nombre positif donné à l'avance, n_0 est un entier assez grand.

3°. Les polynomes $\psi_k(x, \beta)$ satisfont à l'équation différentielle

$$(4) \qquad x\, \psi_k''(x, \beta) + (\beta + 1 - x)\, \psi_k'(x, \beta) + k\, \psi_k(x, \beta) = 0.$$

4°. Les polynomes

$$\psi_k(x, \beta) \quad \text{et} \quad \psi_k(x, \beta + 1),$$

correspondant respectivement aux paramètres

$$\beta \quad \text{et} \quad \beta + 1,$$

sont liés par la relation

$$(5) \qquad \psi_k'(x, \beta) = \sqrt{k}\, \psi_{k-1}(x, \beta + 1).$$

3. Soit $f(x)$ une fonction susceptible de la forme

$$(6) \qquad f(x) = \int_0^{x} \varphi(x)\, dx + C,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction intégrable, C est une constante.

Posons

$$(7) \qquad f(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, \psi_k(x, \beta) + \rho_n(x).$$

$$(8) \qquad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k\, \psi_k'(x, \beta) + R_n(x).$$

Rappelons la formule d'intégration par parties, généralisée par M. Liapounoff (Lĭapunov)[1].

Si $f(x)$ et $f_1(x)$ sont deux fonctions intégrables dans un intervalle (α, β) et si l'on pose

$$(9) \qquad F(x) = \int_{\alpha}^{x} f(x)\,dx + C, \quad F_1(x) = \int_{\alpha}^{x} f_1(x)\,dx + C_1,$$

C et C_1 étant des constantes, on aura

$$(10) \qquad \int_{\alpha}^{\beta} F(x) f_1(x)\,dx = F(\beta)F_1(\beta) - F(\alpha)F_1(\alpha) - \int_{\alpha}^{\beta} F_1(x) f(x)\,dx.$$

Cette formule subsiste toujours, quels que soient les nombres α et β, et ne cesse pas d'être vraie, lorsque β, par exemple, devient infini, pourvu que les intégrales qui figurent dans les formules (9) et (10) ne perdent pas leur sens.

Appliquons la formule (10) aux fonctions

$$F(x) = f(x) = \int_{0}^{x} \varphi(x)\,dx + C.$$

$$F_1(x) = \int_{0}^{x} \frac{d}{dx}\left(x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta)\right) dx = x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta).$$

en y faisant

$$\alpha = 0, \qquad \beta = +\infty.$$

On trouve, en tenant compte de (4),

$$-kA_k = \int_{0}^{\infty} f(x) \frac{d}{dx}\left(x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta)\right) dx = \lim_{x=\infty} f(x) x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta) -$$

$$- \int_{0}^{\infty} \varphi(x) x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta)\,dx,$$

[1] «Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales». Mémoires de l'Académie des Sciences, Cl. Ph. M., VIII s., Vol. XV. nº 10, 1904.

d'où

$$k A_k = \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} \varphi(x) \psi_k'(x, \beta)\, dx,$$

car, d'après l'hypothèse faite au sujet de la fonction $f(x)$,

$$\lim_{x=\infty} f(x) x^{\beta+1} e^{-x} \psi_k'(x, \beta) = 0.$$

De l'équation précédente on tire, en tenant compte de (5),

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{k}} \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} \varphi(x) \psi_{k-1}(x, \beta+1)\, dx = \frac{1}{\sqrt{k}} B_{k-1}.$$

L'équation (8) peut donc s'écrire

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \psi_k(x, \beta+1) + R_n(x). \tag{11}$$

On en conclut que

$$S_n(\varphi(x)) = \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} R_n^2(x)\, dx < \varepsilon^2 \qquad \text{pour } n \geqq n_0, \tag{12}$$

car la suite de polynomes $\psi_k(x, \beta+1)$ est fermée.

4. Cela posé, intégrons l'équation (8) entre les limites 0 et x. On trouve, en ayant égard à (6) et (7),

$$\rho_n(x) = \int_0^x R_n(x)\, dx + C_n,$$

où

$$C_n = C - f(0) + \rho_n(0)$$

est une constante.

Considérons d'abord le cas où

$$-1 < \beta < 0.$$

Appliquons la formule (10) aux fonctions

$$F(x) = \rho_n(x) = \int_0^x R_n(x)\,dx + C_n,$$

$$F_1(x) = \int_0^x e^{-x}\,dx - 1 = -e^{-x}$$

en y faisant

$$\alpha = \xi, \qquad \beta = x.$$

On obtient

$$(13) \qquad \int_\xi^x \rho_n(x)\, e^{-x}\, dx = e^{-\xi}\rho_n(\xi) - e^{-x}\rho_n(x) + \int_\xi^x e^{-x} R_n(x)\, dx.$$

d'où, en intégrant encore une fois par rapport à x entre les limites 0 et 1, on tire

$$(13_1) \quad e^{-\xi}\rho_n(\xi) = \int_0^1 e^{-x}\rho_n(x)\,dx + \int_0^1 dx \int_\xi^x e^{-x}\rho_n(x)\,dx - \int_0^1 dx \int_\xi^x e^{-x} R_n(x)\,dx.$$

En se rappelant que $\beta < 0$, on aura, pour toute valeur de ξ, *zéro y compris*,

$$\left(\int_\xi^x e^{-x}\rho_n(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_\xi^x \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^{\frac{\beta}{2}}}\, x^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \rho_n(x)\,dx\right)^2 <$$

$$< \int_\xi^x \frac{e^{-x}}{x^\beta}\,dx \cdot \int_\xi^x x^\beta e^{-x} \rho_n^2(x)\,dx < \Gamma(1-\beta)\, S_n(f(x))$$

et de même

$$\left(\int_\xi^x e^{-x} R_n(x)\,dx\right)^2 = \left(\int_\xi^x \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{x^{\frac{\beta+1}{2}}}\, x^{\frac{\beta+1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} R_n(x)\,dx\right)^2 <$$

$$< \int_\xi^x x^{-(\beta+1)} e^{-x}\,dx \cdot \int_\xi^x x^{\beta+1} e^{-x} R_n^2(x)\,dx < \Gamma(-\beta)\, S_n(\varphi(x)).$$

Moyennant ces inégalités ainsi que celles de (3) et (12) on tire de (13_1)

(14) $$|\rho_n(\xi)| < e^{\xi} N\varepsilon \qquad \text{pour } n \geq n_0,$$

où

$$N = 2\sqrt{\Gamma(1-\beta)} + \sqrt{\Gamma(-\beta)}$$

est un nombre fixe ne dépendant ni de ξ, ni de n.

L'inégalité (14), ayant lieu pour toute valeur positive de ξ, zéro y compris, conduit au théorème:

Soit $f(x)$ une fonction susceptible de la forme

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C$$

et telle que les intégrales

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x} f^2(x)\,dx \quad et \quad \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} \varphi^2(x)\,dx,$$

β étant un nombre compris entre -1 et 0, aient un sens déterminé.

Toute fonction $f(x)$ jouissant les propriétés indiquées se développe, en tous les points de tout intervalle $(0, A)$, quel que soit le nombre arbitraire A, en série uniformément convergente de la forme

(15) $$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \psi_k(x,\beta) \int_0^\infty x^\beta e^{-x} f(x) \psi_k(x,\beta)\,dx,$$

où $\psi_k(x, \beta)$ sont les polynomes de Tchébychef-Laguerre correspondant à la fonction caractéristique

$$p(x) = x^\beta e^{-x}, \qquad -1 < \beta < 0.$$

Le développement (15) subsiste même pour $x = 0$.

Le cas particulier, le plus intéressant, correspond à l'hypothèse que la fonction $f(x)$ admette la dérivée $f'(x)$, intégrable et telle que l'intégrale

$$\int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} f'^2(x)\,dx$$

ait un sens déterminé.

5. L'analyse précédente ne s'applique pas immédiatement au cas où

$$\beta \geqq 0.$$

Dans cette dernière hypothèse il est impossible de démontrer la convergence du développement (15) pour $x=0$, sans imposer quelques restrictions complémentaires à la fonction $f(x)$.

Neanmoins, il est aisé de s'assurer que *ce développement a lieu pour toute fonction $f(x)$, satisfaisant aux conditions générales du théorème précédent, en tous les points de l'intervalle*

$$(\alpha,\ A),$$

où α est un nombre positif si petit qu'on le veut, A est un nombre arbitrairement grand.

Appliquons, en effet, la formule (10) aux fonctions

$$F(x) = \rho_n(x) = \int_0^x R_n(x)\,dx + C_n,$$

$$F_1(x) = \int_0^x \frac{d}{dx}\left(x^{\beta+1} e^{-x}\right) dx = x^{\beta+1} e^{-x},$$

en y faisant, comme précédemment,

$$\alpha = \xi, \qquad \beta = x.$$

On trouve

$$\xi^{\beta+1} e^{-\xi} \rho_n(\xi) = x^{\beta+1} e^{-x} \rho_n(x) - \int_\xi^x x^{\beta+1} e^{-x} R_n(x)\,dx -$$

$$- \int_\xi^x x^{\beta}(\beta+1-x) e^{-x} \rho_n(x)\,dx.$$

d'où

$$\xi^{\beta+1} e^{-\xi} \rho_n(\xi) = \int_0^1 x^{\beta+1} e^{-x} \rho_n(x)\,dx - \int_0^1 dx \int_\xi^x x^{\beta+1} e^{-x} R_n(x)\,dx -$$

$$- \int_0^1 dx \int_\xi^x x^{\beta}(\beta+1-x) e^{-x} \rho_n(x)\,dx.$$

Or,

$$\left(\int_0^1 x^{\beta+1} e^{-x} \rho_n(x)\, dx\right)^2 < \Gamma(\beta+3)\, S_n(f(x)),$$

$$\left(\int_\xi^x x^{\beta+1} e^{-x} R_n(x)\, dx\right)^2 < \Gamma(\beta+2)\, S_n(\varphi(x)),$$

$$\left(\int_\xi^x x^{\beta}(\beta+1-x) e^{-x} \rho_n(x)\, dx\right)^2 < \Gamma(\beta+2)\, S_n(f(x)).$$

Par conséquent, en vertu de (3) et (12),

$$\xi^{\beta+1} e^{-\xi} |\rho_n(\xi)| < N\varepsilon \qquad \text{pour } n \overline{>} n_0,$$

où

$$N = \sqrt{\Gamma(\beta+3)} + 2\sqrt{\Gamma(\beta+2)}.$$

Si l'on désigne ensuite par λ le plus grand de deux nombres

$$\frac{e^\alpha}{\alpha^{\beta+1}} \quad \text{et} \quad \frac{e^A}{A^{\beta+1}},$$

on aura

$$|\rho_n(\xi)| < \lambda N\varepsilon = \eta \qquad \text{pour } n \overline{>} n_0$$

pour toutes les valeurs de ξ de l'intervalle (α, A).

On arrive ainsi à ce théorème:

Soit $f(x)$ une fonction susceptible de la forme

$$(16) \qquad f(x) = \int_0^x \varphi(x)\, dx + C$$

et telle que les intégrales

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x} f^2(x)\, dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} \varphi^2(x)\, dx$$

aient un sens déterminé, β étant un nombre quelconque, plus grand que -1.

Toute fonction $f(x)$, assujettie aux conditions indiquées, se développe, dans tout intervalle (α, A), où α est un nombre positif différent de zéro et

$A > \alpha$, en série uniformément convergente procédant suivant les polynomes de Tchébychef-Laguerre correspondant à la fonction caractéristique

$$p(x) = x^{\beta} e^{-x}, \qquad \beta > -1.$$

Ce développement est de la forme (15).

6. L'analyse précédente ne s'applique pas au cas de $\xi = 0$ et ne permet pas d'établir la convergence du développement (15) pour $x = 0$, lorsque $\beta \geqq 0$, dans l'hypothèse générale faite plus haut au sujet de la fonction à développer.

Tout porte à croire que les restrictions complémentaires soient nécessaires pour que ce développement ait lieu pour les valeurs positives du paramètre β.

À ce qu'il paraît, ces restrictions seront plus considérables autant que β sera plus grand.

Arrêtons d'abord au cas le plus simple, lorsque

$$0 \leqq \beta < 1.$$

Supposons que la fonction $\varphi(x)$, qui figure sous le signe de l'intégrale dans l'équation (16), soit susceptible, à son tour, de la forme

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx + C'.$$

Si l'on pose, dans ce cas,

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \psi_k'(x, \beta + 1) + \sigma_n(x),$$

on aura, en répétant les raisonnements de n^os^ 3 et 4,

$$R_n(x) = \int_0^x \sigma_n(x)\,dx + C_n'.$$

C'_n désignant une constante, et

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-2} C_k \psi_k(x, \beta + 2) + \sigma_n(x).$$

où

$$C_k = \int_0^{\infty} x^{\beta+2} e^{-x} \psi(x) \psi_k(x, \beta + 2)\, dx.$$

Il s'ensuit que

(17) $$S_n(\psi(x)) = \int_0^{\infty} x^{\beta+2} e^{-x} \sigma_n^2(x)\, dx < \varepsilon^2 \qquad \text{pour } n \overline{\geq} n_0.$$

7. Cela posé, appliquons la formule de M. Liapounoff (Lĭapunov) [l'équation (10)] aux fonctions

$$F(x) = \int_0^x \frac{d}{dx}(xe^{-x})\, dx = xe^{-x},$$

$$F_1(x) = R_n(x) = \int_0^x \sigma_n(x)\, dx + C_n'.$$

On trouve

(γ) $$xe^{-x} R_n(x) = \int_0^x xe^{-x} \sigma_n(x)\, dx + \int_0^x e^{-x}(1-x) R_n(x)\, dx.$$

Faisant ensuite, dans (13), $\xi = 0$, on obtient

(δ) $$\rho_n(0) = e^{-x} \rho_n(x) + \int_0^x e^{-x} \rho_n(x)\, dx - \int_0^x e^{-x} R_n(x)\, dx.$$

Ces égalités donnent

(18) $$\rho_n(0) = e^{-x} \rho_n(x) - xe^{-x} R_n(x) + \int_0^x e^{-x} \rho_n(x)\, dx + \\ + \int_0^x xe^{-x} \sigma_n(x)\, dx - \int_0^x xe^{-x} R_n(x)\, dx.$$

On a, si $\beta < 1$,

$$\left(\int_0^x e^{-x} \rho_n(x)\, dx\right)^2 = \left(\int_0^x x^{-\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \rho_n(x)\, dx\right)^2 <$$

$$< \Gamma(1-\beta)\, S_n(f(x)),$$

$$\left(\int_0^x x e^{-x} R_n(x)\, dx\right)^2 = \left(\int_0^x x^{\frac{1-\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{1+\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} R_n(x)\, dx\right)^2 <$$

$$< \Gamma(2-\beta)\, S_n(\varphi(x))$$

et, enfin,

$$\left(\int_0^x x e^{-x} \sigma_n(x)\, dx\right)^2 = \left(\int_0^x x^{-\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{1+\frac{\beta}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \sigma_n(x)\, dx\right)^2 <$$

$$< \Gamma(1-\beta)\, S_n(\psi(x)).$$

Remarquant maintenant que, en vertu de (18),

$$\rho_n(0) = \int_0^1 e^{-x} \rho_n(x)\, dx - \int_0^1 x e^{-x} R_n(x)\, dx + \int_0^1 dx \int_0^x e^{-x} \rho_n(x)\, dx +$$

$$+ \int_0^1 dx \int_0^x x e^{-x} \sigma_n(x)\, dx - \int_0^1 dx \int_0^x x e^{-x} R_n(x)\, dx,$$

on en tire moyennant les trois dernières inégalités

$$|\rho_n(0)| < 2\sqrt{\Gamma(1-\beta)}\sqrt{S_n(f(x))} + 2\sqrt{\Gamma(2-\beta)}\sqrt{S_n(\varphi(x))} +$$

$$+ \sqrt{\Gamma(1-\beta)}\sqrt{S_n(\psi(x))}.$$

Par conséquent, en vertu de (3), (12) et (17),

(19) $$|\rho_n(0)| < N\varepsilon, \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

où

$$N = 3\sqrt{\Gamma(1-\beta)} + 2\sqrt{\Gamma(2-\beta)}$$

est un nombre fixe.

L'inégalité (19), ainsi que le théorème du n° 5, conduisent au théorème suivant:

Supposons que $f(x)$ soit une fonction susceptible de la forme

$$f(x) = \int_0^x \varphi(x)\,dx + C,$$

où $\varphi(x)$ est une fonction susceptible, à son tour, de la forme

$$\varphi(x) = \int_0^x \psi(x)\,dx + C',$$

et que les intégrales

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x} f^2(x)\,dx, \quad \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} \varphi^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{\beta+2} e^{-x} \psi^2(x)\,dx,$$

β étant un nombre compris entre -1 et $+1$, aient un sens déterminé.

Ces conditions étant remplies, la fonction $f(x)$ se développe, dans tout intervalle $(0, A)$, quel que soit le nombre positif A, en série uniformément convergente de la forme

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, \beta) \int_0^\infty x^\beta e^{-x} f(x) \psi_k(x, \beta)\,dx, \tag{20}$$

$\psi_k(x, \beta)$ étant les polynomes de Tchébychef-Laguerre correspondant à la fonction caractéristique

$$p(x) = x^\beta e^{-x}, \qquad -1 < \beta < 1.$$

Dans le cas considéré le développement (20) subsiste de même pour $x = 0$.

Le cas le plus simple et le plus intéressant correspond à la supposition que la fonction $f(x)$ à développer admette les dérivées de deux premiers ordres et que les intégrales

$$\int_0^\infty x^\beta e^{-x} f^2(x)\,dx, \quad \int_0^\infty x^{\beta+1} e^{-x} f'^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{\beta+2} e^{-x} f''^2(x)\,dx$$

existent.

Tout porte à croire que ces dernières conditions soient indispensables pour la possibilité de l'uniformité du développement (20) pour toutes les valeurs positives de x, zéro y compris.

8. Considérons encore le cas où

$$-1 < \beta < 2.$$

Bornons nous, pour plus de simplicité, à la supposition que $f(x)$ admette les dérivées de trois premiers ordres, en remarquant d'avance que l'extension des résultats, que nous allons déduire dans cette hypothèse, aux cas plus généraux, analogues à ceux de n^{os} précédents, ne peut présenter aucune difficulté.

Dans l'hypothèse faite au sujet de $f(x)$, la fonction $\rho_n(x)$ admet les dérivées de trois premiers ordres

$$\rho_n'(x), \quad \rho_n''(x) \quad \text{et} \quad \rho_n'''(x).$$

Envisageons l'identité

$$xe^{-x}\rho_n(x) = \int_0^x xe^{-x}\rho_n'(x)\,dx + \int_0^x e^{-x}\rho_n(x)\,dx - \int_0^x xe^{-x}\rho_n(x)\,dx,$$

qui, étant combinée avec celle de (δ)[1], fournit

$$\rho_n(0) = e^{-x}\rho_n(x) + xe^{-x}\rho_n(x) - \int_0^x e^{-x}\rho_n'(x)\,dx - \int_0^x xe^{-x}\rho_n'(x)\,dx + \\ + \int_0^x xe^{-x}\rho_n(x)\,dx.$$

Si nous tenons compte ensuite de l'identité (γ), en y remplaçant $R_n(x)$ par $\rho_n'(x)$ et $\sigma_n(x)$ par $\rho_n''(x)$, nous aurons

$$\rho_n(0) = e^{-x}\rho_n(x) + xe^{-x}\rho_n(x) - xe^{-x}\rho_n'(x) + \int_0^x xe^{-x}\rho_n(x)\,dx - \\ - 2\int_0^x xe^{-x}\rho_n'(x)\,dx + \int_0^x xe^{-x}\rho_n''(x)\,dx.$$

[1] Où il faut remplacer $R_n(x)$ par $\rho'_n(x)$.

Remarquant, enfin, que

$$x^2 e^{-x} \rho_n''(x) = \int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n'''(x)\,dx + 2\int_0^x x e^{-x} \rho_n''(x)\,dx -$$

$$- \int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n''(x)\,dx,$$

on obtient l'identité de la forme

$$2\rho_n(0) = 2(1+x)e^{-x}\rho_n(x) - 2xe^{-x}\rho_n'(x) + x^2 e^{-x}\rho_n''(x) +$$

$$+ 2\int_0^x x e^{-x}\rho_n(x)\,dx - 4\int_0^x x e^{-x}\rho_n'(x)\,dx + \int_0^x x^2 e^{-x}\rho_n''(x)\,dx -$$

$$- \int_0^x x^2 e^{-x}\rho_n'''(x)\,dx,$$

d'où l'on tire

$$(21)\quad 2\rho_n(0) = 2\int_1^2 (1+x)e^{-x}\rho_n(x)\,dx - 2\int_1^2 x e^{-x}\rho_n'(x)\,dx + \int_1^2 x^2 e^{-x}\rho_n''(x)\,dx +$$

$$+ 2\int_1^2 dx \int_0^x x e^{-x}\rho_n(x)\,dx - 4\int_1^2 dx\int_0^x x e^{-x}\rho_n'(x)\,dx +$$

$$+ \int_1^2 dx\int_0^x x^2 e^{-x}\rho_n''(x)\,dx - \int_1^2 dx\int_0^x x^2 e^{-x}\rho_n'''(x)\,dx.$$

9. D'après ce qui précède, il suffit de se borner au cas de

$$1 < \beta < 2,$$

c'est à dire, au cas de

$$\beta = \beta_1 + 1, \qquad 0 < \beta_1 < 1.$$

Supposons que la fonction $f(x)$ et ses dérivées de trois premiers ordres soient telles que les intégrales

$$\int_0^\infty x^{\beta_1+1} e^{-x} f^2(x)\,dx, \qquad \int_0^\infty x^{\beta_1+2} e^{-x} f'^2(x)\,dx,$$

$$\int_0^\infty x^{\beta_1+3} e^{-x} f''^2(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_0^\infty x^{\beta_1+4} e^{-x} f'''^2(x)\,dx$$

aient un sens déterminé.

Dans ce cas on s'assure aisément, de la même manière qu'aux n^{os} précédents, que

$$
\begin{aligned}
&S_n(f(x)) = \int_0^\infty x^{\beta_1+1} e^{-x} \rho_n^2(x)\,dx < \varepsilon^2,\\
&S_n(f'(x)) = \int_0^\infty x^{\beta_1+2} e^{-x} \rho_n'^2(x)\,dx < \varepsilon^2,\\
(22)\qquad &\hspace{20em} \text{pour } n \geqq n_0.\\
&S_n(f''(x)) = \int_0^\infty x^{\beta_1+3} e^{-x} \rho_n''^2(x)\,dx < \varepsilon^2,\\
&S_n(f'''(x)) = \int_0^\infty x^{\beta_1+4} e^{-x} \rho_n'''^2(x)\,dx < \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

D'autre part, d'après le théorème du n^0 5, on aura

$$(23) \qquad |\rho_n(x)| < \eta = \varepsilon \qquad \text{pour } n \geqq n_0$$

pour toutes les valeurs de x, comprises entre 1 et 2.

10. Cela posé, considérons les intégrales qui entrent dans le second membre de l'équation (21).

On a

$$2\left|\int_1^2 (1+x) e^{-x} \rho_n(x)\,dx\right| < \frac{3}{2} \max. |\rho_n(x)|,$$

$$2\left|\int_1^2 dx \int_0^x x e^{-x} \rho_n(x)\,dx\right| < 2\sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f(x))},$$

$$\left|2\int_1^2 x e^{-x} \rho_n'(x)\,dx + 4\int_1^2 dx \int_0^x x e^{-x} \rho_n'(x)\,dx\right| < 6\sqrt{\Gamma(2-\beta)}\,\sqrt{S_n(f'(x))}$$

et puis

$$\left|\int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n''(x)\,dx\right| = \left|\int_0^x x^{\frac{1-\beta_1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{\frac{\beta_1+3}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \rho_n''(x)\,dx\right| <$$
$$< \sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f''(x))},$$

et de même

$$\left|\int_1^2 x^2 e^{-x} \rho_n''(x)\,dx\right| < \sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f''(x))},$$

d'où

$$\left|\int_1^2 x^2 e^{-x} \rho_n''(x)\,dx + \int_1^2 dx \int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n''(x)\,dx\right| < 2\sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f''(x))}.$$

Enfin,

$$\left|\int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n'''(x)\,dx\right| = \left|\int_0^x x^{-\frac{\beta_1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \cdot x^{2+\frac{\beta_1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} \rho_n'''(x)\,dx\right| <$$
$$< \sqrt{\Gamma(2-\beta)}\,\sqrt{S_n(f'''(x))}$$

et, par suite,

$$\left|\int_1^2 dx \int_0^x x^2 e^{-x} \rho_n'''(x)\,dx\right| < \sqrt{\Gamma(2-\beta)}\,\sqrt{S_n(f'''(x))}.$$

Moyennant ces inégalités on tire de (21)

$$2\,|\rho_n(0)| < \frac{3}{2} \max.\,|\rho_n(x)| + 2\sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f(x)} +$$
$$+ 6\sqrt{\Gamma(2-\beta)}\,\sqrt{S_n(f'(x))} + 2\sqrt{\Gamma(3-\beta)}\,\sqrt{S_n(f''(x))} +$$
$$+ \sqrt{\Gamma(2-\beta)}\,\sqrt{S_n(f'''(x))},$$

où l'on entend par

$$\max.\,|\rho_n(x)|$$

le maximum du module de $\rho_n(x)$ dans l'intervalle (1, 2).

Il suffit maintenant de se rapporter aux inégalités (22) et (23) pour en déduire l'inégalité suivante

$$|\rho_n(0)| < \lambda\varepsilon^2 \qquad \text{pour } n \geqq n_0,$$

où

$$\lambda = \frac{3}{4} + 2\sqrt{\Gamma(3-\beta)} + \frac{7}{2}\sqrt{\Gamma(2-\beta)}$$

est un nombre fixe ne dépendant pas de n.

On arrive ainsi à ce résultat:

Toutes les fois que la fonction $f(x)$ admet les dérivées de trois premiers ordres et que les intégrales

$$\int_0^x x^\beta e^{-x} f^2(x)\,dx, \qquad \int_0^x x^{\beta+1} e^{-x} f'^2(x)\,dx,$$

$$\int_0^x x^{\beta+2} e^{-x} f''^2(x)\,dx \quad et \quad \int_0^x x^{\beta+3} e^{-x} f'''^2(x)\,dx$$

existent, elle se développe en tous les points de l'intervalle $(0, A)$, le point $x = 0$ y compris, en série uniformément convergente de la forme (15), où $\psi_k(x, \beta)$ sont les polynomes de Tchébychef-Laguerre correspondant à paramètre β

$$-1 < \beta < 2.$$

11. Il est aisé de comprendre, d'après ce que nous avons dit, qu'on peut aller plus loin par la même voie, en passant successivement aux cas de

$$\beta < 3, \quad \beta < 4 \quad \text{et ainsi de suite} \quad \beta < m.$$

m étant un entier quelconque.

De cette manière nous arriverons au théorème suivant:

Toutes les fois que la fonction $f(x)$ admet les dérivées de $m + 1$ premiers ordres et que les intégrales

$$\int_0^\infty x^{\beta+k} e^{-x} \left(f^{(k)}(x)\right)^2 dx \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots m+1)$$

existent, elle se développe en tous les points de tout intervalle $(0, A)$, quel

que soit le nombre positif A, le point $x = 0$ y compris, *en série uniformément convergente de la forme*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k(x, \beta) \int_0^{\infty} x^{\beta} e^{-x} f(x) \psi_k(x, \beta)\, dx,$$

où $\psi_k(x, \beta)$ *sont les polynomes de Tchébychef-Laguerre correspondant à la fonction caractéristique*

$$p(x) = x^{\beta} e^{-x},$$

β *étant un paramètre compris entre* -1 *et* m.

12. Nous avons indiqué une application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries de polynomes correspondant à deux cas particuliers des fonctions caractéristiques (α) et (β), mais la même théorie peut avoir des applications plus générales.

J'ai déjà étudié à ce point de vue le problème dont il s'agit pour les polynomes de Tchébychef correspondant à certaines classes de fonctions caractéristiques $p(x)$ positives dans un intervalle *à limites finies* a et b, dans mon Mémoire «Sur l'application de la théorie de fermeture au problème du développement des fonctions arbitraires en séries procédant suivant les polynomes de Tchébychef» (Mémoires de l'Académie des Sciences, Cl. Ph. M., VIII s., Vol. XXXIII, nº 8, 1914).

La même méthode, convenablement modifiée, s'applique aux systèmes analogues de polynomes de Tchébychef correspondant aux intervalles dont l'une ou toutes les deux de leurs limites deviennent infinies ($-\infty$ et $+\infty$), pourvu que ces systèmes soient fermés[1].

En me bornant ici à cette remarque, je me reserve de revenir au problème général dans une autre Note.

---

[1] Voir à cet égard ma Note «Théorie de fermeture pour les polynomes de Tchébychef-Laguerre». Bulletin, nº 8, le 1 Mai 1916.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Sur la résolution de l'équation de Gauss dans la détermination d'une orbite planétaire.

Th. Banachiewicz.

(Présenté à l'Académie le 20 Janvier (2 Février) 1916).

§ 1. Commençons par indiquer une transformation intéressante de l'équation célèbre de Gauss

$$\sin(z - q) = m \sin^4 z. \tag{1}$$

Posons $z - q = x$, de sorte que

$$z = q + x. \tag{2}$$

En portant cette valeur de z dans (1), il vient

$$\sin x = m (\sin q \cos x + \cos q \sin x)^4$$

c'est à dire

$$\sin x = m \sin^4 q \cos^4 x (1 + \operatorname{ctg} q \operatorname{tg} x)^4.$$

On est conduit à prendre deux quantités auxiliaires φ et t, définies par les formules

$$t = m \sin^3 q \cos q \cos^3 x \tag{3}$$

et

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} q \cdot \varphi \cdot t. \tag{4}$$

Cela posé, l'expression pour $\sin x$ devient

$$\varphi = (1 + \varphi t)^4. \tag{5}$$

La fonction φ ne dépendant que de t, elle peut être mise en Table à simple entrée.

La transformation ci-dessus est générale et rigoureuse.

§ 2. Dans la détermination de l'orbite d'une petite planète, observée non loin de l'opposition ($z - q < 1°$). on pourra tirer parti de ce que x est petit. et l'on posera, en première approximation

$$t_0 = m \sin^3 q \cos q. \tag{6}$$

En tirant la valeur correspondante de φ_0 de la Table mentionnée, on obtiendra x_0 par la formule

$$\operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} q \cdot \varphi_0 \cdot t_0. \tag{7}$$

On pourrait recommencer le calcul avec la valeur trouvée de x, en faisant $t_1 = m \sin^3 q \cos q \cos^3 x_0$, et, grâce à la convergence en cette méthode, on arriverait ainsi immédiatement à la valeur finale $x = x_1$ de l'inconnue x. Après quoi z est donné par (2).

Procédé A. Le calcul de la seconde approximation peut être abrégé. On a, en effet, d'après (3) et (6)

$$\log t - \log t_0 = 3 \log \cos x.$$

Si l'on désigne

$$\varkappa = \frac{d \log \varphi}{d \log t} \tag{8}$$

log tg x s'accroîtra, dans la seconde approximation, de la quantité
$\log \operatorname{tg} x - \log \operatorname{tg} x_0 = d \log \varphi + d \log t = (1 + \varkappa)\, d \log t = (1 + \varkappa)\, 3 \log \cos x$
ou bien, avec une approximation suffisante

$$\log \operatorname{tg} x - \log \operatorname{tg} x_0 = (1 + \varkappa)\, 3 \log \cos x_0.$$

Il est inutile évidemment de calculer x_0; $\cos x_0$, que l'on trouve à vue, suffit. La quantité $\varkappa$ est une fonction de t et peut être mise en Table.

Procédé B. La première approximation étant très rapprochée de la valeur vraie, sa réduction peut se faire par une formule différentielle, très simple, comme on le verra tout de suite.

En effet, si l'on différentie logarithmiquement l'équation (4), t étant supposé variable, on trouve ($\cos x = 1$)

$$\frac{dx}{x} = d \log \varphi + d \log t = (1 + \varkappa)\, d \log t.$$

Mais la correction à appliquer au t_0 étant $dt_0 = m \sin^3 q \cos q (\cos^3 x - 1)$, ou bien, sensiblement, $dt_0 = -\frac{3}{2} t_0 x_0^2$, cela donne

$$dx = -\frac{3}{2} x_0^3 (1 + \varkappa),$$

ou, en secondes d'arc, approximativement

$$\Delta x_0'' = - \operatorname{tg}^3 x_0 \cdot \psi_0 \tag{9}$$

où l'on a posé

$$\psi_0 = \frac{3}{2} \cdot 206265 \cdot (1 + \varkappa).$$

La fonction ψ ne dépendant que de t, elle peut être mise en Table à simple entrée[1].

§ 3. Nous donnons ci-joint la Table de $\log \varphi$, $\log \psi$ (procédé B) et $1 + \varkappa$ (proc. A), pour servir au calcul de $\log \sin z$ avec *cinq* décimales; l'argument t y suffit pour les rayons vécteurs de la planète comprises entre 1.7 et 5.2 unités astronomiques. Nous appelons l'attention sur le fait, que $\log \varphi$ n'y est donné qu'avec *quatre* décimales. C'est que x n'est qu'une petite fraction de $z = q + x$, de sorte qu'une erreur dans $\log \operatorname{tg} x_0$ est diminuée de plus de 10 fois dans $\log \sin z$; on s'en convaincra aisément, en déterminant $\Delta \log \operatorname{tg} x_0$ et $\Delta \log \sin (q + x_0)$ pour $1''$ en x_0 et pour les différentes valeurs de q. Une décimale de moins dans un calcul si court, comme celui dont on se sert pour trouver x_0, ce n'est pas grand'chose, mais l'important est qu'elle permet de réduire l'étendue des tables auxiliaires. C'est donc une propriété essentielle de la transformation, sur laquelle il convenait d'insister.

---

[1] Si l'on tient à ne faire figurer dans dx'' que les données du problème, on pourrait remplacer $\operatorname{tg} x_0$ dans (9) par sa valeur (7), et il en résulterait

$$dx_0'' = - \operatorname{tg}^3 q \cdot \Psi$$

Ψ ne dépendant de même que de t.

En pratique on n'emploie pas plus de 6 décimales dans la résolution de l'équation de Gauss. Or, la correction (9) donnera souvent encore la huitième décimale en $\log \sin z$, sauf les cas exceptionnals, dans lesquels les quantités négligées commencent à influencer sur l'unité de la septième décimale. Quoique l'expression (9) soit donc suffisamment exacte, nous nous permettons d'indiquer encore une autre formule de correction très simple, déduite comme (9), mais en tenant compte de la plupart des quantités négligées:

$$dx_0'' = - \operatorname{tg}^3 x_0 \cdot \cos^{9(1+\varkappa)} x_0 \cdot \psi_0 \tag{9*}$$

Les expressions (9*) et (9) se confondant dans la pratique, nous ne nous y arrêterons pas.

log t.	log φ.	log ψ. (proc. B).	$1+\varkappa$ (proc. A).
7.7	0.009	5.5	1.0
8.00	.0180	5.51	1.04
8.05	.0203	5.51	1.05
8.10	.0229	5.51	1.06
8.15	.0258	5.52	1.06
8.20	.0292	5.52	1.07
.22	.0307	5.52	1.08
.24	.0322	5.52	1.08
.26	.0338	5.53	1.08
.28	.0356	5.53	1.09
8.30	.0374	5.53	1.09
.32	.0393	5.53	1.10
.34	.0413	5.53	1.10
.36	.0434	5.54	1.11
.38	.0457	5.54	1.12
8.40	.0481	5.54	1.12
.42	.0506	5.54	1.13
.44	.0533	5.55	1.14
.46	.0561	5.55	1.15
.48	0591	5.55	1.15
8.50	.0623	5.56	1.16
.52	.0657	5.56	1.17
.54	.0692	5.56	1.19
8.56	0.0731	5.57	1.20

log t.	log φ.	log ψ. (proc. B).	$1+\varkappa$ (proc. A).
8.56	0.0731	5.57	1.20
.58	.0771	5.57	1.21
8.60	.0815	5.58	1.22
.62	.0861	5.58	1.24
.64	.0911	5.59	1.26
.66	.0964	5.60	1.28
.68	.1021	5.60	1.30
8.70	.1083	5.61	1.32
.71	.1115	5.61	1.33
.72	.1149	5.62	1.34
.73	.1184	5.62	1.36
.74	.1221	5.63	1.37
.75	.1259	5.63	1.39
.76	.1298	5.64	1.40
.77	.1340	5.64	1.42
.78	.1383	5.65	1.44
.79	.1428	5.66	1.46
8.80	.1475	5.66	1.48
.81	.1524	5.67	1.51
.82	.1576	5.68	1.53
.83	.1631	5.68	1.56
.84	.1688	5.69	1.59
.85	.1748	5.70	1.62
8.86	0.1812	5.71	1.66

§ 4. Voici quelques exemples[1].

Premier exemple. Planète **534** (Bauschinger, Bahnbestimmung, p. 273).

Proc. A. $\sin(z - 5°56'14''.4) = [1.304548] \sin^4 z$

$\sin q = 9.01469 \qquad \cos q = 9.99766$

$t_0 \quad 8.3463$

$\varphi \quad 420 \qquad 1+\varkappa = 1.10$

$\operatorname{tg} q \quad 9.0170$

$\operatorname{tg} x_0 \quad 7.4053 \qquad 3 \log \cos x_0 = 0.0 \times 10^{-4}$

corr. $0{,}0 \times 1.10 \quad 0$

$x \quad 8'44''.5$

$z \quad 6°4'58''.9$

[1] Les types du calcul supposent un calculateur muni de l'arithmomètre, que nous considérons à présent comme un instrument indispensable aux astronomes.

M. Bauschinger a trouvé, avec 6 décimales, la valeur finale $z = 6°4'58''.83$.

Second exemple. Planète **28** (Ивановъ, Теоретическая астрономія. p. 287).

Proc. B. $\sin(z - 4°25'33''.8) = [1.88412] \sin^4 z$

$\sin q =$	8.88746	$\cos q =$	9.99870
t_0	8.5452		
φ_0	702	ψ_0	5.56
$\operatorname{tg} q$	8.8888		
$\operatorname{tg} x_0$	7.5042	$\operatorname{tg}^3 x_0$	2.51
x_0	10'58''.6	$\log \Delta x_0$	8.07_n
Δx_0	0.0		
z	4°36'32''.4		

M. Ivanoff, par un calcul à 5 décimales, a trouvé la valeur identique $z = 4°36'32''.4$.

Troisième exemple. Planète Junon **3** (Gauss, Theoria motus, art. 154).

Proc. A. $\sin(z - 13°38'51''.51) = [0.5989542] \sin^4 z.$

Dans cet exemple classique q a déjà une valeur assez rarement atteinte dans les observations modernes.

$\sin q =$	9.37282	$\cos q =$	9.88756
t_0	8.7050		
φ_0	.1099	$1 + \varkappa$	1.32
$\operatorname{tg} q$	9.3853		
$\operatorname{tg} x_0$	8.2002	$3 \log \cos x_0$	-1.5×10^{-4}
corr. 1.5×1.32	-2		
x	54'28''.8		
z	14°33'20''.3		

Gauss donne $z = 14°33'19''.50$ (la valeur vraie étant, à son tour, $z = 14°33'19''.493$).

La différence entre notre valeur et celle de Gauss est encore tout entière dans les limites de l'exactitude du calcul à cinq décimales, parce qu'elle correspond à 0.65×10^{-5} en $\log \sin z$.

A ces trois exemples, déjà traités par M. Orloff dans son récent article[1], nous ajoutons un quatrième, particulièrement difficile, quoique q y est modéré, z s'y approchant de son point critique. Nous l'avons choisi pour montrer la portée effective de notre méthode dans les cas les plus défavorables qui puissent se présenter.

Quatrième exemple. Planète **433** Eros (Bauschinger, l. c., p. 294).

Proc. B. $\sin(z - 10°3'24''9) = [1.126497] \sin^4 z$

$\sin q =$	9.24211	$\cos q =$	9.99328
t_0	8.8461		
φ_0	1725	ψ	5.70
$\mathrm{tg}\, q$	9.2488		
$\mathrm{tg}\, x_0$	8.2674	$\mathrm{tg}^3 x_0$	4.80
x_0	1°3'37''5	$\log \Delta x_0$	0.50_n
z	11°6'59''2	Δx_0	—3''2

M. Bauschinger a trouvé, à six décimales, la valeur finale $z = 11°6'59''1$.

On voit que dans tous les exemples notre petite table fournit en effet les valeurs de $\sin z$, dont 5 décimales sont exactes. Nous revenons encore (§ 7) aux cas de Junon et d'Eros.

On peut résoudre l'équation de Gauss par un procédé d'itération de la forme

$$y = a \qquad (10)$$

où

$$y = \sin(z_{n+1} - q) \qquad a = m \sin^4 z_n \qquad z = \lim z_n.$$

Si l'on emploie ce procédé dans le cas d'Eros, sans y appliquer d'artifices abréviatifs, il faudrait quinze approximations (avec $z_0 = q$), pour arriver à la valeur de z, exacte au moins de 0''005 (à comparer § 7).

§ 5. Il y a lieu ici de rapprocher nos résultats de ceux qu'a obtenus M. Orloff dans l'article déjà cité. M. Orloff résout le problème, comme

[1] A. J. Orlov. Réduction de la question sur la détermination de l'orbite elliptique à la résolution d'une équation du 4-me ordre $y - y^4 = a$. Bull. Ac. Petr. Sér. VI, 1915, p. 1853.

d'habitude, par la méthode des approximations successives, mais il quitte l'équation simple (10), en remontant, à l'équation du quatrième degré[1]

$$y - y^4 = a \tag{11}$$

où

$$y = \sqrt[3]{m}\sin z_{n+1} \quad a = \sqrt[3]{m}\sin q\,(1 - \varepsilon) \quad \varepsilon = (z_n - q)\operatorname{tg}\frac{z_n}{2} \quad z = \lim z_n\ ^{2}.$$

On commence par $z_0 = q$, c'est à dire $\varepsilon = 0$.

S'il y a même, peut-être, une legère complication analytique, on en obtient en revanche une convergence bien plus rapide des approximations. C'est ainsi que déjà la première approximation n'aura que rarement une erreur dépassant 25″; c'est en effet le chiffre qu'on déduit de l'examen attentif des erreurs effectives en cette méthode: voir tableau (I) de ce paragraphe.

La valeur de y, satisfaisant à l'équation (11), se détermine par une Table à simple entrée. Quant à la relation fonctionnelle entre y et a, elle est parente à la relation (5) entre φ et t. Si l'on pose, en effet $a = t^{1/3}$ on trouve $\varphi = y^4 : a^4$.

L'erreur analytique dz de la première approximation de la méthode de M. **Orloff** est donnée par la formule approximative

$$dz = \frac{(z - q)\operatorname{tg}\frac{z_0}{2}\sin q \sec z}{1 - 4m\sin^3 z}$$

que l'on obtient en différentiant la formule $\sin z - m\sin^4 z = \sin q\,(1 - \varepsilon)$.

De cette façon on trouve cette erreur dans les exemples traités

Planète:	534	28	3	433	
dz =	3″20	2″30	135″	106″	(I)
	$q = 5°9$	$q = 4°4$	$q = 13°6$	$q = 10°0$	

La quantité t étant supposée constante, dz croit un peu plus vite que la troisième puissance de q. Pour les petites planètes proches du Soleil, et surtout ayant des inclinations considérables, q atteindra souvent 10°.

---

[1] Le rôle que joue l'équation du quatrième degré dans le problème a été signalé déjà par **Steinbrink**; voir l'article de M. **Witt**, Astr. Nachr. № 4113. *Note pendant la correcture.*

[2] A la rigueur, d'une manière approximative seulement.

L'erreur de la première approximation de x_0, obtenue par notre formule (7), est donnée par la formule (9); on trouve dans les mêmes cas

$$dx''_0 = 0''006 \qquad 0''012 \qquad 1''62 \qquad 3''15. \tag{II}$$

§ 6. Si l'on tient à déterminer, comme M. Orloff, directement $\sin z$, et non l'angle $x = z - q$, on pourra se servir de la transformation suivante, assez similaire à celle, qui est proposée par M. Orloff. Nous y parvenons a faire disparaître, en pratique, les approximations successives, et les tables auxiliaires auraient en moyenne des différences environ 5 fois plus petites.

Remarquons l'identité

$$\sin(z - q) = [\sin z - \sin q] \frac{\cos\frac{z-q}{2}}{\cos\frac{z+q}{2}}$$

qui permet d'écrire l'équation de Gauss sous la forme (rigoureuse)

$$\sin z - \sin q = \frac{\cos\frac{z+q}{2}}{\cos\frac{z-q}{2}} m \sin^4 z. \tag{12}$$

Si l'on pose

$$\sin z = f \cdot \sin q \tag{13}$$

et

$$t' = m \sin^3 q \frac{\cos\frac{z+q}{2}}{\cos\frac{z-q}{2}} \tag{14}$$

l'équation (12) sera satisfaite identiquement, à moins que l'on ait

$$f - t' f^4 = 1 \tag{15}$$

Remarquons tout de suite, que les valeurs des arguments t et t' étant supposées les mêmes, f n'est autre chose que $\varphi^{\frac{1}{4}}$.

On posera dans la première approximation, $z = q$ dans la formule (14)

$$t_0' = m \sin^3 q \cos q.$$

Si l'on se reporte à l'expression (6), on voit que $t_0' = t_0$.

L'équation (15) donnera, par une Table à construire, la valeur correspondante de f et (13) fera connaître z_0. On pourrait maintenant recommencer le cycle, en substituant z_0 dans l'expression (14). Mais il sera beaucoup plus simple de se servir d'une formule différentielle, notre première approximation

étant déjà bonne. La correction de z_0 se trouve être, comme (9), d'une grande simplicité.

L'expression (13) donne

$$d \log \sin z = d \log f = \frac{1}{4}\, d \log \varphi = \frac{1}{4}\, d \log t \cdot \frac{d \log \varphi}{d \log t} = \frac{\varkappa}{4}\, d \log t.$$

Mais, d'autre part, la correction à appliquer au t_0' est:

$$dt = m \sin^3 q \left(\frac{\cos \frac{z+q}{2}}{\cos \frac{z-q}{2}} - \cos q \right) = -m \sin^3 q \sin q \operatorname{tg} \frac{z-q}{2} \mp - \frac{1}{2}\, m \sin^4 q \operatorname{tg}(z-q),$$

ou encore, si l'on se reporte aux expressions (6) et (4)

$$dt = -\frac{t}{2} \cdot \varphi \cdot t \cdot \operatorname{tg}^2 q.$$

L'expression pour $d \log \sin z_0$ devient

$$d \log \sin z_0 = - \operatorname{tg}^2 q \cdot \omega \tag{16}$$

où l'on a posé pour obréger

$$\omega = \frac{M}{8} \cdot \varphi \cdot t \cdot \varkappa \qquad M = 0.43429\ldots \tag{17}$$

Nous donnons ci-joint une petite table de $10^4 \times \omega$.

$\log t.$	$10^{-4}\, \omega.$	$\log t.$	$10^{-4} \cdot \omega.$
8.1	0	8.5	3
8.2	1	8.6	6
8.3	1	8.7	11
8.4	2	8.8	23

L'expression (16), appliquée à nos 4 exemples, donne comme erreur de la première approximation de ce paragraphe

Planète:	534	28	3	433	
dz_0''	0."08	0."10	8."36	10."1	(III)

Les quantités (III) sont assez petites, à comparer aux (I), mais elles sont encore bien plus grandes que les quantités (II), qui correspondent à la transformation du § 1.

Les tables de f demandent évidemment autant de décimales, qu'on en cherche dans $\sin z$. Il est vrai, que le premier chiffre après la virgule y serait constamment 0; toutefois elles auraient, pour la même étendue, les différences 2.5 plus grandes que les tables correspondantes en φ, fournissant même, en général, l'exactitude moindre. La transformation du § 1 sera donc plus utile.

§ 7. Pour faire la preuve de l'exactitude de nos corrections différentielles de x_0 (§ 2) et de z_0 (§ 6), nous n'avons à considérer que les exemples extrêmes de Junon et d'Eros. Nous faisons usage d'une Table manuscrite, que nous avons préparée, donnant $\log t$ à 7 décimales pour chaque millième de $\log \varphi$.

On trouve d'abord, d'après les tables Bauschinger-Peters

Junon:	$\sin q$ 9.372 82039	$\cos q$ 9.987 56132
Eros:	9.242 10986	9.993 27517

D'où l'on obtient

Junon:	$\log t_0 = 8.704\ 9767$
Eros:	$\log t_0 = 8.846\ 1018$

Nos Tables donnent alors

Junon:	$\log \varphi_0 = 0.109\ 8719$	$\log f_0 = 0.027\ 46797$
Eros:	$\log \varphi_0 = 0.172\ 4490$	$\log f_0 = 0.043\ 11226$

et aussi

Junon:	$\varkappa = 0.325$	$\log \psi = 5.61266$	$\log \omega = 7.06112$
Eros:	$\varkappa = 0.601$	$\log \psi = 5.69673$	$\log \omega = 7.53696$

On en obtient

Junon: $\operatorname{tg} x_0 = [8.200\ 1077]$ d'après § 2; $\sin z_0 = 9.400\ 28836$ d'après § 6
Eros: $\operatorname{tg} x_0 = [8.267\ 3855]$ » » ; $\sin z_0 = 8.285\ 22212$ » »

Les corrections $\Delta x''_0$, d'après (9*) et $\Delta \log \sin z_0$ d'après (16) sont

Junon:	$\Delta x''_0 - 1''.631$	$\Delta \log \sin z_0$ $10^{-8} \times 6786$
Eros:	-3.146	$10^{-8} \times 10830$

Finalement on trouve pour z:

	D'après § 2 proc. B.	Erreur.	D'après § 6.	Erreur.	Val. vraie.
Junon	14°33′19″.493	0″.000	19″.485	−0″.008	19″.493
Eros	11° 6′59″.096	0″.000	59″.077	−0″.019	59″.096

Si l'on se sert de la formule de correction (9), au lieu de (9*), les erreurs du procédé du § 2 deviennent — 0″.002 et — 0″.008.

Les cas considérés ici étant extrêmes, et les calculs de $\log \sin z$ se faisant dans la pratique actuelle avec 6 décimales au plus, nous pouvons en conclure, que les corrections différentielles (9) et (16) suffiront toujours. Les formules du § 2 suffisent même pour le calcul à 7 ou à 8 décimales.

§ 8. D'après ce qui précède (§ 2 et § 6) on voit que la quantité

$$t_0 = t_0' = m \sin^3 q \cos q$$

est liée intrinsèquement avec la solution du problème de Gauss. Quelle est son expression en fonction des quantités primaires?

En employant les notations de M. Bauschinger (l. c., p. 270—271), on trouve

$$t_0 = \frac{l}{\mu (R_2 \sin \delta_2)^3} \sin^3 q \cos q = \frac{l}{\mu^4} \cos q. \tag{18}$$

On tire d'ailleurs du triangle SP_2R (Bauschinger, l. c., p. 270)

$$r_2 \sin x = \frac{l}{r_2^3} \sin q,$$

d'où

$$r_2 = \sqrt[4]{\frac{l \sin q}{\sin x}}. \tag{19}$$

$\sin x$ est connu numériquement par les formules du § 2 en fonction de q et t_0; la formule (19), avec l'expression (18) de t_0, nous donne donc r_2. *sans qu'on se serve de m ou de z.* Au surplus, on pourra déterminer ensuite ρ_2 par l'équation

$$\rho_2 = k - \frac{l}{r_2^3}$$

qui se prête d'ailleurs très bien au calcul numérique, vu la petitesse relative de $l : r_2^3$. Ainsi on trouve r_2 et ρ_2 sans avoir employé les quantités m et z de l'équation de Gauss. C'est ce qu'on peut exprimer encore ainsi: dans

les calculs ordinaires pour la détermination de l'orbite d'une petite planète, observée vers l'opposition, on pourrait — au point de vue du calcul numérique — se passer de l'équation de Gauss.

Notons encore que d'après (18) t_0 est à peu près égal à $\frac{k}{\mu^4}\cos q$; cette relation nous a été utile dans diverses réflexions sur le sujet de cette note.

Voici, en résumé, le contenu de notre article.

1) Une transformation de l'équation de Gauss (§ 1) réduit à deux le nombre des approximations successives (§ 2) dans la détermination de z. Il suffit même d'une seule approximation pour en obtenir z par une formule de correction (§ 2, procédés B et A).

2) Les Tables auxiliaires pour calcul de log sin z à 5 décimales sont données (§ 3). Exemples (§ 4).

3) Nos résultats sont comparés (§ 5) à ceux qu'a obtenus M. Orloff. Une autre transformation de l'équation de Gauss est indiquée (§ 6), mais c'est la transformation du § 1 qui est plus avantageuse.

4) Nous montrons (§ 7) que même dans les cas extrêmes les erreurs de nos formules de correction sont insensibles.

5) Nous finissons (§ 8) par quelques remarques sur le rôle de l'équation de Gauss dans la détermination de l'orbite d'une petite planète, observée vers l'opposition ($z - q < 1°$)[1].

Jurïev (Dorpat), Observatoire de l'Université.
1916, janvier 10/23.

---

[1] Après que cet article eut été rédigé, nous avons rencontré la transformation du § 1 chez M. Witt (Astr. Nachr. № 4113); cet auteur en déduit quelques règles pour la résolution de l'équation de Gauss, menant promptement au bout, mais un peu compliquées par le désir d'éviter toute Table auxiliaire. — Les Tables détaillées de nos fonctions auxiliaires sont en cours de publication par l'Observatoire de Jurïev (Dorpat). — *Note ajoutée sur les épreuves.*

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

On Chandler's Period in the latitude variation.

By O. Backlund.

(Presented to the Imperial Academy of Sciences, February 3/12, 1916).

II.

In the preceding note on Chandler's period I shew that, starting from

$$\frac{1}{H_\nu} = \frac{\cos(\nu_\nu + 3\Delta\theta)}{\sin\nu}$$

θ is obtained by means of the formula

$$36(\theta_0 + \Delta\theta) = \sum_{\nu=0}^{\nu=5} (W_{n-1-\nu} - W_\nu); \quad n = 12$$

The values computed from the x — coordinates in Witting's paper are given in that note. In the present note I give the corresponding values derived from the y — coordinates. The θ_y correspond exactly to the same epoques as the θ_x.

Y

	I		II	III $= \frac{I+II}{2}$
	θ_y.		θ_y.	θ_y.
1	29°.5	2	30°.1	29°.8
3	30.3	4	30.1	30.2
5	29.8	6	30.2	30.0
7	30.3	8	30.4	30.4
9	30.9	10	31.0	30.8
11	30.6	12	30.4	30.5
13	30.5	14	30.0	30.2
15	29.9	16	(29.9)	(29.8)

We have here evidently an analogous systematic variation of θy as of θx. After some trial I found that a period of 18ʸ.62 is pretty well indicated. I then developped the θx and θy in Fourier's series. For this cause I extrapolated θx and θy for n⁰ 16 given in brackets under II. This extrapolated value cannot be in error more then 0°.2, which has no sensible influence on the result. As a test of this supposition I calculated the θ, very nearly for the epoque corresponding to 16, from observations made in Pulkovo 1908.3—1915.0. This yielded $\theta = 30°.05$, which corroborates the above result viz. that θ has in 15 and 16 very nearly the same values as in 1 and 2.

The coefficients of the Fourier's series

$$\Delta\theta = \tfrac{1}{2}\, c_0 + c_1 \cos \mathrm{cot} + c_2 \cos 2\omega t + c_3 \cos 3\omega t + c_4 \cos 4\omega t \ldots$$
$$+ s_1 \sin \omega t + s_2 \sin 2\omega t + s_3 \sin 3\omega t \ldots$$

are given in the following table for θx and θy. $\Delta\theta x$ and $\Delta\theta y$ are the corrections to the means of the θ.

	$\Delta\theta x$				$\Delta\theta y$			
	I	II	III	III—c	I	II	III	III—c
c_0 . .	+0°.02	—0°.03	0°.00	+0°.2	+0°.02	0°.02	+0°.01	—0°.1
c_1 . .	—0.26	—0.37	—0.31	0.0	—0.46	—0.39	—0.41	+0.1
c_2 . .	+0.10	+0.12	+0.10	0.0	—0.05	+0.22	+0.10	—0.3
c_3 . .	+0.16	+0.08	+0.11	0.0	—0.14	—0.06	—0.09	—0.1
c_4 . .	+0.05	+0.01	+0.04	0.0	—0.05	+0.06	—0.01	+0.2
s_1 . .	0.00	+0.18	+0.08	0.0	—0.12	+0.08	0.00	+0.1
s_2 . .	0.00	—0.11	+0.02	—0.2	—0.23	—0.01	+0.10	0.0
s_3 . .	0.00	—0.10	+0.01	0.0	+0.23	+0.05	—0.12	—0.1

The epoques for I, II and III are respectively 1891.4, 1892.6 and 1892.0. We see at once that all the coefficients except c_1 are uncertain. The $c_{1,y}$ are systematically greater than the $c_{1,x}$. I have taken the mean of them and accepted the following approximate formulae

$$\theta_x = 30°.36 - 0°.36 \cos 19°.32 \,\{(t - 1892.0) + 11°.6\}$$
$$\pm 31 \qquad \pm 4$$

$$\theta_y = 30.22 - 0.36 \cos 19.32 \,\{(t - 1892.0) + 11.6\}$$
$$\pm 45 \qquad \pm 6$$

These formulae were compared with the tabulated θ_x (foregoing note) and θ_y III. The results are given under III—*c*. From the differences are also calculated the probable errors. The phase 11°6 is certainly not very exact.

The expressions for θ_x and θ_y give us those for the period:

$$P_x = 432^d\!.7 \;\{1 + 0.012 \cos[19°.32\,(t - 1892.0) + 11°.6]\}$$
$$\pm 0.35$$

$$P_y = 434^d\!.3 \;\{1 + 0.012 \cos[19.32\,(t - 1892.0) + 11.6]\} \qquad \text{I}$$
$$\pm 0.51$$

The difference between the mean periods is twice greater than the sum of the probable errors; the question if they really are different I leave as yet open. The minima and maxima are

P_x min. $= 427^d\!.5$; $\qquad P_x$ max. $= 437^d\!.9$

P_y min. $= 429^d\!.1$; $\qquad P_y$ max. $= 439^d\!.5$

The times of minima and maxima next to the epoque of the formula are resp. 1900.7 and 1891.4. From the observation with the great Vertical cercle at Pulkovo for the catalogues 1865.0 and 1845 0 Bonsdorff and Ivanoff have derived as period 428 days. We find now by the formule I *y* the following times for the minima

1882.1, 1863.5, 1844.9

Taking the means of P_x and P_y the corresponding minimum is $428^d\!.3$. The epoque differs from that of the catalogue 1845.0 only by 0.1 year. For 1865.0, the epoque of the second Pulkovo Catalogue, the value of $\frac{\theta_x + \theta_y}{2}$ is $428^d\!.7$.

From his observations 1882—1892 Nyrén derives for the period $432^d\!.8$, mean epoque 1887.2. Our formulae give for the same epoque $P_x = 432^d\!.4$; $P_y = 433^d\!.0$. As Nyrén's value has a probable error of about 5 days the agrement is satisfying, but the test of our formulae is not very strong. Calculating backwards our formulae represent accordingly the available observations within the limits of the probable errors. Notwithstanding this favourable instance I look at the result only as a rough approximation as being the first attempt to approach to an adequate expression for

Chandler's period and the possibility to predict the position of the pole. The material is still to poor, the observations extending only over one period whose length must be further controlled. It is therefore of the highest importance that the observations of the latitude variation should be carried on without interruption till the problem is solved perfectly. Presently it is to early to enter in a discussion of the physical cause of the variation in θ. But so much is evident that the result arrived at cannot come from an error of the constant of nutation.

I have chosen the method of calculation so as to eliminate the secular variation in x and y, if such a motion really exists. In the successive differences $s_\nu - s_{\nu+1}$ it is very nearly excluded.

In the following and last note on this subject I will treat the amplitude.

For the assistance in computing the θ_y I am indebted to Mrs Romanskj.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Къ вопросу о строеніи кристалловъ.

I.

А. Шубникова.

(Представлено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 20 января 1916 г.).

Введеніе. Цѣль настоящей статьи состоитъ въ томъ, чтобы ближе подойти къ разрѣшенію задачи о строеніи кристалловъ. Для достиженія этой цѣли мнѣ кажется необходимымъ разрѣшить одну чисто геометрическую задачу — задачу заполненія плоскости и пространства особыми многоугольниками и многогранниками, которые я назову соотвѣтственно *планатомами* и *стереоатомами*. Въ настоящей статьѣ я остановлюсь только на *планатомахъ*. Такъ какъ между планатомами съ одной стороны и типическими изогонами Е. С. Федорова[1] — съ другой есть большая аналогія, то мнѣ сначала придется остановиться на этихъ послѣднихъ.

Выводъ всѣхъ возможныхъ изогоновъ и изоэдровъ.

Теорема I Эйлера. Если обозначимъ число граней многогранника черезъ F, число вершинъ черезъ E и число реберъ черезъ K, то

$$E + F = K + 2 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 1)$$

Доказательство. Въ самомъ дѣлѣ, при склеиваніи многогранника изъ его граней мы замѣчаемъ, что при прибавленіи новой грани реберъ прибавляется на единицу больше чѣмъ вершинъ; послѣдняя грань (крышка) не измѣняетъ ни числа реберъ, ни числа вершинъ. Такимъ образомъ только

[1] По Е. С. Федорову, изогономъ называется многогранникъ, въ каждой вершинѣ котораго сходится по одному и тому же числу реберъ или граней. Изоэдромъ называется многогранникъ, у котораго всѣ грани одного и того же наименованія. Типическимъ изогономъ называется многогранникъ съ равными или симметричными гоноэдрами (многогранными углами). Подтипическій изоэдръ получается изъ типическаго изогона такъ. Опишемъ сферу около типическаго изогона, проведемъ касательныя къ сферѣ плоскости черезъ вершины; эти плоскости и образуютъ подтипическій изоэдръ. Въ подтипическомъ изоэдрѣ всѣ грани имѣютъ не только одно наименованіе, но онѣ всѣ или равны между собой, или симметричны.

$F-2$ прибавленій новыхъ граней измѣняютъ число реберъ въ сравненіи съ числомъ вершинъ. Число реберъ возрастетъ при этомъ въ сравненіи съ числомъ вершинъ на $F-2$, т. е. $K=E+(F-2)$.

Теорема II. Для изогоновъ $K=\frac{M\cdot E}{2}$, гдѣ M есть число реберъ, сходящихся въ каждой вершинѣ изогона.

Доказательство. Если въ каждой вершинѣ сходится по M реберъ, то въ E вершинахъ, казалось бы, сойдутся $M\cdot E$ реберъ. Произведеніе $M\cdot E$, однако, слѣдуетъ раздѣлить на 2, потому что каждое ребро соединяетъ 2 вершины и при подсчетѣ повторяется 2 раза. Итакъ

$$K=\frac{M\cdot E}{2} \quad \ldots\ldots 2)$$

Теорема III. $M<6$.

Доказательство. Обозначимъ сумму всѣхъ плоскихъ угловъ изогона черезъ ΣP. Если бы всѣ грани его были треугольниками, то ΣP равнялась бы $2d\cdot F$, но среди граней могутъ быть и четыреугольники, и пятиугольники и т. д.; поэтому

$$\Sigma P \geqslant 2d\cdot F.$$

Раздѣливъ ΣP на E, получимъ сумму плоскихъ угловъ при каждой вершинѣ изогона, которая меньше $4d$:

$$4d>\frac{\Sigma P}{E}\geqslant\frac{2d\cdot F}{E}.$$

Отсюда

$$2>\frac{F}{E} \quad \ldots\ldots 3)$$

Подставимъ въ формулу Эйлера изъ выраженія 2) значеніе для K; получаемъ

$$M=2\left(1+\frac{F}{E}-\frac{2}{E}\right).$$

Принимая во вниманіе неравенство 3), это послѣднее равенство преобразуемъ въ

$$M<2\left(1+2-\frac{2}{E}\right);$$

отсюда

$$M<6 \quad \ldots\ldots 4)$$

Такъ какъ въ каждой вершинѣ многогранника не можетъ сходиться меньше трехъ реберъ, то единственно возможными для M значеніями являются 3, 4 и 5. Изъ этой теоремы слѣдуетъ также, что въ изогонѣ не можетъ быть болѣе пяти различныхъ по наименованію граней. Теперь выведемъ всѣ изогоны послѣдовательно полагая $M=3, 4, 5$.

$M = 3$. Въ этомъ случаѣ въ каждой вершинѣ изогона сходятся три грани. Пусть наименованія этихъ граней будутъ a, b, c, причемъ не исключается возможность ихъ равенства. Сколько граней наименованія a будетъ имѣть многогранникъ, если число его вершинъ — E? Если при каждой вершинѣ мы имѣемъ по одной грани наименованія a, то всего ихъ будетъ $\frac{E}{a}$; E приходится дѣлить на a, потому что при такомъ подсчетѣ каждая грань повторится a разъ. Всѣхъ граней многогранникъ будетъ имѣть

$$F = \frac{E}{a} + \frac{E}{b} + \frac{E}{c} = E\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right).$$

Формула Эйлера принимаетъ теперь видъ

$$E\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = K + 2 - E.$$

Принимая во вниманіе равенство 2), имѣемъ

$$E\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{3 \cdot E}{2} + 2 - E,$$

или

$$E = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} - \frac{1}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 5)$$

Это уравненіе удовлетворяется только въ слѣдующихъ 10 случаяхъ (табл. I).

Таблица I.

№	a	b	c	E	Названіе изогона по Федорову.
1	3	3	3	4	Сфеноидъ.
2	n	4	4	$2 \cdot n$	Трапецоэдрическій призмоидъ.
3	3	6	6	12	Притупленный тетраэдръ.
4	3	8	8	24	Притупленный кубъ.
5	3	10	10	60	Притупленный додекаэдръ.
6	4	6	6	24	Притупленный октаэдръ.
7	4	6	8	48	Притупленный кубооктаэдръ.
8	4	6	10	120	Притупленный додекаэдро-икосаэдръ.
9	5	5	5	20	Додекаэдръ.
10	5	6	6	60	Притупленный икосаэдръ.

№ 2, гдѣ a можетъ принимать любое значеніе, обнимаетъ собой безчисленное множество многогранниковъ.

$M = 4$. Въ этомъ случаѣ формула Эйлера принимаетъ видъ

$$E = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{\partial} - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 6)$$

и удовлетворяется лишь въ пяти случаяхъ (табл. II).

Таблица II.

№	a	b	c	∂	E	Названіе изогона по Федорову.
11	n	3	3	3	$2 \cdot n$	Призмоидъ.
12	3	3	4	4	12	Кубо-октаэдръ.
13	3	3	5	5	30	Додекаэдро-икосаэдръ.
14	3	4	4	4	24	Прямой (косой) тетрагоноэдрическій притупленный кубо-октаэдръ.
15	3	4	4	5	60	Тетрагоноэдрическій притупленный додекаэдро-икосаэдръ.

$M = 5$. Формула Эйлера для этого случая принимаетъ видъ

$$E = \frac{2}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{\partial} + \frac{1}{e} - \frac{3}{2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 7)$$

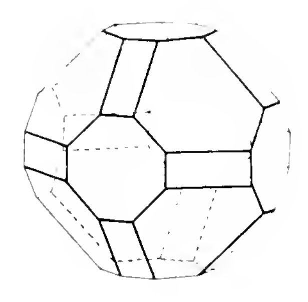
и удовлетворяется только въ трехъ случаяхъ (табл. III).

Таблица III.

№	a	b	c	∂	e	E	Названіе изогона по Федорову.
16	3	3	3	3	3	12	Призмоэдръ тригональный.
17	3	3	3	3	4	24	» тетрагональный.
18	3	3	3	3	5	60	» пентагональный.

Изъ выше изложеннаго слѣдуетъ, что всякій изогонъ долженъ удовлетворять одному изъ трехъ видовъ формулы Эйлера. Обратнаго мы утверждать не можемъ, поэтому по каждому рѣшенію уравненія Эйлера мы въ

дѣйствительности должны построить изогонъ, чтобы утверждать, что онъ существуетъ. Это построеніе мы можемъ сдѣлать совершенно независимо отъ формулы Эйлера, роль которой при этомъ сводится къ тому, что, пользуясь ея рѣшеніями, мы можемъ быть увѣренными, что построенными нами изогонами исчерпываются, дѣйствительно, всѣ случаи изогоновъ, такъ какъ число послѣднихъ не должно превышать числа рѣшеній. Насъ интересуютъ лишь типическіе изогоны. Построеніе ихъ сводится къ тому, что мы беремъ послѣдовательно всѣ случаи симметріи конечныхъ фигуръ и съ каждымъ изъ нихъ продѣлываемъ слѣдующую операцію. Возьмемъ точку и помѣстимъ ее въ произвольномъ мѣстѣ по отношенію къ элементамъ симметріи; эта точка повторится элементами симметріи, и въ результатѣ получится совокупность точекъ, коими вполнѣ опредѣляется типическій изогонъ, вершинами котораго эти точки являются. Такой типическій изогонъ мы будемъ называть *общимъ* для даннаго класса симметріи въ отличіе отъ частныхъ, которые получимъ, если исходную точку будемъ помѣщать на осяхъ или плоскостяхъ симметріи. Изъ общихъ изогоновъ мы получимъ и общіе изоэдры, а изъ частныхъ — частные. По терминологіи, принятой въ кристаллографіи, общіе и частные изоэдры суть не что иное, какъ общія и частныя простыя формы. На рис. 1 изображенъ какъ примѣръ типическаго изогона притупленный кубооктаэдръ (№ 7, табл. I), изъ котораго можетъ быть полученъ извѣстный въ кристаллографіи гексакисоктаэдръ или сорокавосьмигранникъ. Для болѣе подробнаго ознакомленія съ изогонами и изоэдрами отсылаю читателя къ книгѣ Федорова[1]; намъ же достаточно одного притупленнаго кубо-октаэдра, чтобы на немъ показать свойства всѣхъ вообще типическихъ изогоновъ. Изъ построенія типическихъ изогоновъ мы убѣждаемся, что около каждаго изъ нихъ можно описать сферу, потому что точка, повторяясь въ элементахъ симметріи остается все время въ одномъ и томъ же разстояніи отъ центра симметріи (въ Федоровскомъ смыслѣ); это разстояніе и есть радіусъ описанной сферы. Изъ построенія подтипическихъ изоэдровъ мы убѣждаемся также, что въ каждый изъ нихъ можно вписать шаръ.


Рис. 1.

Около каждой грани типическаго изогона можно описать кругъ; этотъ кругъ есть сѣченіе описаннаго шара плоскостью грани.

[1] Е. Федоровъ. Начала ученія о фигурахъ (Зап. Имп. Спб. Мин. О-ва. 1885).

Посмотримъ теперь, сколько граней наименованія p имѣетъ изогонъ. Если при каждой вершинѣ у него такихъ граней пересѣкается n_p, то при E вершинахъ мы встрѣтимъ ихъ $\frac{n_p \cdot E}{p}$.

Произведеніе $n_p \cdot E$ нужно дѣлить на p потому, что каждая грань наименованія p имѣетъ и p вершинъ, а потому сосчитывается p разъ. Если мы пожелаемъ знать не абсолютныя значенія чиселъ граней даннаго наименованія, а отношеніе этихъ чиселъ для граней различнаго наименованія, то придемъ къ отношенію

$$\frac{E \cdot n_p}{p} : \frac{E \cdot m_q}{q} : \ldots = \frac{n_p}{p} : \frac{m_q}{q} : \ldots, \quad \ldots\ldots\ 8)$$

т. е. число граней даннаго наименованія въ изогонѣ пропорціонально числу этихъ граней при каждой вершинѣ и обратно пропорціонально наименованію грани. Для притупленнаго кубо-октаэдра, изображеннаго на рис. 1, отношеніе числа четыреугольниковъ къ числу шестиугольниковъ и къ числу восьмиугольниковъ будетъ равно

$$\frac{1}{4} : \frac{1}{6} : \frac{1}{8} = 6 : 4 : 3.$$

Въ числителяхъ дробей стоятъ здѣсь единицы потому, что при каждой вершинѣ притупленнаго кубо-октаэдра мы имѣемъ по одному четыреугольнику, шестиугольнику и восьмиугольнику. На этомъ мы и закончимъ разсмотрѣніе изогоновъ и изоэдровъ и перейдемъ къ главной задачѣ.

Выводъ всѣхъ возможныхъ случаевъ заполненія плоскости планатомами.

Предыдущій выводъ типическихъ изогоновъ сводится къ заполненію всѣми способами поверхности шара сферическими многоугольниками при условіи, чтобы въ вершинахъ сходились равные или симметричные комплексы дугъ. Поставимъ себѣ теперь ту же задачу, но не для поверхности шара, а для плоскости. Будемъ называть пучкомъ прямыхъ совокупность отрѣзковъ прямыхъ, сходящихся въ одной точкѣ. Пучки будутъ равны или симметричны, если ихъ можно совмѣстить наложеніемъ или отраженіемъ. Поставленная задача формулируется теперь такъ. Найти всѣ способы заполненія плоскости многоугольниками безъ промежутковъ такъ, чтобы въ каждой вершинѣ любого многоугольника сходились равные или симметричные пучки прямыхъ. Эти многоугольники мы будемъ называть *планатомами*.

Основная теорема IV. Для безгранично большой части плоскости,

сплошь заполненной многоугольниками, $E + F = K$, гдѣ F, E и K означаютъ соотвѣтственно числа многоугольниковъ, ихъ вершинъ и реберъ.

Доказательство. Возьмемъ какой-нибудь многоугольникъ и будемъ пристраивать къ нему остальные $F - 1$ многоугольниковъ. Каждый новый многоугольникъ прибавляетъ сторонъ на единицу больше, чѣмъ вершинъ. Слѣдовательно для плоскости, заполненной многоугольниками, мы имѣемъ равенство

$$K = E + (F - 1),$$

или

$$\frac{E + F}{K} = 1 + \frac{1}{K}.$$

При произвольномъ увеличеніи части плоскости членъ $\frac{1}{K}$ можно сдѣлать сколь угодно малымъ; лѣвая часть равенства при этомъ не стремится къ нулю, такъ какъ вмѣстѣ съ знаменателемъ возрастаетъ и числитель. Пренебрегая дробью $\frac{1}{K}$, имѣемъ

$$E + F = K \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 9)$$

Теорема V. Для плоскости, заполненной планатомами, $M \leqslant 6$, гдѣ M— число реберъ пучка.

Доказательство. Очевидно, чѣмъ меньше углы многоугольниковъ, тѣмъ большее число ихъ, а, слѣдовательно, и реберъ, можетъ сходиться въ одной вершинѣ. Изъ всѣхъ многоугольниковъ треугольники имѣютъ наименьшіе углы, поэтому въ случаѣ заполненія плоскости одними треугольниками, M будетъ наибольшимъ. Такъ какъ сумма угловъ пучка равна $4 \cdot d$, а среднее значеніе угла треугольника равно $\frac{2 \cdot d}{3}$, то $M = 4d : \frac{2 \cdot d}{3} = 6$. Въ общемъ же случаѣ

$$M \leqslant 6 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 10)$$

Мы имѣемъ право брать здѣсь среднее значеніе угла потому, что всѣ пучки по условію равны между собой.

Теорема VI.

$$K = \frac{M \cdot E}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 11)$$

Доказательство. Если въ каждой вершинѣ сходятся M реберъ, то въ E вершинахъ сойдутся $\frac{M \cdot E}{2}$ реберъ. Произведеніе $M \cdot E$ нужно раздѣлить на 2 потому, что каждое ребро соединяетъ 2 вершины и при подсчетѣ повторяется 2 раза.

Пользуясь предыдущими теоремами, преобразуемъ формулу $E+F=K$ для различныхъ значеній M. Мы сказали, что въ каждой вершинѣ сходится M реберъ. Замѣтимъ, что столько же сходится и многоугольниковъ. Пусть наименованія ихъ будутъ: $a_1, a_2, a_3, \ldots a_M$, причемъ не исключается возможность равенства этихъ величинъ между собой. Если при каждой вершинѣ есть одинъ многоугольникъ наименованія a_1, то всего такихъ многоугольниковъ при E вершинахъ будетъ $\frac{E}{a_1}$. Здѣсь E приходится дѣлить на a_1 потому, что каждый многоугольникъ сосчитывается столько разъ, сколько у него вершинъ. Всѣхъ многоугольниковъ при E вершинахъ будетъ, слѣдовательно.

$$F = \frac{E}{a_1} + \frac{E}{a_2} + \frac{E}{a_3} + \ldots + \frac{E}{a_M} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12)$$

Подставляя въ основную формулу 9) полученныя выше значенія для F и K [см. 11) и 12)], имѣемъ

$$E + \frac{E}{a_1} + \frac{E}{a_2} + \ldots + \frac{E}{a_M} = \frac{M \cdot E}{2},$$

или

$$M = 2\left(1 + \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_M}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots 13)$$

Полагая $M = 3, 4, 5, 6$ получимъ слѣдующіе частные случаи этого уравненія и его рѣшеній.

$M = 3$. Въ этомъ случаѣ формула принимаетъ видъ

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 14)$$

и удовлетворяется въ четырехъ случаяхъ (табл. IV).

$M = 4$. Формула принимаетъ видъ

$$1 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \frac{1}{a_4} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 15)$$

и удовлетворяется четырьмя рѣшеніями (табл. V).

$M = 5$. Формула принимаетъ видъ

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_5} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 16)$$

и удовлетворяется двумя рѣшеніями (табл. VI).

$M = 6$. Формула принимаетъ видъ

$$2 = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_6} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 17)$$

и удовлетворяется только однимъ рѣшеніемъ (табл. VII).

Таблица IV.

№	a_1	a_2	a_3
1	3	12	12
2	4	6	12
3	4	8	8
4	6	6	6

Таблица V.

№	a_1	a_2	a_3	a_4
5	3	3	6	6
6	3	3	4	12
7	3	4	4	6
8	4	4	4	4

Таблица VI.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
9	3	3	3	3	6
10	3	3	3	4	4

Таблица VII.

№	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
11	3	3	3	3	3	3

Такъ-же, какъ и въ случаѣ изогоновъ мы можемъ сказать, что каждый случай заполненія плоскости планатомами долженъ удовлетворять основному уравненію, но не обратно. Забѣгая впередъ, укажемъ, что номеру шестому (табл. V) какъ разъ не имѣется соотвѣтствующаго случая заполненія плоскости планатомами.

Построеніе системъ планатомовъ. Для построенія системъ планатомовъ воспользуемся тѣмъ же способомъ, какъ и для построенія изогоновъ. Федоровымъ установлены 17 случаевъ симметріи безконечныхъ плоскихъ фигуръ. Кромѣ элементовъ симметріи конечныхъ фигуръ безконечныя плоскія фигуры допускаютъ существованіе плоскости скольженія и элемента поступательнаго движенія совмѣщенія[1]. На рис. 2 изображены по Федорову всѣ 17 случаевъ (классовъ) симметріи плоскихъ безконечныхъ фигуръ, при чемъ плоскости скольженія изображены пунктиромъ, а элементъ посту-

[1] Элементъ поступательнаго движенія совмѣщенія состоитъ въ томъ, что безконечная фигура приходитъ въ совмѣщеніе сама съ собой всякій разъ, какъ мы передвинемъ ее въ нѣкоторомъ направленіи на нѣкоторое, всегда одно и то же, разстояніе. Такъ плоскость, разбитая на квадратики, приходитъ въ совмѣщеніе сама съ собой всякій разъ, когда мы передвигаемъ ее въ направленіи стороны квадрата на разстояніе, равное сторонѣ квадрата. Элементъ плоскости скольженія состоитъ въ единовременномъ дѣйствіи поступательнаго движенія и отраженія и въ этомъ смыслѣ напоминаетъ ось сложной симметріи, при чемъ вращеніе замѣнено поступаніемъ на опредѣленное разстояніе.

панія, присутствующій во всѣхъ случаяхъ, не изображенъ совсѣмъ[1]. Буквы *M*, *R*, *T*, *H* означаютъ соотвѣтственно системы: моноклиническую, ромбическую, тетрагональную и гексагональную; цифры обозначаютъ номера класса системы симметріи.

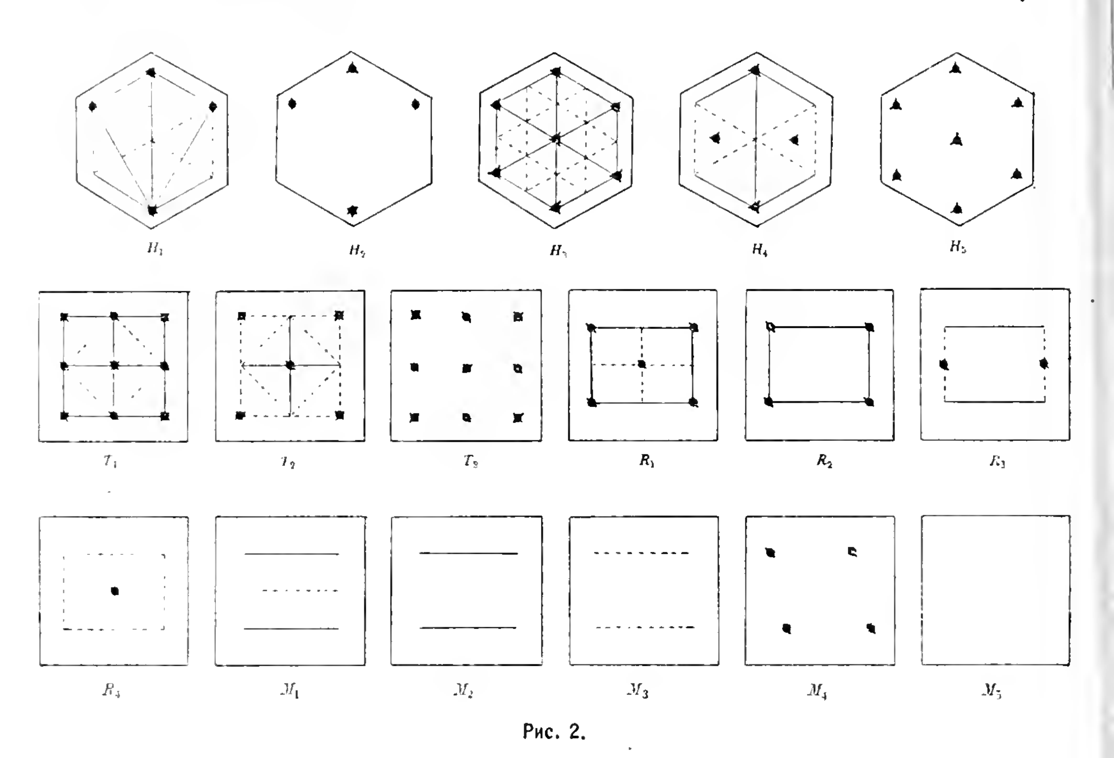


Рис. 2.

Для построенія системы планатомовъ, получимъ сначала правильную систему точекъ[2]. Для этого наносимъ на плоскости согласно одному изъ 17 случаевъ всѣ элементы симметріи. Беремъ затѣмъ точку въ произвольномъ положеніи и повторяемъ ее элементами симметріи. Для того, чтобы получить изъ данной системы точекъ систему планатомовъ, нужно во всѣхъ случаяхъ поступать такъ: 1) Соединить каждую точку съ ближайшей къ ней точкой отрѣзкомъ прямой линіи. 2) Продолжать этотъ процессъ пока можно, избѣгая пересѣченія линій въ какихъ-нибудь иныхъ точкахъ, кромѣ дан-

[1] E. v. Fedorow. Reguläre Plan- und Raumtheilung. München. 1900.

[2] Правильныя системы точекъ впервые выведены были Зонке (см. Sohncke. Die regelmässigen ebenen Punktsysteme von unbegrenzter Ausdehnung. Journal für die reine und angew. Mathematik. 1874). Имъ же начерчены были многія изъ приведенныхъ ниже фигуръ, которыми онъ пользовался только лишь какъ средствомъ изображать правильныя системы точекъ безъ какого-либо отношенія къ дѣленію плоскости на части. Центръ тяжести лежитъ у него въ точкахъ, а не въ многоугольникахъ.

ныхъ. Если на лицо имѣется нѣсколько равныхъ кратчайшихъ разстояній, то проводимъ ихъ всѣ, если онѣ не пересѣкаются и — ни одного, если онѣ пересѣкаются.

Мы помѣстили исходную точку въ случайномъ положеніи по отношенію къ элементамъ симметріи и получили *главную* систему точекъ и планатомовъ; если же исходная точка будетъ лежать на какомъ-либо элементѣ симметріи, то мы получимъ *подчиненныя* системы точекъ и планатомовъ. Каждой главной системѣ можетъ быть подчинено нѣсколько системъ и наоборотъ, каждой подчиненной системѣ можетъ соотвѣтствовать нѣсколько главныхъ. Главныя системы, такимъ образомъ, совершенно такъ же относятся къ своимъ подчиненнымъ, какъ въ кристаллографіи общія простыя формы къ частнымъ. Замѣтимъ, что симметрія системы точекъ и планатомовъ можетъ оказаться выше, чѣмъ симметрія исходнаго класса: это мы можемъ непосредственно наблюдать на выведенныхъ ниже системахъ планатомовъ.

Приступимъ теперь къ построенію отдѣльныхъ случаевъ системъ планатомовъ, начавъ съ *гексагональной* симметріи.

Классъ H_1. Помѣщая исходную точку внутри прямоугольника изъ плоскостей симметріи (рис. 2), получимъ систему планатомовъ, изображенную на рис 3. Легко видѣть, что данная система планатомовъ соотвѣтствуетъ рѣшенію № 2 основного уравненія и является главной для разсматриваемаго класса. Помѣщая точку послѣдовательно на гипотенузѣ, большомъ и маломъ катетѣ того же треугольника, получимъ соотвѣтственно подчиненныя системы, изображенныя на рисункахъ 4, 5, 6 и удовлетворяющія рѣшеніямъ: № 7, № 4 и № 1. На рис. 5 мы имѣемъ систему шестиугольниковъ двухъ родовъ; легко, однако, видѣть, что въ частномъ случаѣ, когда исходная точка будетъ лежать отъ вершины прямого угла на разстояніи, равномъ $^1/_3$ большого катета, мы получимъ систему, состоящую исключительно изъ правильныхъ шестиугольниковъ (рис. 8). Впрочемъ, этотъ случай будетъ нами выведенъ и иначе. Помѣстимъ теперь точку на осяхъ 2, 3 и 6 порядка, или, что все равно, въ вершинахъ угловъ въ 90°, 60° и 30° все того же треугольника плоскостей: мы получимъ фигуры, изображенныя на рис. 7, 8 и 9 и соотвѣтствующія № 5, № 4 и № 11 рѣшеній основного уравненія. Мы помѣщали исходную точку послѣдовательно на всѣхъ плоскостяхъ и осяхъ симметріи, но оставили безъ вниманія плоскости скольженія. Нетрудно видѣть, что, помѣщая исходную точку на плоскости симметріи, мы получаемъ вдвое меньше точекъ, чѣмъ въ главной системѣ: точно такъ же, если исходная точка лежитъ на оси, то общее число точекъ будетъ

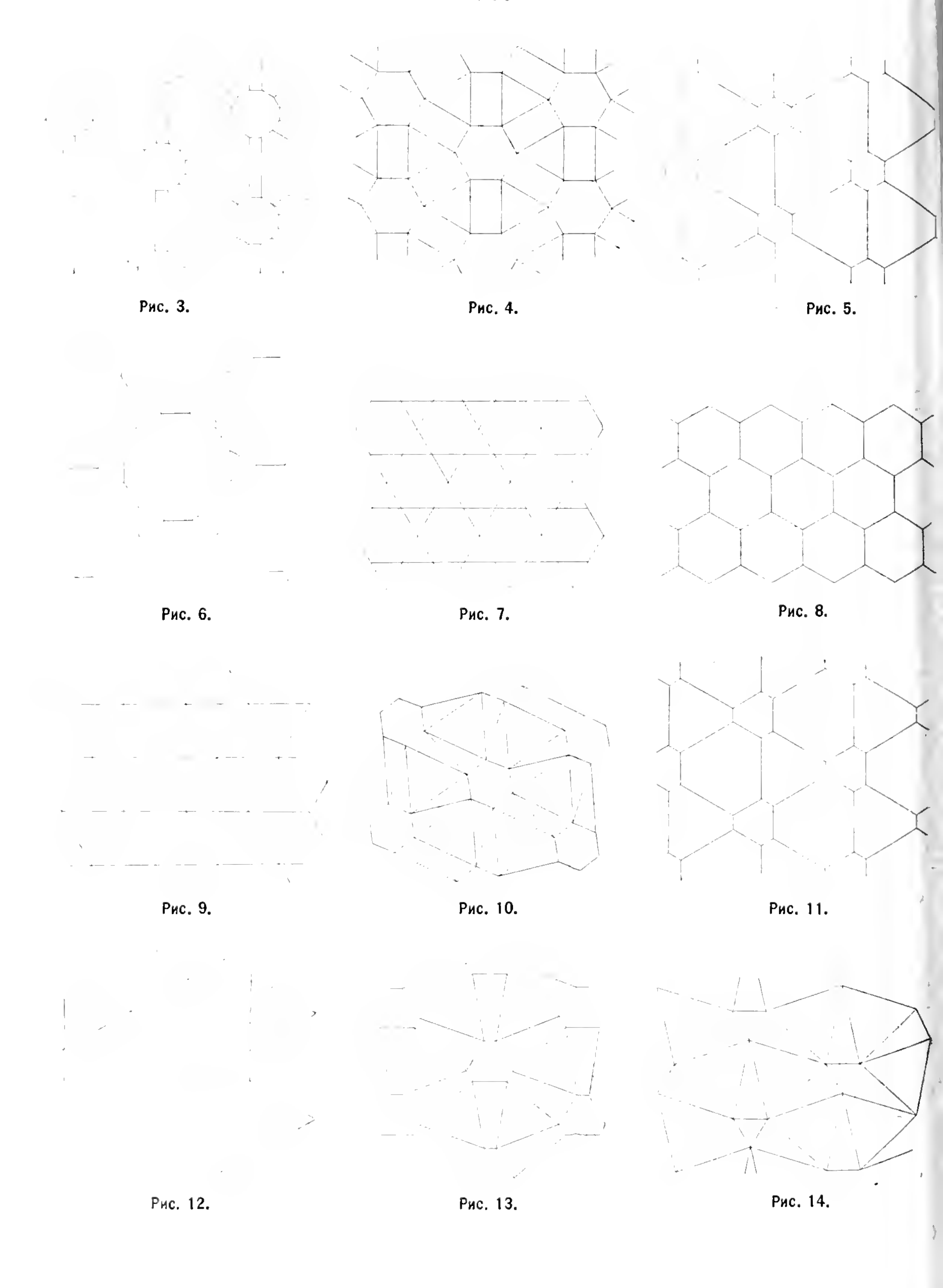


Рис. 3. Рис. 4. Рис. 5.

Рис. 6. Рис. 7. Рис. 8.

Рис. 9. Рис. 10. Рис. 11.

Рис. 12. Рис. 13. Рис. 14.

въ 2, 3, 4, 6 разъ меньше числа точекъ главной системы; если же исходная точка лежитъ на плоскости скольженія, то не измѣняется ни общее число точекъ главной системы, ни наименованіе планатомовъ. Такимъ образомъ выводъ всѣхъ возможныхъ планатомовъ класса H_1 нужно считать оконченнымъ.

Классъ H_2. Главная система планатомовъ этого класса изображена на рис. 10 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 9 основного уравненія. Интересно отмѣтить, что разсматриваемая фигура отличается отъ рис. 3 главнымъ образомъ тѣмъ, что здѣсь четыреугольники раздѣлены діагоналями на пары треугольниковъ. Того же самаго мы не можемъ сдѣлать съ прямоугольниками рисунка 4 потому, что обѣ діагонали ихъ заявляютъ равныя права на свое существованіе и, будучи проведены, пересѣкаются въ точкѣ, которая не связана симметріей съ исходной. Рис. 4 является частнымъ случаемъ рис. 10 и не противорѣчитъ симметріи разсматриваемаго класса. Зеркальное изображеніе разсмотрѣнной главной системы является тоже главной системой этого класса и относится къ первой системѣ какъ правая простая форма — къ лѣвой. Правыя и лѣвыя системы мы будемъ встрѣчать во всѣхъ классахъ, гдѣ кромѣ элемента поступанія есть только оси симметріи. Мы можемъ предвидѣть существованіе трехъ подчиненныхъ системъ планатомовъ сообразно съ тремя особыми положеніями исходной точки на осяхъ 6, 3, 2 порядка. Всѣ эти три случая уже были разсмотрѣны выше и изображены соотвѣтственно на рис. 9, 8 и 7. Изъ этого примѣра мы убѣждаемся, что, дѣйствительно, различнымъ классамъ симметріи могутъ удовлетворять однѣ и тѣ же системы планатомовъ.

Классъ H_3. Главная система планатомовъ этого класса симметріи изображена на рис. 11 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 4 основного уравненія. Частными случаями рисунка 11 являются рис. 7 и 8. Подчиненныя системы получимъ, помѣщая исходную точку на плоскости симметріи и на оси 3 порядка. Тотъ и другой случай мы имѣемъ на рис. 12 и 9. При этомъ рис. 12 соотвѣтствуетъ рѣшенію № 5 основного уравненія, а его частной формой является рис. 7.

Классъ H_4. Главная система представлена на рис. 13 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 7 основного уравненія. Частнымъ случаемъ ея является рис. 4. Помѣщая исходную точку на плоскости симметріи, на пересѣченіи ихъ и на оси 3 порядка, получимъ соотвѣтственно рис. 14, 8, 9; изъ нихъ рис. 14 удовлетворяетъ рѣшенію № 11 основного уравненія. Частнымъ случаемъ его является рис. 9.

Классъ H_5. Главная система изображена на рис. 15 и удовлетворяетъ

рѣшенію № 11 основного уравненія. Существуютъ правая и лѣвая модификація этой системы. Частвымъ случаемъ ея является рис. 14 и 9. Единственно возможную подчиненную систему получимъ, если помѣстимъ исходную точку на оси 3 порядка. Эта послѣдняя система планатомовъ изображена на рис. 9. Перейдемъ теперь къ *тетрагональной симметріи*.

Классъ T_1. Главная система изображена на рис. 16 и удовлетворяетъ рѣшенію № 3 основного уравненія. Частный случай ея изображенъ на рис. 18. Подчиненныя системы получимъ, если помѣстимъ исходную точку на гипотенузѣ или катетѣ треугольника изъ плоскостей симметріи, на оси 4-го или 2-го порядка. Первые два случая, удовлетворяющіе рѣшеніямъ № 8 и № 3 изображены на рис. 17 и 18. Оба другихъ случая приводятъ къ одной и той же фигурѣ (рис. 19), отвѣчающей рѣшенію № 8 основного уравненія.

Классъ T_2. Главная система изображена на рис. 20. Она удовлетворяетъ рѣшенію № 8; ея частнымъ случаемъ является рис. 19. Подчиненныя системы получимъ, помѣщая исходную точку на плоскости симметріи и на осяхъ 4 и 2 порядка. Первая изображена на рис. 21 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 10 основного уравненія; двѣ другія нами уже разсмотрѣны на рис. 19.

Классъ T_3. Главная система изображена на рис. 22 и удовлетворяетъ рѣшенію № 10 основного уравненія. Ея частный случай изображенъ на рис. 17. Эта система такъ же, какъ изображенныя на рис. 10 и 15, можетъ быть правой и лѣвой. Подчиненныя системы, получающіяся на осяхъ 4 и 2 порядка совпадаютъ обѣ съ системой, изображенной на рис. 19. Какъ въ кристаллографіи мы различаемъ геометрически совершенно тождественныя призмы или пирамиды по родамъ въ зависимости отъ того, какое положеніе занимаютъ онѣ по отношенію къ элементамъ симметріи, такъ точно одну и ту же систему, напр., изображенную на рис. 19, мы можемъ разбить на нѣсколько и назвать одну изъ нихъ системой перваго, другую — системой второго рода и т. д. въ зависимости отъ положенія исходной точки по отношенію къ элементамъ симметріи. Перейдемъ къ *ромбической симметріи*.

Классъ R_1. Главная система изображена на рис. 23 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 4 основного уравненія. Помѣщая исходную точку на малой сторонѣ четырехугольника изъ плоскостей, получимъ систему, изображенную на рис. 24 и удовлетворяющую рѣшенію № 8 основного уравненія. Помѣщая точку на бо́льшей сторонѣ четырехугольника, мы получимъ въ зависимости отъ разстоянія ея отъ точки пересѣченія плоскостей и отношенія сторонъ четырехугольника или предыдущую систему, или систему, изображенную

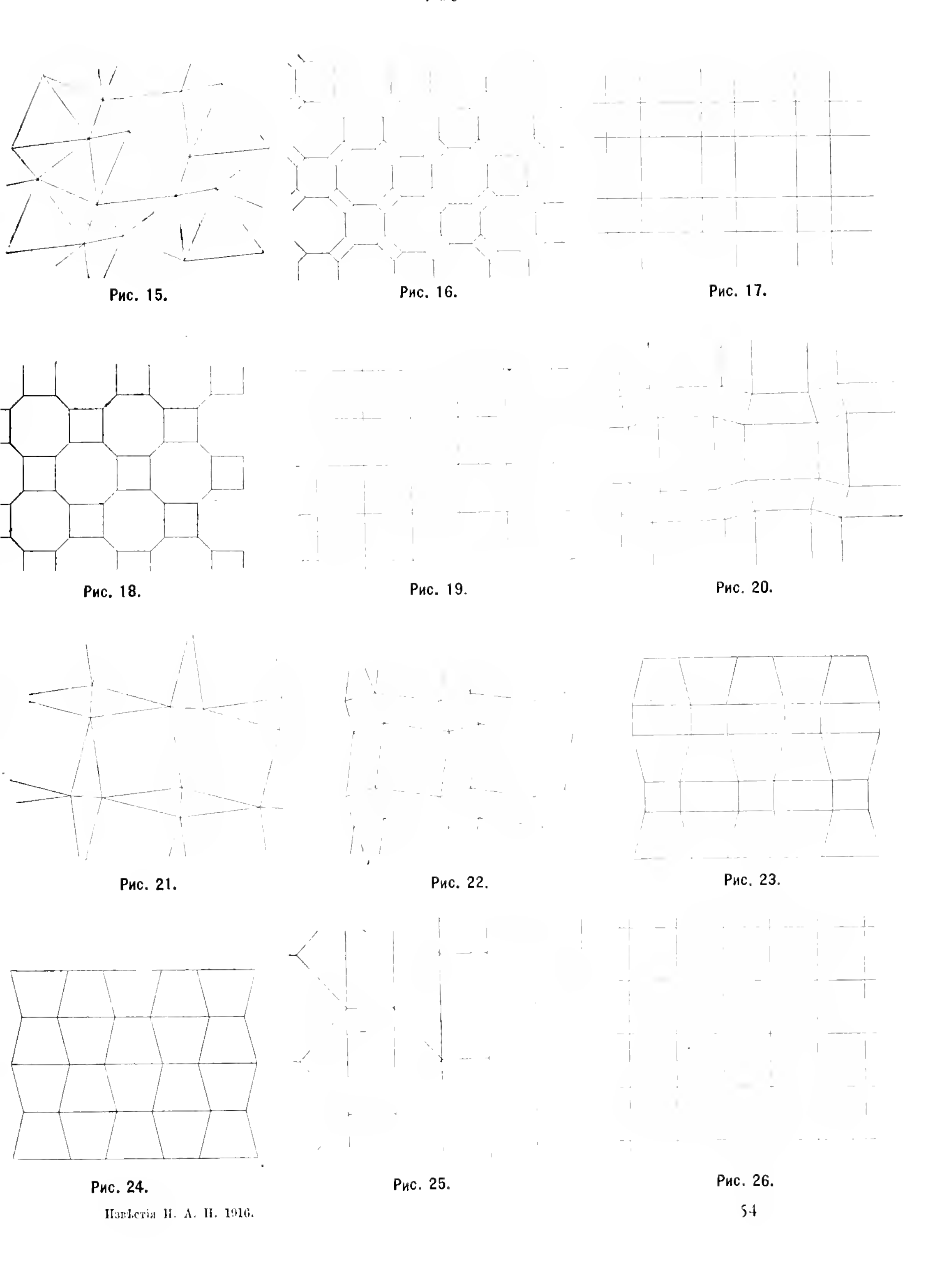


Рис. 15. Рис. 16. Рис. 17.

Рис. 18. Рис. 19. Рис. 20.

Рис. 21. Рис. 22. Рис. 23.

Рис. 24. Рис. 25. Рис. 26.

на рис. 25 и соотвѣтствующую рѣшенію № 10 основного уравненія. Вглядываясь въ оба послѣднихъ чертежа, мы замѣчаемъ, что каждый изъ нихъ состоитъ изъ шестиугольниковъ, но на рис. 24 эти шестиугольники раздѣлены одной діагональю пополамъ, на рисункѣ же 25 шестиугольники раздѣлены на три части двумя параллельными линіями. Мы можемъ себѣ представить такой случай, когда діагональ будетъ равна каждой изъ двухъ параллельныхъ линій. Въ этомъ случаѣ, согласно нашему способу построенія системъ планатомовъ, діагональ и параллельныя линіи заявляютъ равныя права на существованіе. Такимъ образомъ, изъ одной и той же системы точекъ мы можемъ иногда получить двѣ различныя системы планатомовъ. Этому явленію нѣтъ аналогіи въ кристаллографическихъ простыхъ формахъ. Помѣщая исходную точку на оси второго порядка, находящейся въ центрѣ прямоугольника изъ плоскостей симметріи, получимъ систему, изображенную на рис. 26 и соотвѣтствующую рѣшенію № 8 основного уравненія. Если же исходная точка будетъ находиться на оси 2 порядка, лежащей въ одной изъ вершинъ прямоугольника плоскостей, то получится фигура, изображенная на рис. 27, соотвѣтствующая рѣшенію № 11 основного уравненія. Въ частныхъ случаяхъ рис. 23 и 24 могутъ переходить соотвѣтственно въ рис. 28 и 26. Первая изъ нихъ соотвѣтствуетъ рѣшенію № 8 основного уравненія.

Классъ R_2. Главная система изображена на рис. 29 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 8 основного уравненія. Частными случаями ея являются системы, изображенныя на рис. 28 и 26. Помѣщая исходную точку на одной и другой сторонѣ четырехугольника изъ плоскостей получимъ въ обоихъ случаяхъ рис. 28. Если исходная точка будетъ лежать на оси 2 порядка, то мы придемъ къ рис. 26. Итакъ въ этомъ классѣ мы имѣемъ три системы разнаго рода, отвѣчающія рис. 28 и двѣ системы, отвѣчающія рис. 26.

Классъ R_3. Въ этомъ классѣ одной и той же системѣ точекъ соотвѣтствуютъ двѣ главныя системы планатомовъ (рис. 30 и 31), соотвѣтствующія рѣшеніямъ № 10 и № 8 основного уравненія. Частный случай рисунка 30 мы встрѣчали на рис. 25, а частными случаями рисунка 31 являются рис. 24, 26, 28. Помѣщая исходную точку на плоскости симметріи, получимъ рис. 32 или 33, соотвѣтствующіе рѣшенію № 11 основного уравненія. Частнымъ случаемъ этихъ двухъ системъ является система, изображенная на рис. 27. Помѣщая исходную точку на пересѣченіи плоскостей симметріи и скольженія придемъ къ рис. 26. Къ той же фигурѣ придемъ, помѣщая исходную точку на оси второго порядка.

Классъ R_4. Здѣсь одной и той же системѣ точекъ соотвѣтствуютъ двѣ главныхъ системы планатомовъ (рис. 34 и 35), соотвѣтствующія рѣшенію

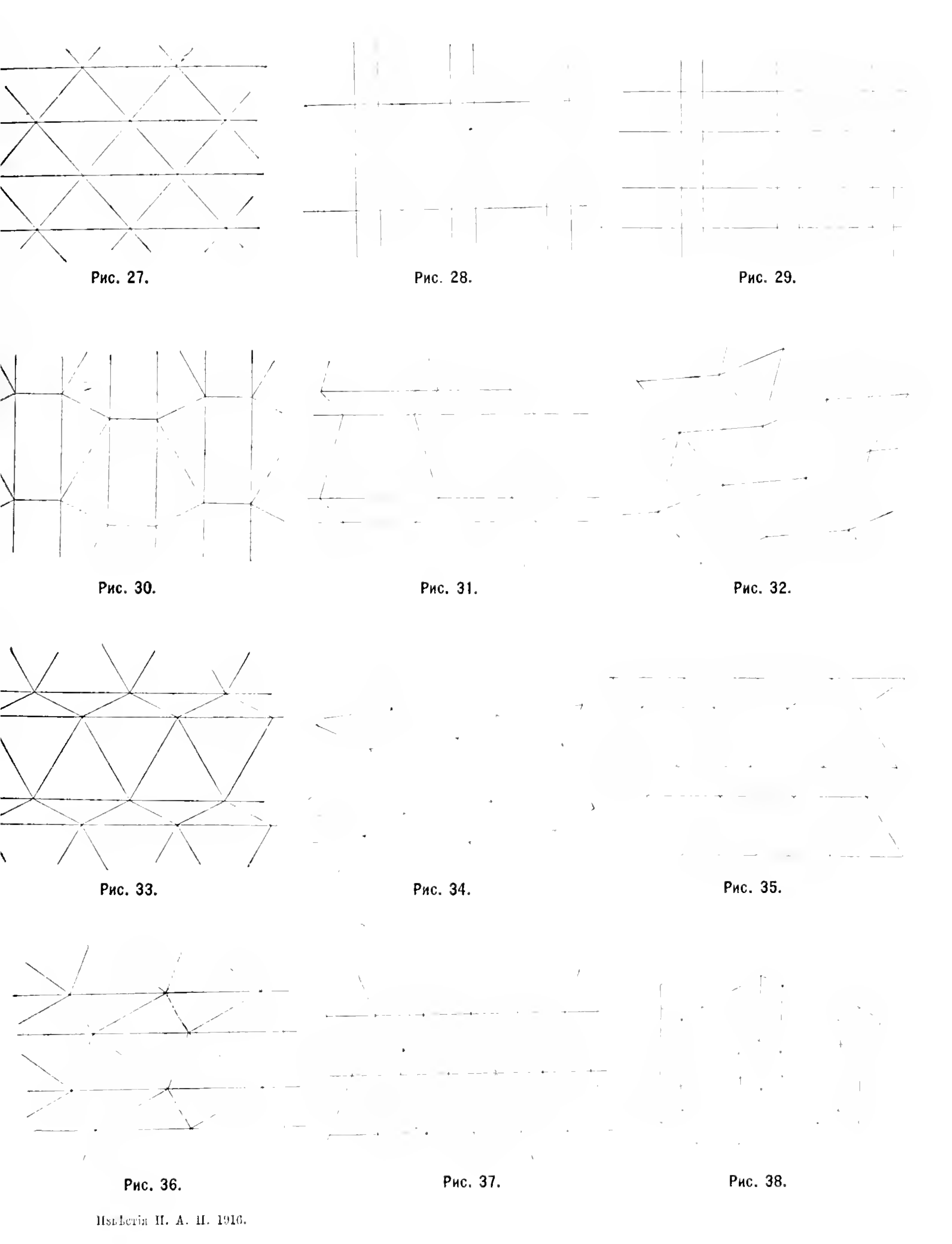


Рис. 27. Рис. 28. Рис. 29.

Рис. 30. Рис. 31. Рис. 32.

Рис. 33. Рис. 34. Рис. 35.

Рис. 36. Рис. 37. Рис. 38.

№ 11 основного уравненія. Отличіе ихъ другъ отъ друга состоитъ въ томъ, что на рис. 34 два разныхъ треугольника группируются вокругъ каждой точки въ порядкѣ a, a, b, b, a, b, если одинъ треугольникъ обозначимъ буквой a, а другой — буквой b; на рисункѣ же 35 порядокъ чередованія иной: a, a, a, b, b, b. Въ частномъ случаѣ рис. 34 принимаетъ видъ рисунка 24 в, именно, тогда, когда исходная точка лежитъ на линіи, соединяющей середины противоположныхъ сторонъ четырехугольника изъ плоскостей скольженія. Рис. 35 въ частномъ случаѣ принимаетъ видъ рис. 33. Помѣщая точку на оси второго порядка, придемъ къ рис. 27. Если же исходная точка лежитъ на пересѣченіи плоскостей скольженія, то получается рис. 26.

Классъ M_1. Главная система изображена на рис. 24 и 25. Помѣщая исходную точку на плоскости симметріи, получимъ рис. 27; если же помѣстимъ ее на плоскости скольженія, то получимъ рис. 26.

Классъ M_2. Главной системой служитъ рис. 28; подчиненной—рис. 26.

Классъ M_3. Главная система изображена на рис. 36 и соотвѣтствуетъ рѣшенію № 11 основного уравненія; подчиненная — на рис. 37 соотвѣтствуетъ тому же номеру рѣшенія основного уравненія.

Классъ M_4. Въ этомъ классѣ тѣ же системы планатомовъ, что и въ предыдущемъ.

Классъ M_5. Единственной системой является система, изображенная на рис. 37.

Обозначеніе системъ планатомовъ формулами. Для изогоновъ мы уже доказали, что число граней даннаго наименованія пропорціонально числу ихъ при каждой вершинѣ и обратно пропорціонально ихъ наименованію. Докажемъ то же для системъ планатомовъ. Пусть въ каждой точкѣ системы планатомовъ сходится: n_3 треугольниковъ, n_4 четыреугольниковъ и т. д. Возьмемъ очень большую часть плоскости и подсчитаемъ, сколько въ ней имѣется многоугольниковъ наименованія p. Если при каждой точкѣ мы имѣемъ n_p многоугольниковъ, то при E точкахъ данной части плоскости мы встрѣтимъ $\frac{E.n_p}{p}$ многоугольниковъ. Произведеніе $E.n_p$ нужно дѣлить на p потому, что каждый многоугольникъ при такомъ подсчетѣ повторится p разъ. Если намъ нужно узнать не абсолютныя числа многоугольниковъ, зависящія отъ перемѣннаго числа E, а отношенія ихъ при безгранично увеличивающемся числѣ E, то мы придемъ къ равенству

$$\frac{n_3}{3}\cdot E : \frac{n_4}{4}\cdot E : \ldots . = \frac{n_3}{3} : \frac{n_4}{4} : \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots 18),$$

т. е. числа многоугольниковъ относятся другъ къ другу какъ дроби, числителями которыхъ являются числа многоугольниковъ даннаго наименованія при каждой точкѣ системы планатомовъ, знаменателемъ же — наименованія многоугольниковъ. Такъ какъ въ члены дробей входятъ только цѣлыя числа, то и отношенія дробей могутъ быть приведены къ отношеніямъ цѣлыхъ чиселъ. Каждую систему планатомовъ мы можемъ теперь характеризовать опредѣленной формулой, подобной химической формулѣ. Римскими цифрами будемъ обозначать наименованія входящихъ въ систему многоугольниковъ, а арабскими — цѣлыя числа отношенія 18.

Такъ, напримѣръ, формула $\mathrm{VI}_1\ \mathrm{IV}_3\ \mathrm{III}_2$ (см. рис. 4) означаетъ, что въ данной системѣ на одинъ шестиугольникъ приходится три четырехугольника и два трехугольника. Формула эта получилась такъ. Мы видимъ, что въ каждой вершинѣ сходятся: одинъ шестиугольникъ, два четырехугольника и одинъ трехугольникъ. Слѣдовательно $n_6 = 1$, $n_4 = 2$ и $n_3 = 1$, откуда

$$\frac{n_6}{6} : \frac{n_4}{4} : \frac{n_3}{3} = \frac{1}{6} : \frac{2}{4} : \frac{1}{3} = 1 : 3 : 2.$$

Въ нижеприведенной таблицѣ VIII мы даемъ списокъ всѣхъ системъ планатомовъ каждаго класса симметріи съ обозначеніемъ формулъ и номера рѣшеній основного уравненія, соотвѣтствующаго данной системѣ.

Таблица VIII.

Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.	Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.
H_1	2	$\mathrm{XII}_1\ \mathrm{VI}_2\ \mathrm{IV}_3$	3	H_4	7	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{IV}_3\ \mathrm{III}_2$	13
»	7	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{IV}_3\ \mathrm{III}_2$	4	»	7	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{IV}_3\ \mathrm{III}_2$	4
»	4	$\mathrm{VI}_2\ \mathrm{VI}_1$	5	»	11	$\mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_2\ \mathrm{III}_3$	14
»	1	$\mathrm{XII}_1\ \mathrm{III}_2$	6	»	4	VI_1	8
»	4	VI_1	8	»	11	III_1	9
»	5	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_2$	7	H_5	11	$\mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_3$	15
»	11	III_1	9	»	11	$\mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_2\ \mathrm{III}_3$	14
H_2	9	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_2\ \mathrm{III}_6$	10	»	11	III_1	9
»	5	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_2$	7	T_1	3	$\mathrm{VIII}_1\ \mathrm{VIII}_1\ \mathrm{IV}_2$	16
»	4	VI_1	8	»	8	$\mathrm{IV}_2\ \mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_1$	17
»	11	III_1	9	»	3	$\mathrm{VIII}_1\ \mathrm{IV}_1$	18
»	7	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{IV}_3\ \mathrm{III}_2$	4	»	8	IV_1	19
H_3	4	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{VI}_1\ \mathrm{VI}_1$	11	T_2	8	$\mathrm{IV}_2\ \mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_1$	20
»	5	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_2$	7	»	8	IV_1	19
»	4	VI_1	8	»	10	$\mathrm{IV}_1\ \mathrm{III}_2$	21
»	11	III_1	9	T_3	10	$\mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_4$	22
»	5	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_2$	7	»	8	$\mathrm{IV}_2\ \mathrm{IV}_1\ \mathrm{IV}_1$	17
»	5	$\mathrm{VI}_1\ \mathrm{III}_1\ \mathrm{III}_1$	12	T_3	8	IV_1	19

Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.	Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.
R_1	4	$IV_1\ IV_1\ IV_2$	23	R_3	11	III_1	27
»	8	IV_1	26	R_4	11	$III_1\ III_1$	34
»	8	$IV_1\ IV_1$	28	»	11	$III_1\ III_1$	35
»	8	IV_1	24	»	8	IV_1	24
»	10	$IV_1\ III_2$	25	»	11	$III_1\ III_1$	33
»	11	III_1	27	»	11	III_1	27
R_2	8	$IV_1\ IV_1\ IV_1\ IV_1$	29	M_1	8	IV_1	24
»	8	$IV_1\ IV_1$	28	»	10	$IV_1\ III_2$	25
»	8	IV_1	26	»	11	III_1	27
R_3	10	$IV_1\ III_2$	30	»	8	IV_1	26
»	8	$IV_1\ IV_1$	31	M_2	8	$IV_1\ IV_1$	28
»	10	$IV_1\ III_2$	25	»	8	IV_1	26
»	8	IV_1	24	M_3	11	$III_1\ III_1$	36
»	8	IV_1	26	»	11	III_1	37
»	8	$IV_1\ IV_1$	28	M_4	11	$III_1\ III_1$	36
»	11	III_1	32	»	11	III_1	37
»	11	$III_1\ III_1$	33	M_5	11	III_1	37

Мы уже видѣли сколь велика аналогія между изогонами и системами планатомовъ. Эту аналогію можно продолжить. Такъ, разсматривая каждый случай отдѣльно, мы наблюдаемъ, что около каждаго планатома можно описать окружность. Интересно отмѣтить, что среди планатомовъ нѣтъ пятиугольниковъ. Подобно тому, какъ отъ изогоновъ можно придти къ изоэдрамъ, такъ точно и отъ системы планатомовъ легко перейти къ системѣ планигоновъ Федорова. Для этого дѣлили стороны планатомовъ пополамъ и изъ серединъ проводимъ перпендикуляры. Точки пересѣченія перпендикуляровъ (центры описанныхъ круговъ) будутъ вершинами планатомовъ.

Выводъ неполныхъ системъ планатомовъ.

При построеніи системъ планатомовъ мы соединяли ближайшія точки до тѣхъ поръ, пока можно, и тогда плоскость оказывалась раздѣленной на выпуклые многоугольники — планатомы. Бываютъ, однако, случаи, что, не доведя этотъ процессъ до конца, мы уже получаемъ плоскость раздѣленную на выпуклые многоугольники. Такую систему выпуклыхъ многоугольниковъ мы будемъ называть неполной системой планатомовъ. Неполныя системы легко получить изъ полныхъ, если выкинуть у нихъ по одной или нѣсколько линій изъ каждаго пучка. Неполныя системы отличаются отъ полныхъ только тѣмъ, что для нихъ необязательно, чтобы около каждаго многоугольника можно было описать окружность. Каждая неполная система удо-

влетворяетъ одному изъ рѣшеній основного уравненія и характеризуется формулой.

Классъ H_1. Въ этомъ классѣ нѣтъ системъ, которыя мы могли бы превратить въ неполныя. Вообще, чѣмъ выше симметрія, тѣмъ меньше мы найдемъ неполныхъ системъ.

Классъ H_2. Изъ рис. 10 получаемъ двѣ неполныхъ системы планатомовъ, изображенныя на рис. 38 и 39 и удовлетворяющія соотвѣтственно № 7 и № 4 основного уравненія.

Классъ H_3. Въ этомъ классѣ нѣтъ неполныхъ системъ.

Классъ H_4. Въ этомъ классѣ нѣтъ неполныхъ системъ.

Классъ H_5. Изъ рис. 15 получаемъ рис. 40, удовлетворяющій рѣшенію № 5 основного уравненія.

Классъ T_1. Въ этомъ классѣ нѣтъ неполныхъ системъ.

Классъ T_2. Рисунокъ 20 и 21 даютъ соотвѣтственно рисунки 41 и 42 удовлетворяющіе рѣшеніямъ № 3 и № 8 основного уравненія.

Классъ T_3. Изъ рис. 22 получаемъ рис. 43 и 44, удовлетворяющіе рѣшеніямъ № 3 и № 8 основного уравненія.

Классъ R_1. Рис. 23 и 24 даютъ соотвѣтственно рис. 45 и 46, удовлетворяющіе рѣшеніямъ № 3 и № 4 основного уравненія. Рисунки 25 и 27 оба даютъ одну и ту же неполную систему, изображенную на рис. 47 и удовлетворяющую рѣшенію № 8 основного уравненія.

Классъ R_2. Въ этомъ классѣ нѣтъ неполныхъ системъ.

Классъ R_3. Рис. 30 даетъ рис. 48 и 49, удовлетворяющіе рѣшеніямъ № 4 и № 8 основного уравненія. Изъ рис. 31 получаемъ тоже рис. 48. Рис. 32 переходитъ или въ рис. 50 или въ рис. 51 удовлетворяющіе № 8 основного уравненія. Рис. 33 переходитъ тоже въ рис. 51. Къ этому же классу принадлежатъ выведенные выше рис. 46 и 47.

Классъ R_4. Изъ рисунка 34 получаемъ рисунки 52, 53, 54, 55, удовлетворяющіе соотвѣтственно рѣшеніямъ № 10, № 8, № 4, № 8 основного уравненія. Изъ рис. 35 получаемъ рисунки 56 и 57, удовлетворяющіе № 10 и № 8 основного уравненія. Кромѣ того къ этому же классу принадлежатъ выведенные выше рис. 51, 46, 47.

Классъ M_1. Къ этому классу принадлежатъ рис. 46 и 47.

Классъ M_2. Въ этомъ классѣ нѣтъ неполныхъ системъ.

Классъ M_3. Изъ рис. 36 получаемъ четыре неполныхъ системы, изображенныя на рисункахъ 58, 59, 60 и 61 и удовлетворяющіе послѣдовательно рѣшеніямъ № 10, № 8, № 4 и № 8. Изъ рис. 37 получаемъ рис. 62, удовлетворяющій рѣшенію № 8 основного уравненія.

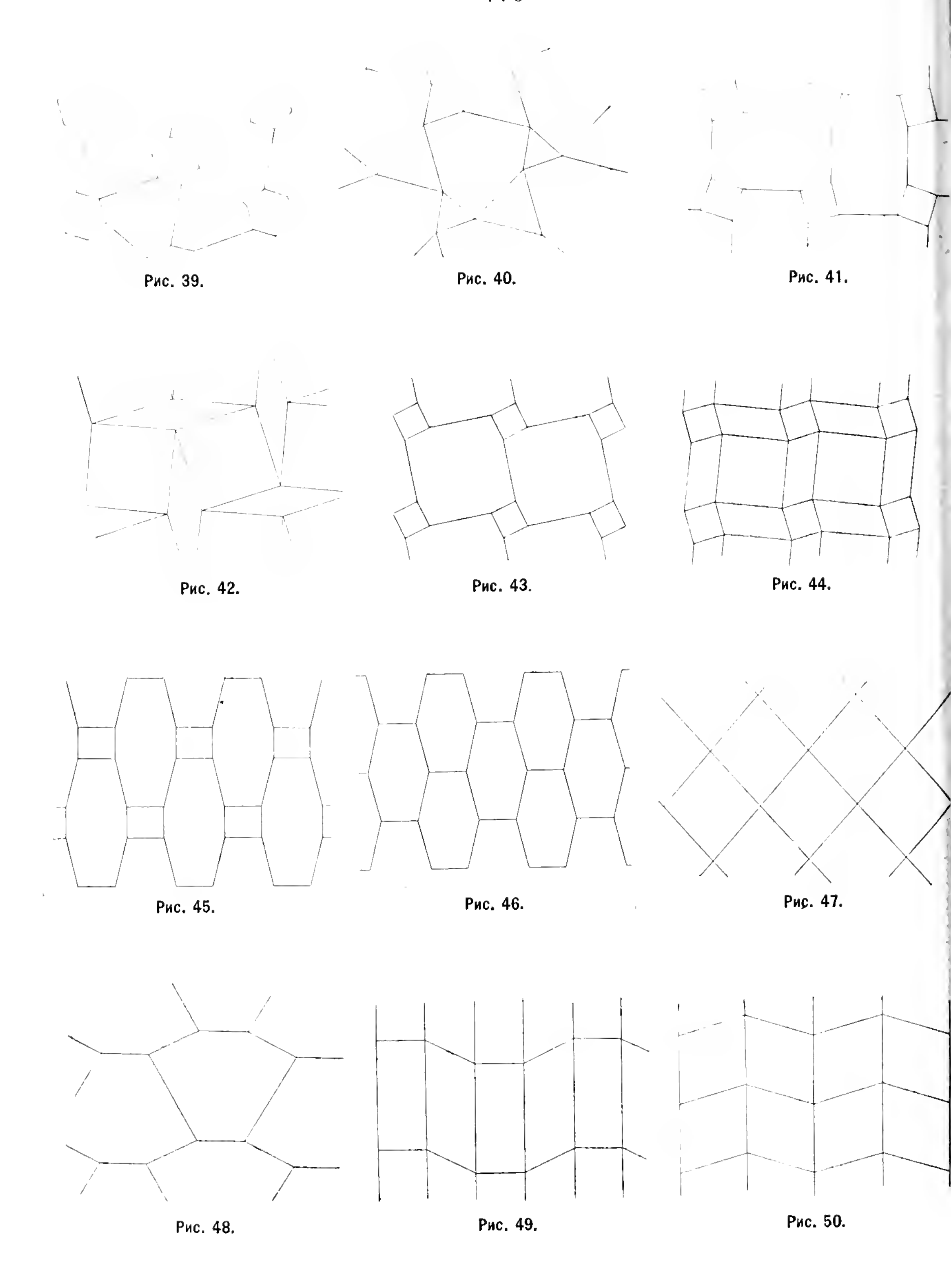


Рис. 39. Рис. 40. Рис. 41.

Рис. 42. Рис. 43. Рис. 44.

Рис. 45. Рис. 46. Рис. 47.

Рис. 48. Рис. 49. Рис. 50.

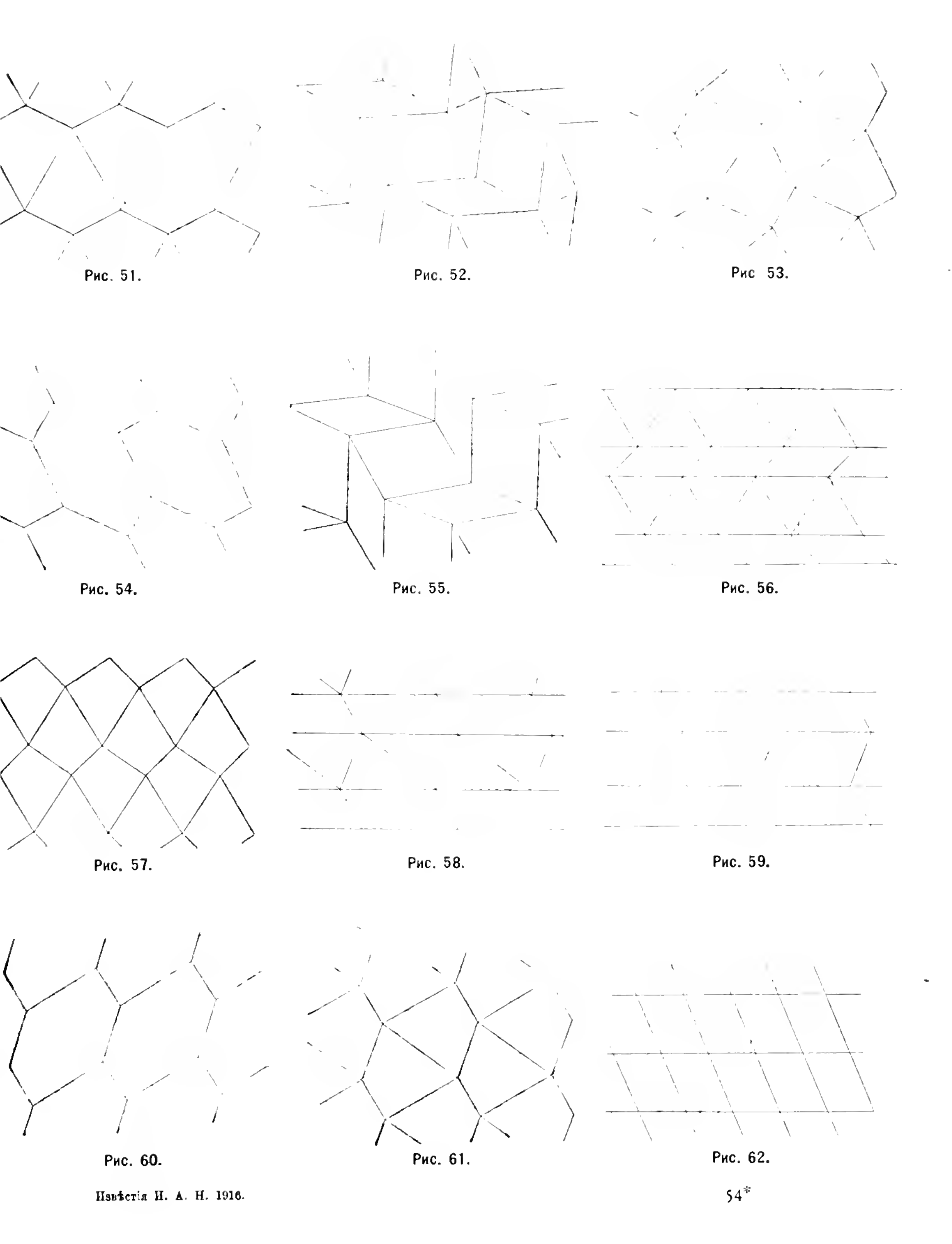


Рис. 51. Рис. 52. Рис 53.

Рис. 54. Рис. 55. Рис. 56.

Рис. 57. Рис. 58. Рис. 59.

Рис. 60. Рис. 61. Рис. 62.

Классъ M_4. Не отличается отъ R_7.

Классъ M_5. Изъ неполныхъ системъ этому классу удовлетворяетъ только рис. 62.

Всѣ неполныя системы сведены въ таблицѣ IX.

Таблица IX.

Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.	Классъ.	№№ рѣшеній.	Формула.	Рисунокъ.
H_1	—	—	—	R_4	8	IV_1	53
H_2	7	$VI_1\ IV_3\ III_3$	38	»	4	VI_1	54
»	4	$VI_1\ VI_2$	39	»	8	$IV_1\ IV_1$	55
H_3	—	—	—	»	10	$IV_1\ III_2$	56
H_4	—	—	—	»	8	IV_1	57
H_5	5	$VI_1\ III_2\ III_3$	40	»	8	IV_1	51
T_1	—	—	—	»	4	VI_1	46
T_2	3	$VIII_1\ IV_1$	41	»	8	IV_1	47
»	8	$IV_1\ IV_1$	42	M_1	4	VI_1	46
T_3	3	$VIII_1\ IV_1$	43	»	8	IV_1	47
»	8	$IV_1\ IV_1\ IV_2$	44	M_2	—	—	—
R_1	3	$VIII_1\ IV_1$	45	M_3	10	$IV_1\ III_2$	58
»	4	VI_1	46	»	8	$IV_1\ IV_1$	59
»	8	IV_1	47	»	4	VI_1	60
R_2	—	—	—	»	8	IV_1	61
R_3	4	VI_1	48	»	8	IV_1	62
»	8	$IV_1\ IV_1$	49	M_4	10	$IV_1\ III_2$	58
»	8	IV_1	50	»	8	$IV_1\ IV_1$	59
»	8	IV_1	51	»	4	VI_1	60
»	4	VI_1	46	»	8	IV_1	61
»	8	IV_1	47	»	8	IV_1	62
R_4	10	$IV_1\ III_2$	52	M_5	8	IV_1	62

Заключеніе. До самаго послѣдняго времени на кристаллы смотрѣли, какъ на совокупность правильно расположеняыхъ молекулъ. Въ связи съ такимъ представленіемъ стали изучать правильныя системы точекъ. Если мы припишемъ каждой молекулѣ (точкѣ правильной системы) опредѣленную сферу дѣйствія, то придемъ къ задачѣ о дѣленіи пространства или плоскости на равныя части — стереоэдры или планигоны. Въ настоящее время подъ вліяніемъ работъ о прохожденіи рентгеновскихъ лучей черезъ кристаллы такой взглядъ на кристаллы подвергается сомнѣнію. Согласно этимъ работамъ на кристаллы смотрятъ, какъ на совокупность атомовъ не соединенныхъ въ молекулы. Если мы припишемъ теперь различнаго рода атомамъ (или ихъ группамъ) различныя сферы вліянія, то придемъ къ той задачѣ, которая нами поставлена въ введеніи. Рѣшеніе этой задачи для плоскости

составляло главный предметъ этой статьи. Ту же задачу для пространства я думаю рѣшить послѣ. Если на кристаллы можно смотрѣть какъ на системы стереоатомовъ, то грани ихъ можно разсматривать какъ системы планатомовъ полныя или неполныя. Послѣднее утвержденіе ждетъ, конечно, своего экспериментальнаго подтвержденія.

Работа сдѣлана въ кристаллографической лабораторіи университета Шанявскаго въ Москвѣ.

5 октября 1915 г.
Любимовскій постъ.

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ 1—15 мая 1916 года).

42) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 8, 1 мая. Стр. 555—672. 1916. lex. 8°.—1616 экз.

43) **Ежегодникъ Зоологическаго Музея Императорской Академіи Наукъ.** (Annuaire du Musée Zoologique de l'Académie Impériale des Sciences de Petrograd). 1915. Томъ XX, № 4. Съ 1 таблицей, 2 картами и 100 рис. въ текстѣ (XII+I+457—640+I+LIX—CXXX+II стр.+обложка къ XX тому). 1916. 8°.—665 экз.

44) **Фауна Россіи и сопредѣльныхъ странъ,** преимущественно по коллекціямъ Зоологическаго Музея Императорской Академіи Наукъ. Подъ редакціею Директора Музея Акад. Н. В. Насонова. Пресмыкающіяся (*Reptilia*). Томъ II. А. М. Никольскій. Ophidia. Съ 8 таблицами и 64 рисунками въ текстѣ (II+III+350 стр.). 1916. 8°.—900 экз.

Цѣна 1 руб. 50 коп.; 1 rbl. 50 cop.

45) **Наставленія для собиранія зоологическихъ коллекцій.** издаваемыя Зоологическимъ Музеемъ Императорской Академіи Наукъ. I. Инструкція для собиранія млекопитающихъ. Составили старшій зоологъ А. А. Бялыницкій-Бируля и старшій препараторъ С. К. Приходко. Третье изданіе (II+30+II стр.). 1916. 8°.—315 экз. Въ продажу не поступаетъ.

46) **Отчеты о дѣятельности Комиссіи по изученію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи** состоящей при Императорской Академіи Наукъ. 1916. № 3 (I+39—62 стр.). 1916. lex. 8°.—515 экз.

Въ продажу не поступаетъ.

47) **Списокъ личнаго состава** Императорской Академіи Наукъ и подвѣдомственныхъ ей учрежденій на 1916 г. Исправленъ по 1-е марта 1916 г. (I+80 стр.). 1916. б. 8°.—300+50 вел. экз. Въ продажу не поступаетъ.

48) **Христіанскій Востокъ.** Годъ 4-й. 1915. Серія, посвященная изученію христіанской культуры народовъ Азіи и Африки. Томъ IV, выпускъ III (стр. 229—319+титулъ, оглавленіе и сокращенія къ IV тому+табл. XI—XXIV). 1916. б. 8°.—516 экз.

Цѣна 1 руб. 35 коп.; 1 rbl. 35 cop.

49) **Сборникъ Отдѣленія Русскаго языка и словесности Императорской Академіи Наукъ.** Томъ XCIV, № 4 и послѣдній. Матеріалы для этнографіи Херсонской губерніи. Собралъ И. В. Бессараба (VI+568 стр.+титулъ и оглавленіе къ XCIV тому). 1916. 8°.—665 экз. Цѣна 4 руб.; 4 rbl.

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Май 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).

1916. № 10.

ИЗВѢСТІЯ

ИМПЕРАТОРСКОЙ АКАДЕМІИ НАУКЪ.

VI СЕРІЯ.

1 ІЮНЯ.

BULLETIN

DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES.

VI SÉRIE.

1 JUIN.

ПЕТРОГРАДЪ. — PETROGRAD.

ПРАВИЛА

для изданія „Извѣстій Императорской Академіи Наукъ".

---

§ 1.

„Извѣстія Императорской Академіи Наукъ" (VI серія)—„Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences" (VI Série) — выходятъ два раза въ мѣсяцъ, 1-го и 15-го числа, съ 15-го января по 15-ое іюня и съ 15-го сентября по 15-ое декабря, объемомъ примѣрно не свыше 80-ти листовъ въ годъ, въ принятомъ Конференціею форматѣ, въ количествѣ 1600 экземпляровъ, подъ редакціей Непремѣннаго Секретаря Академіи.

§ 2.

Въ „Извѣстіяхъ" помѣщаются: 1) извлеченія изъ протоколовъ засѣданій; 2) краткія, а также и предварительныя сообщенія о научныхъ трудахъ какъ членовъ Академіи, такъ и постороннихъ ученыхъ, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи; 3) статьи, доложенныя въ засѣданіяхъ Академіи.

§ 3.

Сообщенія не могутъ занимать болѣе четырехъ страницъ, статьи — не болѣе тридцати двухъ страницъ.

§ 4.

Сообщенія передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданій, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми необходимыми указаніями для набора; сообщенія на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, сообщенія на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Отвѣтственность за корректуру падаетъ на академика, представившаго сообщеніе; онъ получаетъ двѣ корректуры: одну въ гранкахъ и одну сверстанную; каждая корректура должна быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ трехдневный срокъ; если корректура не возвращена въ указанный трехдневный срокъ, въ „Извѣстіяхъ" помѣщается только заглавіе сообщенія, а печатаніе его отлагается до слѣдующаго нумера „Извѣстій".

Статьи передаются Непремѣнному Секретарю въ день засѣданія, когда онѣ были доложены, окончательно приготовленныя къ печати, со всѣми нужными указаніями для набора; статьи на Русскомъ языкѣ — съ переводомъ заглавія на французскій языкъ, статьи на иностранныхъ языкахъ — съ переводомъ заглавія на Русскій языкъ. Корректура статей, притомъ только первая, посылается авторамъ внѣ Петрограда лишь въ тѣхъ случаяхъ, когда она, по условіямъ почты, можетъ быть возвращена Непремѣнному Секретарю въ недѣльный срокъ; во всѣхъ другихъ случаяхъ чтеніе корректуръ принимаетъ на себя академикъ, представившій статью. Въ Петроградѣ срокъ возвращенія первой корректуры, въ гранкахъ,— семь дней, второй корректуры, сверстанной, — три дня. Въ виду возможности значительнаго накопленія матеріала, статьи появляются, въ порядкѣ поступленія, въ соотвѣтствующихъ нумерахъ „Извѣстій". При печатаніи сообщеній и статей помѣщается указаніе на засѣданіе, въ которомъ онѣ были доложены.

§ 5.

Рисунки и таблицы, могущія, по мнѣнію редактора, задержать выпускъ „Извѣстій", не помѣщаются.

§ 6.

Авторамъ статей и сообщеній выдается по пятидесяти оттисковъ, но безъ отдѣльной пагинаціи. Авторамъ предоставляется за свой счетъ заказывать оттиски сверхъ положенныхъ пятидесяти, при чемъ о заготовкѣ лишнихъ оттисковъ должно быть сообщено при передачѣ рукописи. Членамъ Академіи, если они объ этомъ заявятъ при передачѣ рукописи, выдается сто отдѣльныхъ оттисковъ ихъ сообщеній и статей

§ 7.

„Извѣстія" разсылаются по почтѣ въ день выхода.

§ 8.

„Извѣстія" разсылаются безплатно дѣйствительнымъ членамъ Академіи, почетнымъ членамъ, членамъ-корреспондентамъ и учрежденіямъ и лицамъ по особому списку, утвержденному и дополняемому Общимъ Собраніемъ Академіи.

§ 9.

На „Извѣстія" принимается подписка въ Книжномъ Складѣ Академіи Наукъ и у коммиссіонеровъ Академіи; цѣна за годъ (2 тома — 18 №№) безъ пересылки 10 рублей; за пересылку, сверхъ того,— 2 рубля.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.

(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

ИЗВЛЕЧЕНІЯ

ИЗЪ ПРОТОКОЛОВЪ ЗАСѢДАНІЙ АКАДЕМІИ.

ОБЩЕЕ СОБРАНІЕ.

IV засѣданіе, 2 апрѣля 1916 года.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что 23 марта въ 2 ч. 10 мин. дня скончался въ Петроградѣ на 65 году отъ рожденія ординарный академикъ Максимъ Максимовичъ Ковалевскій.

Доложены телеграммы, полученныя Академіею по поводу кончины академика М. М. Ковалевскаго:

1) «Глубоко скорблю по дорогомъ Максимѣ Максимовичѣ.

Профессоръ Линниченко».

2) «Общество распространенія образованія среди горцевъ Терской области глубоко сожалѣетъ о смерти выдающагося ученаго и гражданина М. М. Ковалевскаго.

Предсѣдатель генералъ Кусовъ».

Память покойнаго почтена вставаніемъ. Некрологъ покойнаго будетъ составленъ академикомъ П. Г. Виноградовымъ и прочитанъ въ одномъ изъ слѣдующихъ засѣданій Общаго Собранія.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что 10 марта въ Петроградѣ скончался на 79 году жизни почетный членъ Академіи (съ 29 декабря 1880 года) Андрей Александровичъ Сабуровъ.

Память покойнаго почтена вставаніемъ.

Министръ Народнаго Просвѣщенія отношеніемъ отъ 3 марта за № 2546 сообщилъ:

«Вслѣдствіе отношенія Императорской Академіи Наукъ отъ 13 минувшаго февраля за № 367 имѣю честь препроводить при семъ, для приведенія въ дѣйствіе, утвержденный мною, на основаніи ст. 118^5 т. XIV Св. Зак. уст. пред. прест. изд. 1912 г., уставъ «Русскаго Ботаническаго Общества».

«При этомъ считаю долгомъ добавить, что единственное отличіе настоящаго устава отъ доставленнаго Академіею проекта заключается во внесенной, въ видѣ особаго примѣчанія, оговоркѣ о необходимости соблюденія обществомъ соотвѣтствующихъ узаконеній при осуществленіи его ученыхъ предпріятій (напр. устройствѣ съѣздовъ и публичныхъ лекцій, учрежденіи курсовъ, изданіи трудовъ)».

Положено принять къ свѣдѣнію и сообщить академику И. П. Бородину, а уставъ Общества, утвержденный Министромъ Народнаго Просвѣщенія, напечатать въ приложеніи къ настоящему протоколу.

Министръ Народнаго Просвѣщенія циркулярнымъ отношеніемъ отъ 9 февраля за № 2753 сообщилъ:

«Императорское Россійское Генеральное Консульство въ Лондонѣ передало Министерству Народнаго Просвѣщенія ходатайство Лондонскаго университета (King's College) о содѣйствіи къ безвозмездному доставленію школѣ для изученія славянскихъ языковъ (School of Slavonic Studies) при названномъ университетѣ, въ виду намѣченнаго ею устройства спеціальной славянской библіотеки, изданій русскихъ ученыхъ учрежденій и обществъ, а также дублетовъ изъ ихъ книжныхъ собраній содержанія филологическаго, литературнаго и историко-политическаго.

«Великобританскій Посолъ въ Петроградѣ, въ свою очередь поддерживаетъ настоящее ходатайство, предложивъ услуги Посольства въ дѣлѣ пересылки школѣ жертвуемыхъ ей книгъ.

«Сообщая объ изложенномъ и выражая надежду, что Императорская Академія Наукъ широко пойдетъ навстрѣчу просьбѣ Посланника дружественной Россіи державы, покорнѣйше прошу о послѣдующихъ рѣшеніяхъ Академіи по сему предмету меня увѣдомить, съ препровожденіемъ списка уступаемыхъ для упомянутой библіотеки изданій.

«При этомъ считаю долгомъ добавить, что послѣднія могутъ быть направлены Академіею непосредственно въ Канцелярію Великобританскаго Посольства».

Положено выслать просимыя изданія, предварительно пославъ каталогъ изданій Академіи съ просьбою прислать списокъ желаемыхъ изданій.

Прокуроръ Петроградскаго Окружнаго Суда отношеніемъ отъ 12 марта за № 3765 сообщилъ:

«Препровождая при семъ на основаніи 1091 ст. Зак. Гр. (Св. Зак. т. X, ч. I, изд. 1900 года) выписку изъ утвержденнаго Петроградскимъ Окружнымъ Судомъ

16 сентября 1915 года домашняго духовнаго завѣщанія умершаго 22 іюня 1914 года члена Государственнаго Совѣта, дѣйствительнаго тайнаго совѣтника, потомственнаго дворянина Владиміра Павловича Череванскаго имѣю честь увѣдомить Императорскую Академію, что душеприказчикъ по означенному завѣщанію начальникъ Ардебшевскаго отряда (въ Персіи) генералъ-маіоръ Александръ Ѳедоровичъ Боковъ проживаетъ въ м. «Астара» Бакинской губерніи».

«Выписка изъ домашняго духовнаго завѣщанія В. П. Череванскаго.

«. . . . XXV) на уплату пошлинъ съ завѣщанныхъ суммъ, а равно на расходы по приведенію сего завѣщанія въ исполненіе ассигную десять тысячъ рублей; XXVI) Душеприказчикомъ прошу быть полковника Пограничной Стражи Александра Ѳедоровича Бокова, который и имѣетъ получить въ безотчетное распоряженіе означенныхъ въ предыдущемъ пунктѣ десять тысячъ рублей. По реализаціи $^0/_0$ бумагъ, а также по продажѣ имущества и по смерти О. М. Улѣевой (п. VI сего завѣщанія) окажется несомнѣнно превышеніе въ вырученныхъ суммахъ противъ вышеприведенныхъ назначеній, а потому прошу душеприказчика употребить сей излишекъ по слѣдующему: . . . . XXXVIII) Коллекцію монетъ и медалей, за исключеніемъ золотыхъ, передать въ Академію Наукъ.

«Вѣрно:

«За Секретаря при Прокурорѣ Петроградскаго Окружнаго Суда (подпись неразборчива)».

Положено снестись съ душеприказчикомъ, принять отписанные по завѣщанію предметы, передать ихъ въ Нумизматическій Кабинетъ Академіи и сообщить Правленію для свѣдѣнія.

Императорскій Московскій и Румянцовскій Музей, предполагая ходатайствовать о дарованіи пенсіи вольнотрудящимся въ Музеѣ, запросилъ Академію отношеніемъ отъ 14 марта за № 343, пользуются ли какими-либо правами на пенсіи вольнотрудящіеся Императорской Академіи Наукъ.

Непремѣнный Секретарь доложилъ по этому поводу, что крайне желательно было бы просить Правленіе возбудить передъ Правительствомъ ходатайство о томъ, чтобы правами на пенсію могли пользоваться лица, служащія по вольному найму въ Академіи и ея служителя; желательность и справедливость этого не требуетъ доказательства.

Положено отвѣтить Московскому и Румянцовскому Музею, что въ настоящее время служащія по вольному найму въ Академіи лица не пользуются правами на пенсію, но что ходатайство объ этомъ возбуждается.

Вмѣстѣ съ тѣмъ положено просить Правленіе возбудить соотвѣтствующее ходатайство передъ Правительствомъ.

Непремѣнный Секретарь Французской Академіи Эттьеннъ Лами (E. Lamy) письмами на имя Академіи и Непремѣннаго Секретаря отъ 1 марта н. ст. сообщилъ,

что, по инициативѣ нѣсколькихъ членовъ Французскаго Института, предположено по возможности возстановить послѣ войны сожженную нѣмцами библіотеку университета въ Лувенѣ, и просилъ отъ имени Французской Академіи избрать членовъ Академіи въ Международную Комиссію по этому вопросу.

Положено отвѣтить согласіемъ и принять участіе въ Международной Комиссіи, для чего и избрать по одному члену отъ всѣхъ трехъ Отдѣленій Академіи и разрѣшить Непремѣнному Секретарю вступить въ составъ Комиссіи согласно полученному имъ приглашенію.

Сергѣй Львовичъ Бертенсонъ (Спасская, д. 9) заявленіемъ отъ 30 марта сообщилъ:

«По уполномочію матери моей Ольги Аполлоновны Бертенсонъ и тетки Людмилы Аполлоновны Фрейгангъ, рожденныхъ Скальковскихъ, покорнѣйше прошу Императорскую Академію Наукъ принять отъ меня въ даръ архивы покойныхъ моихъ дѣда — бывшаго члена-корреспондента Императорской Академіи Наукъ, Аполлона Александровича Скальковскаго и дяди — Константина Аполлоновича Скальковскаго, заключающіе въ себѣ дневники А. А. Скальковскаго за 1831—1895 гг., подлинные документы по исторіи Запорожской Сѣчи, а также его служебную переписку и другія бумаги, равно какъ и служебную и дѣловую переписку К. А. Скальковскаго».

Положено принять пожертвованіе, передать его въ Рукописное Отдѣленіе и благодарить жертвователя.

Управляющій дѣлами Комиссіи по постройкѣ памятника Пушкину и Пушкинскаго Дома академикъ Н. А. Котляревскій сообщилъ, что С. Л. Бертенсонъ, по уполномочію матери своей Ольги Аполлоновны Бертенсонъ и тетки Людмилы Аполлоновны Фрейгангъ, рожденныхъ Скальковскихъ, просилъ Пушкинскій Домъ принять отъ него въ даръ литературную и семейную переписку его покойныхъ дѣда — бывшаго члена-корреспондента Императорской Академіи Наукъ Аполлона Александровича Скальковскаго и дяди — Константина Аполлоновича Скальковскаго, состоящую, между прочимъ, изъ писемъ Мельникова-Печерскаго, Бенедиктова, Краевскаго, Шевырева, Плетнева, Надеждина, Никитенко, Полевого, Полонскаго, Случевскаго, Вейнберга, Суворина и мн. др.

Право использованія означенныхъ матеріаловъ онъ желалъ бы сохранить за собою, съ тѣмъ, чтобы къ изученію ихъ желающіе допускались лишь съ его разрѣшенія.

Положено принять пожертвованіе согласно условіямъ жертвователя и благодарить С. Л. Бертенсона.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что по просьбѣ Завѣдующаго Архивомъ Конференціи Б. Л. Модзалевскаго Архивъ Морского Министерства пере-

далъ въ Архивъ Конференціи изъ полученныхъ имъ бумагъ адмирала И. Ѳ. Крузенштерна, бывшаго съ 1806 до 1846 г. почетнымъ членомъ Академіи Наукъ, письма къ Крузенштерну многихъ дѣйствительныхъ и почетныхъ членовъ и членовъ-корреспондентовъ Академіи, какъ-то: Ѳ. П. Аделунга (36 писемъ), К. М. Бэра (20), Ф. И. Круга (147), В. Я. Струве (44), Тилезіуса-фонъ-Тиленау (77), П. И. Кеппена, Э. Коллинса, Г. Лангсдорфа, Р. Ленца, Лерберга, Моргенштерна, Пандера, Е. Паррота (85), Н. И. и П. И. Фусовъ, Штарка, Шуберта, Эрдмана и др., а всего 548 документовъ и 6 брошюръ.

Положено выразить отъ имени Академіи благодарность Общему Архиву Морского Министерства въ лицѣ его Начальника, старшаго лейтенанта Александра Ивановича Лебедева, и Завѣдующему Архивомъ Конференціи Б. Л. Модзалевскому и передать письма въ Архивъ Конференціи, а печатныя брошюры — въ I и II Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ А. А. Шахматовъ читалъ:

«В. П. Науменко принесъ въ даръ Библіотекѣ Императорской Академіи Наукъ цензурный экземпляръ труда Гоголя «Объясненіе Божественной Литургіи» и нѣсколько старопечатныхъ изданій».

Положено пожертвованіе передать въ Рукописное Отдѣленіе и благодарить жертвователя.

Приложеніе къ протоколу IV засѣданія Общаго Собранія Императорской Академіи Наукъ 2 апрѣля 1916 года.

На основаніи ст. 118[5] т. XIV Св. Зак., уст. пред. прест. изд. 1912.

«УТВЕРЖДАЮ».

Министръ Народнаго Просвѣщенія
Гр. Игнатьевъ.

3 марта 1916 года.

Уставъ Русскаго Ботаническаго Общества.

Цѣли и права Общества.

§ 1.

Въ цѣляхъ научнаго объединенія русскихъ ботаниковъ учреждается въ Петроградѣ, при Императорской Академіи Наукъ, Русское Ботаническое Общество.

§ 2.

Задачи Общества:

а) способствовать развитію въ Россіи всѣхъ отраслей ботаники,

б) распространять въ странѣ ботаническія знанія,

в) содѣйствовать изслѣдованію флоры и растительности Россіи.

§ 3.

Для достиженія предположенныхъ цѣлей Общество имѣетъ право въ предѣлахъ Россіи:

а) устраивать періодическія и экстренныя собранія для научныхъ сообщеній и рѣшенія текущихъ дѣлъ,

б) организовать публичныя лекціи, курсы по программамъ, утвержденнымъ Совѣтомъ Общества, и ботаническіе съѣзды,

в) снаряжать и поддерживать экспедиціи и экскурсіи для ученыхъ изслѣдованій и собиранія ботаническаго матеріала,

г) устраивать ботаническія станціи, лабораторіи, музеи, библіотеки и т. п. учрежденія,

д) учреждать постоянныя и временныя комиссіи,

е) печатать свои труды въ видѣ отдѣльныхъ или періодическихъ изданій,

ж) выдавать пособія спеціалистамъ для окончанія предпринятыхъ ими изслѣдованій или сочиненій,

з) предлагать задачи, учреждать денежныя преміи, выдавать медали.

Примѣчаніе. Указанныя въ настоящемъ параграфѣ ученыя предпріятія осуществляются Обществомъ съ соблюденіемъ существующихъ на сей предметъ узаконеній.

§ 4.

Общество имѣетъ печать съ надписью: «Русское Ботаническое Общество».

Составъ Общества, права и обязанности его членовъ.

§ 5.

Общество состоитъ изъ дѣйствительныхъ и почетныхъ членовъ и членовъ-сотрудниковъ. Число членовъ неограничено. Учредителями Общества считаются члены Ботаническаго Съѣзда въ Петроградѣ 1915 года, подписавшіе проектъ устава. Они входятъ въ число дѣйствительныхъ членовъ Общества.

§ 6.

Въ дѣйствительные члены Общества избираются русскіе и иностранные ботаники, по письменному предложенію трехъ дѣйствительныхъ или почетныхъ членовъ. Заявленія подаются президенту. Баллотировка производится въ ближайшемъ собраніи Общества.

§ 7.

Дѣйствительные члены, живущіе въ Петроградѣ и его окрестностяхъ, вносятъ въ кассу Общества 10 руб. ежегодно, а иногородніе 8 руб. въ годъ. Тѣ и другіе получаютъ всѣ изданія Общества. Дѣйствительные члены, внесшіе единовременно 100 рублей, считаются пожизненными членами Общества.

§ 8.

Дѣйствительные члены Общества, не уплатившіе до 1-го марта текущаго года своего членскаго взноса, не получаютъ изданій Общества и, въ случаѣ неуплаты членскаго взноса въ теченіе двухъ лѣтъ, исключаются изъ списка членовъ. Эти лица вновь могутъ поступить въ число членовъ, если сдѣлаютъ членскій взносъ за текущій годъ. Исключеніе члена по другимъ причинамъ, кромѣ неуплаты членскаго взноса, можетъ быть про-

изведено лишь въ годичномъ собраніи, по предложенію не менѣе шести членовъ, закрытой баллотировкой, большинствомъ не менѣе трехъ четвертей присутствующихъ членовъ.

§ 9.

Дѣйствительные члены избираются простымъ большинствомъ голосовъ.

§ 10.

Почетные члены и должностныя лица Общества освобождаются отъ взносовъ и получаютъ всѣ изданія безплатно.

§ 11.

Въ почетные члены избираются: а) выдающіеся русскіе и иностранные ученые, а также б) лица, содѣйствовавшія развитію ботаники въ Россіи или оказавшія важныя услуги Обществу. Они избираются тѣмъ же порядкомъ, какъ и дѣйствительные, и имѣютъ одинаковыя съ ними права.

§ 12.

Почетные и дѣйствительные члены Общества участвуютъ въ занятіяхъ его и пользуются въ рѣшеніяхъ Общества правомъ голоса.

§ 13.

Въ члены-сотрудники избираются лица, содѣйствующія цѣлямъ Общества доставленіемъ свѣдѣній, собираніемъ для Общества коллекцій или инымъ какимъ-либо способомъ. Они не пользуются правомъ голоса при рѣшеніи дѣлъ Общества, но могутъ присутствовать въ собраніяхъ и имѣютъ совѣщательный голосъ. Они не вносятъ членской платы. Избраніе въ члены-сотрудники производится тѣмъ же порядкомъ, какъ и въ дѣйствительные члены.

§ 14.

Всѣ члены Общества имѣютъ право пользоваться его коллекціями и библіотекой на основаніи правилъ, утвержденныхъ Совѣтомъ Общества.

§ 15.

Во главѣ Общества стоятъ: почетный президентъ, избираемый пожизненно, и президентъ, избираемый на три года. Если присутствуетъ почетный президентъ, онъ является предсѣдателемъ собранія.

Собранія Общества.

§ 16.

Собранія Общества бываютъ очередныя, годичныя, чрезвычайныя и экстренныя.

§ 17.

На годичномъ собраніи, которое можетъ продолжаться нѣсколько дней, выслушиваются научныя сообщенія, а также разсматриваются и утверждаются отчеты секретаря и казначея и планъ дѣятельности Общества на предстоящій годъ.

§ 18.

Черезъ каждые три года созывается чрезвычайное собраніе для рѣшенія особо важныхъ и новыхъ вопросовъ, связанныхъ съ дѣятельностью Общества, для выслушанія и утвержденія отчетовъ за истекшій періодъ и для выборовъ должностныхъ лицъ. На чрезвычайномъ собраніи намѣчается мѣсто и время слѣдующаго чрезвычайнаго собранія.

§ 19.

Выборы производятся слѣдующимъ порядкомъ: всѣ присутствующіе въ засѣданіи, съ правомъ голоса, члены предлагаютъ по одному кандидату на каждую должность закрытыми записками, а затѣмъ выборъ въ вышеозначенныя должности производится тѣмъ же порядкомъ изъ трехъ кандидатовъ, получившихъ наибольшее число голосовъ, въ томъ же засѣданіи. Въ случаѣ равенства голосовъ производится перебаллотировка.

Управленіе дѣлами Общества.

§ 20.

Завѣдываніе и управленіе дѣлами Общества принадлежитъ Совѣту. Совѣтъ Общества состоитъ изъ президента, двухъ товарищей президента, членовъ Совѣта, казначея, редакторовъ и главнаго секретаря. Всѣ эти лица избираются на три года чрезвычайнымъ собраніемъ. Кромѣ трехъ членовъ Совѣта и главнаго секретаря, живущихъ въ Петроградѣ, избираются по одному члену Совѣта и по одному секретарю для каждаго крупнаго центра, по опредѣленію чрезвычайнаго собранія.

§ 21.

Собранія Совѣта Общества созываются президентомъ или по требованію трехъ членовъ Совѣта.

§ 22.

Дѣла въ Совѣтѣ рѣшаются простымъ большинствомъ голосовъ. Постановленія Совѣта считаются состоявшимися, если въ засѣданіи участвуютъ не менѣе пяти членовъ. Во всѣхъ важныхъ случаяхъ опрашиваются и иногородніе члены Совѣта, при чемъ неполученіе отвѣта въ мѣсячный срокъ считается за отказъ отъ голосованія.

§ 23.

На обязанности Совѣта лежатъ:

а) разсмотрѣніе предложеній и проектовъ, представляемыхъ на утвержденіе собраній,

б) веденіе отъ имени Общества внѣшнихъ сношеній,

в) составленіе ежегодной смѣты, которая представляется на утвержденіе годичнаго собранія,

г) разрѣшеніе единовременныхъ сверхсмѣтныхъ расходовъ, не превышающихъ суммы, опредѣляемой годичнымъ собраніемъ, при чемъ о каждомъ подобномъ расходѣ докладывается ближайшему годичному собранію,

д) распоряженія о денежныхъ выдачахъ, разрѣшенныхъ годичнымъ собраніемъ, и вообще наблюденіе за правильнымъ расходованіемъ суммъ Общества,

е) завѣдываніе имуществомъ, учрежденіями и изданіями Общества,

ж) выдача шнуровыхъ книгъ, скрѣпленныхъ подписью главнаго секретаря,

з) утвержденіе программъ публичныхъ лекцій,

и) разсмотрѣніе составленныхъ секретаремъ и казначеемъ годовыхъ отчетовъ о дѣятельности Общества,

к) приглашеніе вольнонаемныхъ лицъ и назначеніе имъ вознагражденія, размѣръ котораго опредѣляется заранѣе годичнымъ собраніемъ.

л) исполненіе всѣхъ другихъ порученій собраній.

Средства Общества.

§ 24.

Средства Общества на покрытіе его расходовъ составляютъ:

а) единовременные и годичные членскіе взносы,

б) пособія правительственныхъ и общественныхъ учрежденій,

в) суммы, вырученныя отъ продажи изданій, отъ публичныхъ лекцій или курсовъ и другихъ предпріятій Общества,

г) доходы отъ имуществъ Общества,

д) пожертвованія.

§ 25.

Общество имѣетъ право владѣть движимою и недвижимою собственностью, пріобрѣтаемою путемъ покупки или пожертвованія.

Ревизіонная Комиссія.

§ 26.

Ревизія имущества Общества производится ежегодно комиссіей изъ трехъ дѣйствительныхъ или почетныхъ членовъ Общества, избираемыхъ годичнымъ собраніемъ. Комиссія представляетъ докладъ о ревизіи, по разсмотрѣнію его Совѣтомъ, слѣдующему годичному собранію.

Измѣненіе Устава.

§ 27.

Ходатайства объ измѣненіи устава Общества могутъ быть возбуждаемы только по постановленію чрезвычайнаго собранія послѣ обсужденія предложенныхъ измѣненій Совѣтомъ Общества при участіи иногороднихъ членовъ Совѣта.

Закрытіе Общества.

§ 28.

Въ случаѣ ликвидаціи дѣлъ Общества, имущество его передается Императорской Академіи Наукъ.

Директоръ Департамента Народнаго Просвѣщенія *П. Суринъ.*

Дѣлопроизводитель *В. Исаевъ.*

ОТДѢЛЕНІЕ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХЪ НАУКЪ.

VI засѣданіе, 30 марта 1916 года.

Академикъ О. А. Баклундъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью на англійскомъ языкѣ «On Chandler's Period in the latitude variation. II» (О періодѣ Чандлера въ измѣненіи широты. II).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ М. А. Рыкачевъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія статью Н. А. Булгакова «Магнитныя наблюденія, произведенныя въ Хотинскомъ, Бѣлецкомъ и Сорокскомъ уѣздахъ Бессарабской губ. въ 1914 г.» (Le levé magnétique des districts: Chotin, Beleck, Soroki du gouvernement de Bessarabie executé en 1914) со своимъ введеніемъ.

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Академикъ В. В. Заленскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью М. М. Завадовскаго «Значеніе кислорода въ процессѣ дробленія яицъ *Ascaris megalocephala*» (M. Zavadovskij. Sur la valeur d'oxygène pour la segmentation de l'oeuf d'*Ascaris megalocephala*).

Къ статьѣ приложены 1 рисунокъ и одна графика.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. М. Ляпуновъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью на французскомъ языкѣ: A. Liapounoff (Lïapunov). «Nouvelles considérations relatives à la théorie des figures d'équilibre dérivées des ellipsoïdes dans le cas d'un liquide homogène. Seconde Partie» (А. М. Ляпуновъ. Новыя соображенія, относящіяся къ теоріи производныхъ отъ эллипсоидовъ формъ равновѣсія въ случаѣ однородной жидкости. Вторая часть).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью В. П. Дробова «Новыя растенія для флоры Туркестана» (V. Drobov. Nouvelles plantes du Turkestan).

Къ статьѣ приложены 2 таблицы.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью С. С. Ганешина «*Tragopogon sibiricum* mihi, его географическое распространеніе и отличіе отъ *T. porrifolium* L.» (S. S. Ganešin. *Tragopogon sibiricum* mihi, sa distribution géographique et ses différences de *T. porrifolium* L.).

Къ статьѣ приложены 1 таблица и 1 карточка.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью С. С. Ганешина «Сезонныя расы *Melampyrum nemorosum* L.» (S. S. Ganešin. Les races de saison de *Melampyrum nemorosum* L.).

Къ статьѣ приложены 3 таблицы.

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статью В. Мейснера «Рыбный промыселъ въ Семирѣчьи и его возможное будущее».

Положено напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Академикъ В. И. Вернадскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью О. О. Баклунда «Нѣсколько данныхъ къ познанію острова Уединенія» (H. Backlund. Notes sur l'île Ujedinenije).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью П. Ю. Шмидта «Къ вопросу о корреляціи органовъ въ животномъ организмѣ» (P. Schmidt. Sur la corrélation des organes dans l'organisme animal).

Къ статьѣ приложено 5 рисунковъ (2 на табл. и 3 въ текстѣ).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью С. О. Царевскаго «Пресмыкающіяся

и земноводныя, собранныя В. Я. Лаздинымъ въ Южной и Восточной Бухарѣ и въ с.-в. части Закаспійской области лѣтомъ 1915 года» (S. Carevskij. Reptiles et amphibies, collectionnés par V. J. Lazdin dans la Boukharie méridionale et orientale ainsi que dans la partie n.-e. de la province Transcaspienne en été 1915).

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ И. П. Павловъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью П. П. Лазарева на французскомъ языкѣ: P. Lazarev. «La théorie ionique de l'excitation et les lois de Pflüger» (Іонная теорія возбужденія и законы Пфлюгера).

Къ статьѣ приложенъ чертежъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью на французскомъ языкѣ: W. Stekloff (V. Steklov). «Sur le développement des fonctions arbitraires en séries des polynomes de Tchébychef-Laguerre» (О разложеніи произвольныхъ функцій въ ряды по полиномамъ Чебышева-Лягерра).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Я. В. Успенскаго «О сходимости формулъ механическихъ квадратуръ между безконечными предѣлами» (J. Uspenskij. Sur la convergence de quadratures, dites mécaniques, entre les limites infinies).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью А. А. Рихтера «Къ вопросу о роли добавочныхъ пигментовъ у синезеленыхъ водорослей» (A. A. Richter. Sur le rôle des pigments complémentaires chez les Cyanophycées).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Непремѣнный Секретарь доложилъ о томъ, что отъ академиковъ О. А. Баклунда и А. А. Бѣлопольскаго и члена-корреспондента С. К. Костинскаго поступилъ въ даръ Академіи портретъ академика О. А. Бредихина.

Положено повѣсить портретъ въ Маломъ Конференцъ-залѣ и благодарить жертвователей.

Директоръ Геологическаго и Минералогическаго Музея читалъ:

«На этихъ дняхъ въ Минералогическій Музей поступила большая коллекція минераловъ изъ мѣсторожденія цинковыхъ рудъ на р. Тетюхэ, собранная горнымъ инже-

неромъ Константиномъ Федоровичемъ Егоровымъ. Коллекція заключаетъ столько научно интересныхъ и красивыхъ музейныхъ экземпляровъ, что является цѣннымъ пріобрѣтеніемъ для Музея. Въ виду этого я имѣю честь просить Отдѣленіе выразить благодарность отъ имени Академіи Наукъ горному инженеру К. Ф. Егорову, а также по его представленію штейгеру рудника Анатолію Карповичу Піотровскому за его помощь при сборѣ коллекціи и хлопоты по упаковкѣ и пересылкѣ собранія въ Минералогическій Музей».

Положено благодарить К. Ф. Егорова и А. К. Піотровскаго.

Директоръ Зоологическаго Музея читалъ:

«Имѣю честь доложить о слѣдующемъ. Среди русскихъ озеръ самое замѣчательное, несомнѣнно, Байкальское. По своей величинѣ оно самое большое изъ прѣсноводныхъ озеръ Европы и Азіи и самое глубокое изъ всѣхъ озеръ свѣта. Наибольшая глубина его, какъ извѣстно, доходитъ до 713 саженей. Фауна его въ высшей степени оригинальна. Такъ, напримѣръ, въ немъ водится 33 вида рыбъ, изъ которыхъ 14 эндемичны. Среди нихъ всѣ представители сем. *Cottidae* эндемичны и нѣкоторые изъ нихъ живутъ на глубинахъ до 700 саженей, т. е. болѣе глубоко, чѣмъ какія-либо изъ прѣсноводныхъ рыбъ. Среди рыбъ мы встрѣчаемъ здѣсь голомянку (*Comephorus baikalensis*), глубоководную форму, принадлежащую къ семейству *Comephoridae*. Это семейство встрѣчается только въ Байкалѣ.

«Среди моллюсковъ, по изслѣдованію В. Линдгольма, 90% являются эндемичными для Байкала. Изъ 317 формъ ракообразныхъ изъ сем. *Gammaridae*, по изслѣдованію Стеббинга и Совинскаго, 188 найдены въ Байкалѣ. Въ немъ имѣется большое число формъ ресничатыхъ червей, только тамъ обитающихъ. Среди червей тамъ найдены также *Polychaeta*, живущіе въ морской водѣ или въ прѣсныхъ водоемахъ, недалеко отъ моря. Такимъ образомъ, здѣсь *Polychaeta* представляютъ исключительное явленіе.

«Фауна Байкала содержитъ рядъ очень древнихъ формъ и, по нѣкоторымъ изслѣдованіямъ (Бергъ), остатки верхнетретичной и субтропической прѣсноводной фауны Сибири и, можетъ быть, центральной Азіи. Понятно, что Байкалъ всегда привлекалъ вниманіе русскихъ зоологовъ, но, несмотря на цѣлый рядъ работъ изслѣдователей фауны Байкала, начиная съ Палласа, ее нельзя считать вполнѣ выясненной не только со стороны происхожденія, но и со стороны состава. Достаточно указать, что, несмотря на многочисленныя изслѣдованія сем. *Gammaridae*, въ прошломъ году В. Ч. Дорогостайскимъ найденъ рядъ новыхъ формъ, о которыхъ онъ сообщилъ Академіи въ статьѣ, представленной имъ для напечатанія.

«Кромѣ того, совершенно не выяснено распространеніе животныхъ по зонамъ, и не было сдѣлано сколько нибудь обстоятельныхъ физико-біологическихъ наблюденій. Причина, почему Байкальское озеро до сихъ поръ остается мало изслѣдованнымъ, кроется въ томъ, что изслѣдованія производились недостаточно продолжительное время, а главнымъ образомъ наѣздами, безъ достаточныхъ средствъ, необ-

ходимыхъ для изслѣдованія на большихъ глубинахъ. Необходимо прежде всего устройство на мѣстѣ пункта, оборудованнаго снарядами и судномъ для продолжительныхъ глубоководныхъ изслѣдованій.

«Необходимость устройства станціи на Байкалѣ ясно сознавалась заинтересованными лицами, и я просилъ въ прошломъ году В. Ч. Дорогостайскаго, отправлявшагося для изслѣдованія Байкала, выяснить при его поѣздкѣ на Байкалъ мѣстныя условія для устройства біологической станціи. В. Ч. Дорогостайскій съ большой энергіей и знаніемъ дѣла сдѣлалъ это и между прочимъ выяснилъ возможность получить зданіе для помѣщенія станціи. Имъ совмѣстно съ проф. Л. С. Бергомъ, однимъ изъ изслѣдователей Байкала, и проф. С. А. Зерновымъ, бывшимъ завѣдующимъ Севастопольской Біологической Станціей, составляется подробный докладъ объ устройствѣ станціи, и, кромѣ того, мною получено отъ Н. А. Второва прилагаемое при этомъ письмо на имя директора Зоологическаго Музея Императорской Академіи Наукъ съ сообщеніемъ о пожертвованіи имъ на пріобрѣтеніе судна и предварительныя изысканія 16000 рублей.

«Сообщая объ этомъ, имѣю честь просить разрѣшить внести эту сумму въ депозиты и благодарить отъ имени Академіи Н. А. Второва за его щедрый даръ, а также составить Комиссію по вопросу объ устройствѣ біологической станціи на Байкалѣ и мѣрамъ къ ея осуществленію».

«Письмо Николая Александровича Второва на мое имя составлено въ слѣдующихъ выраженіяхъ:

««Узнавъ отъ В. Ч. Дорогостайскаго о возникшемъ намѣреніи учредить при Императорской Академіи Наукъ постоянную біологическую станцію на Байкалѣ и приступить къ планомѣрному изслѣдованію этого озера, имѣю честь препроводить въ Ваше распоряженіе шестнадцать тысячъ (16000) рублей и прошу изъ означенной суммы 12000 рублей употребить на оборудованіе станціи судномъ, приспособленнымъ для научныхъ изслѣдованій, и 4000 рублей на предварительныя изысканія.

««Приложеніе: Переводный билетъ Сибирскаго Торговаго Банка, Московскаго Отдѣленія отъ 26 марта с. г. за № 166484 на сумму 16000 рублей.

««Покорно прошу не отказать мнѣ въ увѣдомленіи о полученіи этого перевода»».

Положено признать крайне желательнымъ устройство Біологической Станціи на Байкалѣ, благодарить Н. А. Второва за пожертвованіе, которое даетъ возможность Академіи приступить къ осуществленію важнаго дѣла основанія Біологической Станціи, и образовать Комиссію изъ академиковъ князя Б. Б. Голицына, В. В. Заленскаго, И. П. Бородина, Н. В. Насонова, Н. И. Андрусова, а также Н. Д. Кузнецова, В. Ч. Дорогостайскаго, Л. С. Берга, С. А. Зернова и В. Н. Сукачева.

Директоръ Зоологическаго Музея представилъ на заключеніе Отдѣленія отношеніе Н. Андреева, присланное Якутскимъ Отдѣломъ Императорскаго Рус-

скаго Географическаго Общества и переданное въ Академію Совѣтомъ Императорскаго Русскаго Географическаго Общества, о найденныхъ имъ близъ села Кутаны костяхъ ископаемаго животнаго. Къ бумагѣ приложенъ планъ мѣстности, въ которой начаты указанныя раскопки.

Положено передать Директору Геологическаго и Минералогическаго Музея для соотвѣтствующихъ сношеній съ Геологическимъ Комитетомъ.

VII засѣданіе, 27 апрѣля 1916 года.

Главное Артиллерійское Управленіе отношеніемъ отъ 26 апрѣля за № 59892 увѣдомило Канцелярію Конференціи, что Высочайшимъ приказомъ 2 апрѣля членъ-корреспондентъ Академіи, докторъ химіи, числящійся по полевой легкой артиллеріи, заслуженный ординарный профессоръ Михайловской Артиллерійской Академіи, начальникъ 6-го отдѣла Артиллерійскаго Комитета при Главномъ Артиллерійскомъ Управленіи и постоянный членъ того же Комитета генералъ-маіоръ Владиміръ Николаевичъ Ипатьевъ утвержденъ въ должности ординарнаго академика Академіи Наукъ, согласно избранію, съ 9 января 1916 года, съ оставленіемъ въ занимаемыхъ имъ по военному вѣдомству должностяхъ.

Положено принять къ свѣдѣнію, увѣдомить академика В. Н. Ипатьева о состоявшемся утвержденіи его и сообщить въ Правленіе для свѣдѣнія.

Высочайшимъ приказомъ по гражданскому вѣдомству отъ 5 апрѣля за № 23 членъ-корреспондентъ Академіи, заслуженный профессоръ Императорскаго Московскаго Университета, докторъ минералогіи и геогнозіи дѣйствительный статскій совѣтникъ Алексѣй Петровичъ Павловъ утвержденъ ординарнымъ академикомъ по геологіи, согласно избранію, съ 9 января 1916 года, съ оставленіемъ заслуженнымъ ординарнымъ профессоромъ Университета.

О состоявшемся утвержденіи А. П. Павлова ординарнымъ академикомъ Непремѣнный Секретарь уже увѣдомилъ А. П. Павлова письмомъ отъ 21 апрѣля за № 837, съ приглашеніемъ пожаловать въ настоящее засѣданіе; въ отвѣтъ на это письмо академикъ А. П. Павловъ сообщилъ, что онъ лишенъ возможности прибыть въ настоящее засѣданіе.

Положено принять къ свѣдѣнію и сообщить въ Правленіе для свѣдѣнія.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ А. П. Карпинскій представилъ Отдѣленію присланную для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью члена-корреспондента А. Р. Бонсдорфа «О точности опредѣленія размѣровъ земли на основаніи Русско-Скандинавскаго градуснаго измѣренія» (A. Bonsdorff. Sur l'exactitude de la définition des dimensions de la Terre).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. П. Карпинскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О новомъ видѣ Helicoprion *(Helicoprion Clerci,* n. sp.). Предварительное сообщеніе» [A. P. Karpinskij. Sur une nouvelle espèce d'Helicoprion *(Helicoprion Clerci,* n. sp.). Note préliminaire].

Къ статьѣ приложено 5 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. А. Марковъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О коэффиціентѣ дисперсіи» (A. A. Markov. Sur le coëfficient de la dispersion).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Объ органогенезѣ *Salpa fusiformis»* (V. V. Zalensky. Sur l'organogenèse de *Salpa fusiformis*).

Къ статьѣ приложены рисунки.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. В. Заленскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью члена-корреспондента Н. М. Кулагина «О строеніи яичника шимпанзе» (N. M. Kulagin. Sur la structure de l'ovaire du chimpanze).

Къ статьѣ приложено 9 рисунковъ.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. А. Бѣлопольскій доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О системѣ α въ Гончихъ Собакахъ» (A. A. Belopol'skij. Sur le système α des Chiens de Chasse).

Къ статьѣ приложена 1 таблица.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. А. Бѣлопольскій представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Н. Н. Донича «Наблюденія спектра кометы Галлея» (N. Donič. Observations du spectre de la comète de Halley).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью С. С. Ганешина «Циклъ формъ *Elymus junceus* Fisch. и ихъ таксономическое значеніе» (S. S. Ganešin. Le cycle des formes d'*Elymus junceus* Fisch. et leur valeur taxonomique).

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Академикъ И. П. Бородинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Ботаническаго Музея» статью А. Э. Юнге «Новый тюльпанъ изъ Крыма *Tulipa koktebelica* mihi sp. n.» (A. E. Junge. Une nouvelle tulipe de la Crimée *Tulipa koktebelica* mihi sp. nova).

Положено напечатать въ «Трудахъ Ботаническаго Музея».

Отъ имени академика В. И. Вернадскаго представлена Отдѣленію для напечатанія въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» статья И. А. Преображенскаго «Мѣсторожденія соединеній молибдена въ Россіи (кромѣ Финляндіи)».

Положено напечатать въ «Матеріалахъ для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи» въ количествѣ 2000 экземпляровъ.

Отъ имени академика В. И. Вернадскаго представлена Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статья Е. Е. Костылевой «Минералы нижней Тунгузки изъ коллекціи Чекановскаго» (E. Kostyleva. Les minéreaux de la Tunguska inférieure).

Къ статьѣ приложена 1 карточка.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Отъ имени академика В. И. Вернадскаго представлена Отдѣленію для напечатанія въ «Трудахъ Радіевой Экспедиціи» статья Л. С. Коловратъ-Червинскаго «О выраженіи въ абсолютной мѣрѣ количествъ радія, измѣренныхъ по способу эманаціи» (L. Kolovrat-Červinskij. Sur la réduction aux valeurs absolues des quantités de radium mesurées par la méthode de l'émanation).

Къ статьѣ приложено 3 рисунка.

Положено напечатать въ «Трудахъ Радіевой Экспедиціи».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея» статью Вл. Шнитникова «Къ географическому распространенію песчанаго суслика (*Spermophilopsis leptodactylus* Licht.)» (Vl. Šnitnikov. Contributions à la distribution géographique du *Spermophilopsis leptodactylus* Licht.).

Положено напечатать въ «Ежегодникѣ Зоологическаго Музея».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ серіи «Фауна Россіи» статью А. Никольскаго «Земноводныя» [A. Nikolsky (Nikolĭskij). Amphibies].

Къ статьѣ приложены рисунки и 5 таблицъ.

Положено напечатать въ «Фаунѣ Россіи».

Академикъ Н. В. Насоновъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Л. С. Берга «О распространеніи рыбы *Myoxocephalus quadricornis* (L.) изъ сем. *Cottidae* и о связанныхъ съ этимъ вопросахъ» (L. S. Berg. Sur la distribution du poisson *Myoxocephalus quadricornis* (L.), fam. *Cottidae*, et sur quelques problèmes y concernants).

Къ статьѣ приложены 2 рисунка и 3 карты.

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Отъ имени академика И. П. Павлова представлена Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статья Александра Палладина «Вліяніе углеводнаго и бѣлковаго голоданія на выдѣленіе креатина и креатинина» (A. Palladin. L'influence du jeûne des hydrates de carbone et du jeûne d'azote sur l'éxcretion de la créatine et de la créatinine).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью Я. В. Успенскаго «О разложеніи функцій въ ряды по полиномамъ $e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{n^{x p}}$» (J. Uspenskij. Sur le développement des fonctions en séries procédant suivant les polynomes $e^x \frac{d^n x^n e^{-x}}{dx^n}$).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. А. Стекловъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ. Остаточный членъ формулъ механическихъ квадратуръ. (Сообщеніе второе)» [W. Stekloff (V. Steklov). Sur le calcul approché des intégrales définies à l'aide des quadratures dites mécaniques. Terme complémentaire des formules des quadratures. II.].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью С. П. Костычева «О спиртовомъ броженіи. VIII». [S. Kostytschev (Kostyčev). Sur la fermentation alcoolique. VIII].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи статью С. П. Костычева «О спиртовомъ броженіи. IX». [S. Kostytschev (Kostyčev). Sur la fermentation alcoolique. IX].

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ В. И. Палладинъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Глюкуроновая кислота, глюкурониды и гли-

оксилевая кислота въ растеніяхъ. I. Историческій очеркъ и методы изслѣдованія» (V. Palladin. Sur l'acide glucuronique, les glucuronides et l'acide glyoxylique dans les plantes. I. Historique et méthodique).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Вице-Президентъ въ качествѣ Предсѣдателя Постоянной Полярной Комиссіи сообщилъ Отдѣленію, что Комиссія въ засѣданіи 26 апрѣля, — заслушавъ докладъ начальника Главнаго Гидрографическаго Управленія генерала М. Е. Жданко о радіостанціи на островѣ Диксона, которая была предположена къ закрытію, но вслѣдствіе ходатайствъ, возбужденныхъ Постоянной Полярной Комиссіей, нынѣ сохранена и будетъ продолжать свои работы уже въ вѣдѣніи Морского Министерства, на что вѣдомствомъ испрошены особыя средства, — постановила обратиться къ Императорской Академіи Наукъ съ просьбою выразить Морскому Министру благодарность отъ имени Конференціи Императорской Академіи Наукъ за его просвѣщенное содѣйствіе въ дѣлѣ сохраненія радіостанціи на островѣ Диксона, имѣющей громадное научное значеніе, особенно въ виду того значительнаго расширенія программы ея работы, которое предположено вѣдомствомъ, а также и практическое — для нуждъ сѣвернаго мореплаванія, которое въ настоящее время пріобрѣтаетъ для Россіи особое значеніе.

Положено выразить Морскому Министру благодарность.

Вице-Президентъ въ качествѣ Предсѣдателя Постоянной Полярной Комиссіи сообщилъ Отдѣленію, что Комиссія въ засѣданіи 26 апрѣля постановила избрать членомъ Комиссіи Завѣдующаго гидро-метеорологической частью Министерства Торговли и Промышленности Вартана Алексѣевича Пастакова и просить Конференцію Академіи объ его утвержденіи.

Положено утвердить постановленіе Комиссіи и сообщить В. А. Пастакову объ утвержденіи его членомъ Комиссіи.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ А. Н. Карпинскій сообщилъ, что отъ Предсѣдателя Комиссіи по изслѣдованію естественныхъ производительныхъ силъ Россіи академика В. И. Вернадскаго отъ 9 апрѣля за № 240 поступило на имя Непремѣннаго Секретаря слѣдующее письмо:

«Въ засѣданіи Комиссіи отъ 4 апрѣля 1916 года обсуждался въ связи съ докладами В. К. Бражникова вопросъ о состояніи рыбнаго хозяйства и рыбныхъ запасовъ въ Россіи. Въ результатѣ обмѣна мнѣній состоялось единогласное постановленіе Комиссіи обратиться къ Академіи Наукъ съ просьбой довести до свѣдѣнія г. Министра Земледѣлія мнѣніе Комиссіи по поводу идущихъ въ обществѣ сужденій и появляющихся въ печати ходатайствъ отдѣльныхъ лицъ и учрежденій выйти изъ настоящаго затрудненія путемъ облегченія строгихъ нормъ охраны улова рыбы, какъ, напримѣръ, продленіе срока дозволеннаго времени улова.

«Комиссія полагаетъ, что на первомъ мѣстѣ и въ настоящій моментъ должно стоять всяческое охраненіе нашихъ природныхъ національныхъ богатствъ, кои отнюдь не должны быть разрушаемы для выхода изъ затруднительныхъ обстоятельствъ текущаго момента. Та временная выгода, которая будетъ получена (если даже будетъ получена, что неясно) ослабленіемъ правилъ охраны ни въ коемъ случаѣ не окупитъ того огромнаго вреда, который нанесется, напримѣръ, нашему главному Каспійскому рыболовству продленіемъ сроковъ улова въ маѣ мѣсяцѣ за предѣлы указанныхъ въ пожеланіяхъ Государственной Думы пяти дней. Этимъ путемъ можно нарушить на долго и, можетъ быть, даже на очень долго только что установившуюся охрану нашего сельдяного богатства.

«Прошу, по постановленію Совѣта Комиссіи, направить это мнѣніе Комиссіи г. Министру Земледѣлія въ спѣшномъ порядкѣ, не ожидая засѣданія Академіи, ибо только на дняхъ состоялось постановленіе Петроградской Городской Думы противуположнаго характера, и вопросъ идетъ о продленіи сроковъ позже начала мая».

За Непремѣннаго Секретаря академикъ А. П. Карпинскій доложилъ, что, въ виду спѣшности дѣла, Непремѣннымъ Секретаремъ 13 апрѣля за № 782 было сдѣлано сношеніе съ Министромъ Земледѣлія.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ Н. В. Насоновъ читалъ записку, подписанную почетнымъ членомъ Академіи Д. Н. Анучинымъ и другими:

«Озеро Байкалъ представляетъ въ сѣверномъ полушаріи, несомнѣнно, самый своеобразный бассейнъ какъ съ физической и біологической стороны, такъ равно и по исторіи своего происхожденія. Издавна онъ привлекаетъ вниманіе изслѣдователей, и научное основаніе нашего познанія Байкала было положено уже академическими экспедиціями знаменитаго Палласа и Георги. Съ тѣхъ поръ Байкалъ изучался неоднократно: Б. И. Дыбовскимъ, И. Д. Черскимъ, А. В. Вознесенскимъ, Ф. К. Дриженко, А. А. Коротневымъ, В. А. Обручевымъ и многими другими. Несмотря на то, что этими естествоиспытателями собранъ весьма обширный матеріалъ, обработанный частью ими самими, частью цѣлымъ рядомъ спеціалистовъ, нельзя сказать, чтобы физическая географія и біологія этого бассейна были изучены съ достаточной полнотой: каждая зоологическая экспедиція, даже небольшая, приноситъ все еще цѣлый рядъ новыхъ формъ. Между тѣмъ изслѣдованіе Байкала представляетъ національную задачу русскихъ ученыхъ. Мы должны знать Байкалъ не хуже, чѣмъ, напримѣръ, швейцарцы свое Женевское озеро. Это сознаніе проникло уже въ широкіе круги, и нижеподписавшимся извѣстно, что однимъ изъ сибиряковъ переведено на имя Директора Зоологическаго Музея Императорской Академіи Наукъ сумма въ 16000 руб. на дѣло изслѣдованія Байкала. Необходимо планомѣрное изученіе Байкала. Поэтому мы позволяемъ себѣ обратиться въ Отдѣленіе Физико-Математическихъ наукъ Императорской Академіи Наукъ, не будетъ ли признано возможнымъ учредить при Академіи Комиссію для обсужденія вопросовъ о всестороннемъ

изслѣдованіи Байкала. Задачи проектируемой Комиссіи, мы полагали бы, должны заключаться:

1) въ выработкѣ спеціальной программы изслѣдованія,

2) снаряженіи экспедиціи для изслѣдованія Байкала,

3) учрежденіи біологической станціи на Байкалѣ.

Почетный членъ Императорской Академіи Наукъ, заслуженный профессоръ Московскаго Университета Д. Н. Анучинъ.

Заслуженный профессоръ Московскаго Университета А. Павловъ.

Ординарный профессоръ Московскаго Университета А. Н. Сѣверцовъ.

Ординарный профессоръ Московскаго Университета Григорій Кожевниковъ.

Ординарный профессоръ Н. Богоявленскій.

Докторъ зоологіи В. Елпатьевскій.

Профессоръ Московскаго Сельскохозяйственнаго Института Як. Самойловъ.

Членъ-корреспондентъ Императорской Академіи Наукъ, проф. Н. Кулагинъ.

Профессоръ Л. Бергъ.

Профессоръ С. Зерновъ.

Ѳедоръ Спичаковъ.

В. Обручевъ.

Ординарный профессоръ Московскаго Университета М. Голенкинъ.

Приватъ-доцентъ Московскаго Университета А. Курнаковъ.

В. Дорогостайскій».

Положено поручить Временной Комиссіи, образованной для обсужденія вопроса о Байкальской біологической станціи, поставить и другіе вопросы, затронутые въ настоящей запискѣ, и запросить подписавшихъ, не пожелаютъ ли они принять участіе въ работахъ Комиссіи, и предоставить Комиссіи право кооптаціи новыхъ членовъ.

ОТДѢЛЕНІЕ РУССКАГО ЯЗЫКА И СЛОВЕСНОСТИ.

III засѣданіе, 5 марта 1916 года.

Вр. и. о. Управляющаго Дворомъ въ Бозѣ почившаго Е. И. В. Великаго Князя Константина Константиновича прислалъ слѣдующее отношеніе на имя Предсѣдательствующаго: «По порученію Ея Императорскаго Высочества Великой Княгини Елисаветы Маврикіевны при семъ имѣю честь препроводить къ Вашему Превосходительству статью «К. Р.» — «*Недовѣріе къ солдату*» — съ Собственноручною надписью Великаго Князя Константина Константиновича: «Желаю, чтобы послѣ моей смерти эта статья была напечатана въ собраніи моихъ сочиненій. Константинъ. Павловскъ. 11 января 1914».

Положено присоединить эту статью къ сосредоточенному въ Рукописномъ Отдѣленіи литературному наслѣдію въ Бозѣ почившаго Великаго Князя Константина Константиновича.

IV засѣданіе, 19 марта 1916 года.

Акад. Н. П. Кондаковъ просилъ разрѣшить выпустить отдѣльно въ видѣ оттисковъ двѣ статьи Ѳ. И. Буслаева, дополненныя соотвѣтствующими снимками: 1) рецензію на трудъ Віоле-ле-Дюка и 2) рецензію на трудъ В. В. Стасова.

Положено выпустить эти статьи въ 300 экземплярахъ.

V засѣданіе, 2 апрѣля 1916 года.

Доложенъ отзывъ проф. И. М. Эндзелина о трудѣ Э. Я. Блессе: «Описаніе зельбургскаго (латышскаго) говора».

Положено помѣстить статью г. Блессе въ Сборникѣ по внесеніи въ нее указанныхъ проф. Эндзелиномъ исправленій.

Проф. Е. Ф. Шмурло представилъ для напечатанія свой трудъ: «Словарь мѣстныхъ словъ и выраженій, собранныхъ въ Кинельской, Таловской и Карасинской областяхъ Челябинскаго уѣзда Оренбургской губерніи».

Положено помѣстить его въ Сборникѣ Отдѣленія съ діалектологическими матеріалами; рукопись теперь же направить въ Типографію, о чемъ и извѣстить г. Шмурло.

Рукопись статьи В. Н. Добровольскаго: «Преданія и языкъ крестьянъ с. Выбути Псковскаго уѣзда» положено напечатать въ Сборникѣ Отдѣленія съ діалектологическими матеріалами.

Проф. Б. М. Ляпуновъ представилъ для набора въ изданіи Памятниковъ старославянскаго языка трудъ Ф. Каминскаго: «Три отрывка Евангельскихъ чтеній, именуемые Купріяновскими (Новгородскими)».

Положено передать рукопись Ф. Каминскаго въ Типографію.

Организаціонный Комитетъ Лермонтовскаго Кавказскаго Музея обратился въ Академію Наукъ въ Разрядъ изящной словесности съ просьбой о денежной поддержкѣ и о высылкѣ ему изданій и снимковъ съ рукописей Лермонтова.

Положезо передать записку Организаціоннаго Комитета въ Разрядъ изящной словесности, а вмѣстѣ съ тѣмъ просить акад. Н. А. Котляревскаго о высылкѣ теперь же въ Лермонтовскій Кавказскій Музей одного экземпляра академическаго изданія Сочиненій Лермонтова.

ОТДѢЛЕНІЕ ИСТОРИЧЕСКИХЪ НАУКЪ И ФИЛОЛОГІИ.

VI засѣданіе, 23 марта 1916 года.

Редакція журнала «The Asiatic Review» прислала въ Академію, при письмѣ отъ 14 марта н. ст., 2 экземпляра номера, посвященнаго Россіи — «Russia number» (vol. VII. № 22; 15 февраля 1916 г.).

Положено благодарить редакцію и передать одинъ экземпляръ книги въ Азіатскій Музей, а другой — въ Архивъ Войны.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи представилъ къ напечатанію Путеводитель по Музею Антропологіи и Этнографіи, выпускъ V, Отдѣлъ Сѣверной Америки, составленный С. А. Штернбергъ.

Положено напечатать, какъ прежніе выпуски каталога Музея.

Директоръ Музея Антропологіи и Этнографіи читалъ:

«Въ настоящее время закончeнъ печатаніемъ III томъ Сборника Музея Антропологіи и Этнографіи и печатается томъ IV того же Сборника. Теперь представляю къ печатанію статьи для V тома:

И. И. Зарубинъ. По долинѣ Бартанга.

С. Е. Маловъ. Шаманство у сартовъ Восточнаго Туркестана.

С. Ѳ. Ольденбургъ. Краткія замѣтки о перихонахъ въ Кучарѣ.

С. М. Дудинъ. Техника живописи и скульптуры древнихъ пещеръ Восточнаго Туркестана.

М. М. Михайловская. Корельскіе заговоры, примѣты и заплачки.

А. И. Ивановъ. Элементы китайскаго орнамента.

Б. Э. Петри. Орнаментъ кудинскихъ бурятъ.

Л. Я. Штернбергъ. Идея избранничества у гольдскихъ шамановъ.

Л. Я. Штернбергъ. Колесница съ птицей на крайнемъ сѣверѣ Сибири.

И. А. Виташевскій. Изъ наблюденій надъ шаманскими дѣйствіями якутскихъ шамановъ.

Е. Л. Петри. Изъ музейныхъ уникъ. Двѣ таблички съ письменами съ острова Пасхи.

Г. Г. Манизеръ. Замѣтки о музыкѣ у индѣйцевъ Южной Америки.

К. К. Гильзенъ. Человѣческая голова какъ военный трофей племени Мандуруку.

В. М. Лемешевскій. Палеолитическія коллекціи изъ Тверской губерніи.

К. З. Яцута. Лезгинскіе черепа изъ Антропологическаго Отдѣла.

Извлеченія изъ писемъ командированныхъ лицъ.

«Смѣты по рисункамъ къ отдѣльнымъ статьямъ представлю дополнительно».

Положено напечатать въ «Сборникѣ Музея Антропологіи и Этнографіи», томъ V.

Академикъ В. В. Радловъ представилъ просмотрѣнный имъ отзывъ Н. Ашмарина о рукописи Н. Н. Юркина «Народное творчество чувашъ». Указавъ на нѣкоторые недостатки труда, требующіе тщательнаго пересмотра рукописи передъ сдачею ея въ печать, академикъ В. В. Радловъ считаетъ тѣмъ не менѣе желательнымъ издать его какъ первый томъ серіи «Образцы народной словесности чувашъ», при чемъ наблюденіе надъ печатаніемъ онъ беретъ на себя вмѣстѣ съ г. Ашмаринымъ.

Положено по пересмотрѣ рукописи Н. Н. Юркина печатать ее какъ первый томъ серіи «Образцы народной словесности чувашъ», въ форматѣ и числѣ экземпляровъ серіи «Образцы народной словесности якутовъ»; отзывъ Н. Ашмарина сохранить при протокольныхъ бумагахъ.

Вмѣстѣ съ тѣмъ признано желательнымъ ходатайствовать о командированіи г. Ашмарина въ Петроградъ и просить академика В. В. Радлова выяснить лично у Министра Народнаго Просвѣщенія возможность такой командировки.

Академикъ П. К. Коковцовъ читалъ:

«Къ заканчиваемому мною нынѣ печатаніемъ II тому моихъ изслѣдованій «Къ исторіи средневѣковой еврейской филологіи» я считалъ бы необходимымъ приложить два факсимиле важнѣйшихъ изъ открытыхъ мною въ теченіе ряда послѣднихъ лѣтъ и изданныхъ въ упомянутомъ томѣ рукописныхъ еврейско-арабскихъ текстовъ, а именно: 1) факсимиле одной страницы изъ Kitāb al-Istiġnā Самуила Нагида въ рук. № 2896 II собранія Фирковича и 2) факсимиле одной страницы изъ рукописи nov. 169 того же собранія, содержащей новые отрывки изъ Kitāb al-Muwāzana Исаака Ибнъ-Баруна. Изготовленіе соотвѣтствующихъ фототипическихъ таблицъ, въ количествѣ 300 экземпляровъ каждая, по предварительной смѣтѣ, составленной для меня Художественной фототипіей А. Ф. Дресслера, обойдется приблизительно въ 30 рублей. Я имѣю честь просить Отдѣленіе ассигновать мнѣ эту сумму изъ средствъ, имѣющихся въ распоряженіи Академіи».

Положено разрѣшить, о чемъ сообщить академику П. К. Коковцову.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«По отпечатаніи моего «Доклада о научной дѣятельности нѣкоторыхъ губернскихъ ученыхъ архивныхъ комиссій по ихъ отчетамъ преимущественно за 1911 —

1914 гг.» я считалъ бы полезнымъ разослать его: Министру Внутреннихъ Дѣлъ и Министру Торговли и Промышленности, а также Директору Петроградскаго Археологическаго Института и всѣмъ тѣмъ лицамъ, которыя поименованы въ IV главѣ вышеназваннаго доклада».

При этомъ академикъ Ѳ. И. Успенскій указалъ, что послѣ введенія новаго Устава Губернскихъ Ученыхъ Архивныхъ Комиссій онѣ болѣе уже не доставляютъ своихъ отчетовъ Императорскому Археологическому Институту.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій указалъ на то, что по Высочайше утвержденному Положенію 1884 г. Комиссіи обязаны представлять свои отчеты Археологическому Институту.

При обсужденіи вопроса о Губернскихъ Ученыхъ Архивныхъ Комиссіяхъ былъ затронутъ и вопросъ объ охранѣ памятниковъ старины, при чемъ признано желательнымъ выяснить отношеніе Академіи къ подготовляемому законопроекту.

Положено: 1) просить Постоянную Историческую Комиссію представить свои соображенія по этому предмету, 2) согласно просьбѣ академика А. С. Лаппо-Данилевскаго разослать его «Докладъ» указаннымъ имъ лицамъ, о чемъ сообщить въ Книжный Складъ для исполненія.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Постоянная Историческая Комиссія проситъ академика Ѳ. И. Успенскаго вступить въ число ея членовъ».

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ П. К. Коковцовъ читалъ:

«Разсмотрѣвъ переданную мнѣ, по постановленію Отдѣленія, фотографію греко-финикійской bilinguis, найденной на Родосѣ, я имѣю честь сообщить по этому предмету нижеслѣдующее:

«Сравнительно съ греческимъ текстомъ надписи, отъ котораго уцѣлѣли только послѣднія буквы двухъ строкъ, — я читаю Σ.ΜΑ въ предпослѣдней строкѣ и ΡΙΟΝ въ послѣдней, — финикійскій текстъ сохранился почти въ цѣлости. Онъ состоитъ изъ двухъ строкъ финикійскаго письма обычнаго сидонскаго типа, которыя читаются въ еврейской транскрипціи такъ:

בעלמלך בן מלכיתן
מקם אלם מתרח עשתרני בן [צר]

«Ба́алмилкъ сынъ Милкіатона,

. . . . бога, ... Астарт. . . ., сына [Сӯра]».

«Оставленный безъ перевода загадочный составной титулъ (*m-q-m elīm m-t-r-ḥ aštar-n-j*), первая половина котораго (*m-q-m elīm*) встрѣчается также отдѣльно въ надписяхъ (C. I. S., I, №№ 227 и 262), извѣстенъ изъ другихъ, исключительно, впрочемъ, карѳагенскихъ надписей (см. C. I. S., I, №№ 260 и 261, и Lidz-

barski, Ephemeris, II, стр. 172 сл.). Въ немъ ясно одно только слово *elīm* «богъ» (pluralis въ значеніи singularis), и отчасти прозрачно слово ʿ*aštar-n-j*, въ которомъ скрывается какое-то производное отъ имени знаменитой финикійской богини. Этимологизируя, можно было бы, пожалуй, получить для всѣхъ четырехъ словъ смыслъ: «ставленника божія, странника Астарты». Что̀ собственно означаютъ оба званія, остается пока, къ сожалѣнію, непонятнымъ. Въ кароагенскихъ надписяхъ они сопровождаютъ вмѣстѣ, а первое и въ отдѣльности, имена высшихъ сановниковъ свѣтской и духовной іерархіи.

«По своему содержанію надпись принадлежитъ, повидимому, къ ex-voto, которыми такъ изобилуетъ финикійская и въ особенности пуническая эпиграфика. Отъ шаблоннаго типа финикійскихъ ex-voto наша надпись отличается, впрочемъ, отсутствіемъ имени божества, которому посвящается приношеніе, и самой формулы посвященія (אש נדר . . . . כ שמע קלא ברכא). Такъ какъ, судя по словамъ А. Д. Калмыкова, доставившаго фотографію нашей надписи Академіи, она найдена была на предполагаемомъ мѣстѣ храма Зевса Атабирійскаго, то можно считать весьма вѣроятнымъ, что божествомъ, къ которому относится надпись Баʿалмилка, было соотвѣтствующее финикійское божество, искони почитавшееся на Атабирійской горѣ на Родосѣ, т. е. «владыка Табӯра» (Baʿal Tabūr, или пожалуй вѣрнѣе, судя по греческой формѣ Ἀταβύριος, — Baʿal ha-Tabūr).

«По времени надпись можно было бы отнести къ III или II вѣку до Р. Х.

«Не сообщая по существу ничего безусловно новаго, наша надпись представляетъ тѣмъ не менѣе несомнѣнный интересъ и по своему происхожденію, какъ первая финикійская надпись, открытая на Родосѣ, и по употребленію въ ней своеобразныхъ званій, встрѣчавшихся пока только въ кароагенскихъ надписяхъ».

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Для начала регистраціонной археологической работы въ предѣлахъ древней армянской области Таронъ и вообще во вновь занятыхъ нами малоазійскихъ земляхъ въ направленіи «Мушъ—Битлисъ» командируемому нами старшему хранителю Археологическаго Отдѣла Кавказскаго Музея С. В. Теръ-Аветисьяну переведены мною ассигнованныя средства. Руководствоваться ему предложено четырьмя первыми пунктами программы командировки его въ Ванскій округъ, предпринятой въ интересахъ сохраненія древностей халдскихъ съ клинообразными надписями, христіанскихъ армянскихъ и мусульманскихъ, съ присоединеніемъ къ этой программѣ двухъ новыхъ пунктовъ, пятаго и шестого:

«V. Тщательная регистрація также возможныхъ въ новомъ районѣ остатковъ древнехристіанскаго и вообще христіанскаго строительства, въ частности и пещернаго, а также хеттскихъ и иныхъ древневосточныхъ эпиграфическихъ или архитектурныхъ памятниковъ и собраніе по нимъ свѣдѣній.

«VI. Пріобрѣтеніе появляющихся въ продажѣ предметовъ древности халдской, хетской, христіанской и мусульманской, а также рукописей христіанскихъ и мусульманскихъ на сумму въ предѣлахъ 2000 руб., испрашиваемыхъ Императорской Академіею Наукъ на сей предметъ».

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Священникъ Арсеній Оніани письмомъ отъ 9 марта изъ Сваніи сообщаетъ о своей работѣ по записыванію сванскихъ текстовъ. Ведя записи непрерывно съ 1 октября прошлаго года, онъ имѣлъ возможность наблюсти поразительныя и для него, природнаго свана, выросшаго въ сванской средѣ, лексическія новости — большое количество новыхъ сванскихъ словъ и разнообразіе ихъ значеній. Въ связи съ этимъ, независимо отъ связныхъ разсказовъ, памятниковъ сванской народной словесности, онъ собралъ отдѣльныя слова съ фразами, въ которыхъ они встрѣчаются. Этотъ лексическій матеріалъ о. Арсеній предлагаетъ внести въ мой Сванскій словарь. Мнѣ кажется, что необходимо поддержать столь исключительнаго по ревности собирателя матеріаловъ сванскаго языка.

VII засѣданіе, 20 апрѣля 1916 года.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ М. А. Дьяконовъ доложилъ, что 25 марта въ Кіевѣ на 78 году отъ рожденія скончался членъ-корреспондентъ по разряду историко-политическихъ наукъ (съ 29 декабря 1903 года) Михаилъ Флегонтовичъ Владимірскій-Будановъ.

Память покойнаго почтена вставаніемъ. Академикъ М. А. Дьяконовъ читалъ некрологъ покойнаго, который положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Секретарь Императорскаго Русскаго Географическаго Общества письмомъ отъ 4 апрѣля за № 1515 на имя Непремѣннаго Секретаря увѣдомилъ, что согласно постановленію Совѣта отъ 28 марта коллекцію тибетскихъ вещей, пожертвованную г. Дорджіевымъ Обществу, признано желательнымъ передать Этнографическому Музею Императорской Академіи Наукъ, и просилъ сдѣлать зависящее распоряженіе о пріемѣ означенной коллекціи по представленному имъ списку.

Непремѣнный Секретарь доложилъ, что указанныя въ письмѣ вещи приняты Музеемъ Антропологіи и Этнографіи и благодарность Совѣту Общества послана 14 апрѣля за № 796.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій представилъ Отдѣленію составленную подъ его наблюденіемъ А. И. Андреевымъ, С. Н. Валкомъ, М. Ѳ. Злотниковымъ, В. Н. Куномъ и А. А. Шиловымъ работу: «Описаніе Сборни-

ковъ актовъ Троице-Сергіевой Лавры», вып. I, о которомъ академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій уже докладывалъ Отдѣленію (П. 37), для напечатанія отдѣльнымъ изданіемъ, формата «Памятниковъ Русскаго Законодательства», въ числѣ 650 экземпляровъ.

Положено напечатать отдѣльнымъ изданіемъ.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Закончилась печатаніемъ наиболѣе для насъ нужная часть грузинской библіографіи, именно отдѣлы лингвистики, этнографіи, археологіи съ палеографіею и эпиграфикой, исторіи политической и церковной, народной словесности и древней литературы. Часть эта составлена къ статьямъ и матеріаламъ на грузинскомъ языкѣ спеціально въ грузинской періодической печати; предстоитъ исполнить часть такого же указателя къ грузинскимъ работамъ отдѣльными изданіями. Подобная же работа стоитъ на очереди для арменистическихъ трудовъ и статей на армянскомъ языкѣ. Bibliographia Caucasica et Transcaucasica Міансарова (С.-Пб. 1874—1876), менѣе всего считающаяся съ научной литературой на мѣстныхъ языкахъ, помимо устарѣлости, мало используетъ періодическую печать. Bibliographie Arménienne, трудъ на армянскомъ языкѣ венеціанскихъ мхитаристовъ (Венеція, 1883), касается отдѣльныхъ армянскихъ изданій. Объ арменистическихъ работахъ въ армянскихъ журналахъ (значительно менѣе о работахъ, помѣщенныхъ въ газетахъ) можно освѣдомляться въ историко-библіографическихъ обзорахъ армянской періодической печати, появлявшихся въ Вѣнѣ и на Кавказѣ въ связи съ ея столѣтіемъ въ 1894 году, какъ, напр., въ работѣ о. Григорія В. Галэмкаріяка — *Պատմութիւն հայ լրագրութեան ի սկզբանէ մինչեւ մեր ժամանակը* (т. 1-й, Вѣна 1893). Касательно арменистическихъ работъ въ русскихъ журналахъ и газетахъ не существуетъ справочнаго труда. Потому я для начала дѣла нахожу полезнымъ и предлагаю издать какъ особую книгу тщательно составленный трудъ Манушакъ Богдановны Богданіанъ подъ заглавіемъ: «Армяне и Арменія въ русской періодической печати XIX-го вѣка». Трудъ составленъ при содѣйствіи покойнаго Г. А. Эзова, дяди автора. Въ немъ журналы и газеты расположены въ алфавитномъ порядкѣ, статьи же, въ нихъ помѣщенныя, приведены въ хронологическомъ порядкѣ по времени ихъ напечатанія. Всѣ статьи послѣдовательно перенумерованы, а въ приложенномъ оглавленіи журналовъ и газетъ указано, отъ котораго до котораго нумера заключается статья въ томъ или другомъ изданіи. Для удобства пользованія приложенъ алфавитный указатель какъ собственныхъ именъ, упоминаемыхъ въ заголовкахъ статей, такъ и именъ авторовъ таковыхъ, при чемъ въ тѣхъ случаяхъ, когда статьи были подписаны нѣсколькими инициалами, онѣ вносились по послѣднему. Уже это приложеніе въ извѣстной мѣрѣ возмѣщаетъ отсутствіе предметнаго указателя. Но имѣется еще указатель съ группировкой статей по предметамъ, какъ-то: армянскій вопросъ, армянская грамматика, исторія Арменіи, армянская литература, праздники, церковно-приходскія школы, надписи «анійскія, ванскія и клино-

образныя», преданія, обычаи и т. п. Эта часть требуетъ переработки и восполненія, но такой пересмотръ можетъ быть сдѣланъ по напечатаніи всей остальной части. Авторъ не скрываетъ, что въ трудѣ должны оказаться пробѣлы: многими изданіями нельзя было воспользоваться; «пробѣлы были неизбѣжны особенно потому, — пишетъ г-жа Богданіанъ, — что свѣдѣнія объ армянахъ и Арменіи находятся въ такихъ статьяхъ, по заглавіямъ которыхъ трудно предполагать въ нихъ эти свѣдѣнія, и потому отъ насъ они могли ускользнуть».

«Въ этотъ библіографическій трудъ вошли статьи, числомъ 2586, находящіяся въ 248 періодическихъ изданіяхъ.

«Желательно издать въ такомъ же форматѣ, какой принятъ для грузинской библіографіи, и въ томъ же числѣ экземпляровъ».

Положено напечатать трудъ г-жи Богданіанъ отдѣльнымъ изданіемъ въ форматѣ грузинской библіографіи въ числѣ 600 экземпляровъ.

Академикъ В. В. Бартольдъ представилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Запискахъ» Отдѣленія работу члена-корреспондента Н. И. Веселовскаго «Ханъ изъ темниковъ Золотой Орды — Ногай и его время» (N. I. Veselovskij. Noghaï, général de la Horde d'Or devenu khan, et son temps).

Положено напечатать въ «Запискахъ» Отдѣленія.

Директоръ Азіатскаго Музея читалъ:

«Имѣю честь донести, что за послѣднее время Азіатскій Музей обогатился слѣдующими приношеніями:

«а) Отъ Императорской Россійской Миссіи въ Пекинѣ (отношеніе отъ 24 февраля за № 290):

«Сборникъ историческихъ матеріаловъ по происходившимъ за послѣдніе годы въ Китаѣ политическимъ преобразованіямъ:

«1) За 1908 г. Конституціонныя мѣропріятія. — 2) За 1910 г. Подготовительныя мѣры къ конституціи и разныя реформы. — 3) За 1910 г. Конституціонная Палата и открытіе парламента. — 4) За 1910 г. Конституціонныя реформы и мѣропріятія. — 5) Палата представителей. — 6) Революція 1912 г. — 7) Революція въ Китаѣ. — 8) Внутренняя политика. — 9) 1910 г. Революціонное движеніе. — 10) Революція 1913 г. — 11) Революціонное движеніе 1911 г. Неурожаи и голодъ.

«Означенные матеріалы, состоящіе изъ сдѣланныхъ чинами драгоманата Миссіи газетныхъ вырѣзокъ и переводовъ изъ китайскихъ газетъ, занесены въ Инвентарь за № 406 и слѣд.

«б) Отъ Индійскаго Правительства:

«1) Census of India. 1911. I. Reports. II. Tables. Calc. 1913 fol. 2) R. W. Russell. The tribes and castes of the Central Provinces of India. I—IV. London, 1916. (Инв. №№ 48 и 364).

«Кромѣ того пріобрѣтены у В. А. Иванова за уплаченные изъ аванса 54 руб. 10 мусульманскихъ рукописей и 10 индійскихъ литографій, занесенныя въ Инвентарь за №№ 23—42».

Положено принять къ свѣдѣнію и выразить глубокую благодарность Императорской Россійской Духовной Миссіи въ Пекинѣ за щедрый даръ.

Академикъ В. В. Радловъ доложилъ, что Министръ Народнаго Просвѣщенія утвердилъ командировку Н. Ашмарина, о которой академикъ В. В. Радловъ ходатайствовалъ по постановленію Отдѣленія.

Положено принять къ свѣдѣнію.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Въ средѣ Историческаго Общества при Петроградскомъ Университетѣ возникла мысль о желательности издать собраніе бумагъ, сочиненій и писемъ гр. М. М. Сперанскаго, частью еще ненапечатанныхъ, частью появившихся въ самыхъ разнообразныхъ изданіяхъ, далеко не всегда снабженныхъ, однако, научно-критическимъ аппаратомъ: Секція Русской Исторіи, въ засѣданіи своемъ 30 марта, избрала Комиссію для обсужденія плана и способовъ осуществленія такого изданія. Въ составъ Комиссіи вошли: Н. А. Бычковъ, А. В. Васильевъ, князь Н. В. Голицынъ, А. А. Корниловъ, баронъ С. А. Корфъ, А. С. Лаппо-Данилевскій, баронъ А. Э. Нольде, С. В. Рождественскій и В. И. Семевскій. Комиссія, состоящая подъ предсѣдательствомъ А. С. Лаппо-Данилевскаго, уже имѣла два засѣданія, на которыхъ она, согласно даннымъ ей полномочіямъ, кооптировала въ свой составъ еще барона Б. Э. Нольде и В. Н. Строева, а также выяснила ходъ подготовительныхъ работъ, послѣ которыхъ возможно будетъ окончательно установить планъ изданія. Комиссія полагаетъ, что прежде всего желательно было бы напечатать недавно найденную въ Государственномъ Архивѣ опись бумагъ М. М. Сперанскаго, составленную при его ссылкѣ въ 1812 г., и опись его бумагъ, произведенную послѣ его смерти въ 1839 г. и хранимую въ Императорской Публичной Библіотекѣ, а также приступить къ составленію описи бумагъ гр. М. М. Сперанскаго, находящихся нынѣ въ разныхъ архивахъ, и библіографическаго обозрѣнія изданныхъ его трудовъ и тѣхъ сочиненій (книгъ, статей и т. п.), которыя спеціально касаются его біографіи или дѣятельности.

«Въ виду того, что потребность въ научно-критическомъ изданіи собранія бумагъ, сочиненій и писемъ гр. М. М. Сперанскаго давно уже назрѣла, Комиссія, согласно даннымъ ей отъ Историческаго Общества при Петроградскомъ Университетѣ полномочіямъ, поручила мнѣ просить Императорскую Академію Наукъ, не сочтетъ ли она возможнымъ содѣйствовать осуществленію вышеназваннаго изданія, тѣмъ болѣе своевременнаго, что къ 1 января 1922 года наступитъ полуторастолѣтній юбилей со дня рожденія М. М. Сперанскаго».

Положено оказать возможное содѣйствіе къ осуществленію предположеннаго изданія.

Академикъ Ѳ. И. Успенскій представилъ въ даръ Академіи I томъ своего труда «Исторія Византійской Имперіи». С.-Петербургъ.

Вице-Президентъ выразилъ отъ имени Отдѣленія благодарность академику Ѳ. И. Успенскому.

Положено книгу передать въ I Отдѣленіе Библіотеки.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Археологическія работы по Ани приняли такой затяжной характеръ и стали такъ разнообразны, что, какъ легко будетъ видѣть по сданному уже въ печать отчету за прошлый годъ (съ XIV-й лѣтней кампаніею), можно думать, что ихъ ведетъ цѣлое учрежденіе съ постояннымъ кадромъ работниковъ. Въ извѣстной мѣрѣ это такъ и есть фактически. Существуетъ Анійскій Музей древностей, и ежегодно работаютъ то старые, то вновь приглашаемые сотрудники, не только лѣтомъ на мѣстѣ, но и далѣе круглый годъ въ Петроградѣ, по разработкѣ добытыхъ матеріаловъ и вновь выдвигаемыхъ ими вопросовъ. Субсидія, отпускаемая Академіи Наукъ изъ государственнаго казначейства на анійскія археологическія работы, въ цѣляхъ поддержать ихъ до момента учрежденія Кавказскаго Археологическаго Института, я предполагаю, можетъ въ суммѣ 600 руб. въ годъ расходоваться для нѣкотораго облегченія моего труда, становящагося черезчуръ обременительнымъ, путемъ привлеченія постояннаго помощника по анійскимъ археологическимъ работамъ. Какъ на желательнаго помощника я могъ бы указать на доктора философіи Г. Н. Чубинова (Doctor philosophiae et AA. LL. magistri). Окончивъ въ 1905 году гимназическое отдѣленіе Училища при Реформатскихъ церквахъ, съ лѣтняго семестра 1907 года онъ былъ студентомъ философскаго факультета въ Лейпцигскомъ Университетѣ въ теченіе одиннадцати семестровъ. Рядомъ съ этнографіею онъ велъ свои занятія по исторіи искусства, слушая лекціи и участвуя въ семинаріяхъ по графикѣ, средневѣковому искусству, обзору эволюціи христіанскаго искусства до VIII вѣка и болѣе позднимъ западноевропейскимъ искусствамъ различныхъ эпохъ. Въ 1912 году по представленіи докторской диссертаціи имъ сданъ экзаменъ въ Галле по философіи и психологіи, по исторіи искусства и по землевѣдѣнію, главнымъ образомъ этнографіи. По возвращеніи на родину, въ Петроградъ, онъ сталъ изучать армянскій и грузинскій языки, продолжая заниматься искусствомъ у нашихъ спеціалистовъ, преимущественно у Я. И. Смирнова. Въ прошломъ году я привлекъ его на практическія занятія въ Ани, и онъ оказался полезнымъ сотрудникомъ и въ качествѣ работника по музею, и въ качествѣ исполнителя порученныхъ ему научныхъ наблюденій на мѣстѣ и спеціальныхъ мелкихъ изслѣдованій очередныхъ вопросовъ по кавказской археологіи въ Петроградѣ. Если предложеніе мое пріемлемо, я просилъ бы Конференцію, разрѣшивъ мнѣ использовать 600 руб. въ годъ — изъ анійской субсидіи въ 3000 руб. — для приглашенія въ помощники по тѣмъ же работамъ Г. Н. Чубинова.

Положено разрѣшить пригласить въ помощь академику Н. Я. Марру Г. Н. Чубинова, о чемъ сообщить въ Правленіе для исполненія.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій доложилъ, что Псковская Губернская Архивная Коммиссія избрала его своимъ почетнымъ членомъ.

Положено принять къ свѣдѣнію и сообщить въ Правленіе для внесенія въ формулярный о службѣ академика А. С. Лаппо-Данилевскаго списокъ.

VIII засѣданіе, 4 мая 1916 года.

За Непремѣннаго Секретаря академикъ М. А. Дьяконовъ доложилъ, что 15 апрѣля н. ст. скончался въ Парижѣ на 83 году отъ рожденія членъ-корреспондентъ Академіи по разряду восточной словесности (съ 29 декабря 1902 г.) Огюстъ Бартъ (Auguste Barth).

Въ связи съ этимъ академикъ М. А. Дьяконовъ доложилъ письмо члена-корреспондента Э. Сенара отъ 19 апрѣля н. ст.:

«Au nom des amis de Monsieur Auguste Barth, j'ai la douleur, conformément aux instructions laissées par lui, de vous faire part de sa mort survenue le 15 de ce mois. Je suis certain que vous apprécierez l'étendue de nos regrets.

«Veuillez me croire, Monsieur, bien tristement à Vous.

Ernest Senart».

Память покойнаго почтена вставаніемъ.

Некрологъ покойнаго будетъ читать академикъ С. Ѳ. Ольденбургъ въ одномъ изъ слѣдующихъ засѣданій Отдѣленія.

Положено выразить соболѣзнованіе черезъ члена-корреспондента Э. Сенара.

Академикъ В. В. Бартольдъ доложилъ Отдѣленію для напечатанія въ «Извѣстіяхъ» Академіи свою статью «Греко-бактрійское государство и его распространеніе на сѣверо-востокъ» (V. V. Barthold. Le royaume grecque de la Bactriane et son extension du côté du nord-est).

Положено напечатать въ «Извѣстіяхъ» Академіи.

Академикъ А. С. Лаппо-Данилевскій читалъ:

«Въ виду предпринимаемаго Императорской Академіей Наукъ изданія Собранія трудовъ М. М. Сперанскаго, желательно было бы обратиться къ частнымъ лицамъ, имѣющимъ какія-либо письма, писанныя имъ или къ нему адресованныя, а также бумаги, касающіяся его дѣятельности, или же располагающимъ какими либо свѣдѣніями о таковыхъ, съ просьбою сообщить Академіи точныя указанія о мѣстѣ ихъ храненія и предоставить ей возможность снять надлежащія съ нихъ копіи. Такое обращеніе слѣдовало бы напечатать, кромѣ «Извѣстій» Академіи, и въ другихъ изданіяхъ — главнѣйшихъ газетахъ и журналахъ».

Положено разрѣшить и послать соотвѣтствующія публикаціи въ главнѣйшія газеты и журналы.

Академикъ Н. Я. Марръ читалъ:

«Лѣтняя археологическая кампанія Аніiскаго Музея древностей откроется 1 іюня по данной мною программѣ. Основную очередную задачу, продолженіе регистраціи откопанныхъ архитектурныхъ и эпиграфическихъ памятниковъ, будетъ выполнять помощникъ мой по аніiскимъ работамъ докторъ философіи Г. Н. Чубиновъ. Къ нему техниками приглашены: для архитектурныхъ работъ — Н. М. Токарскій, для фотографическихъ — Арт. А. Вруйръ; первому, въ частности, поручено производство обмѣровъ, изготовленіе чертежей и плановъ, начатыхъ описаніемъ въ прошломъ году многочисленныхъ аніiскихъ пещерныхъ помѣщеній, свыше пятисотъ комплексовъ. Работы будутъ начаты при мнѣ и приняты въ августѣ мною. Прошу выдать удостовѣреніе каждому изъ работниковъ и, сообщивъ губернатору Карской области о составѣ сотрудниковъ, просить его объ оказаніи содѣйствія по примѣру прежнихъ лѣтъ и нынѣшней 13-й аніiской археологической кампаніи».

Положено выдать удостовѣренія отъ Академіи Г. Н. Чубинову, Н. М. Токарскому и А. А. Вруйру и сдѣлать соотвѣтствующее сношеніе съ Карскимъ губернаторомъ.

Академикъ В. В. Бартольдъ читалъ:

«Прошу Отдѣленіе командировать меня на лѣтнее вакаціонное время текущаго года до 1 сентября въ Туркестанъ: 1) для ознакомленія съ нѣкоторыми изъ собраній рукописей, существованіе которыхъ сдѣлалось извѣстнымъ въ послѣдніе годы, 2) для возобновленія научныхъ связей, выясненія общихъ условій научной работы въ Туркестанскомъ краѣ и тѣхъ конкретныхъ научныхъ задачъ, которыя могли бы быть поставлены въ настоящее время.

«Въ случаѣ согласія Отдѣленія прошу выдать мнѣ свидѣтельство о командировкѣ до подписанія протокола».

Положено командировать академика В. В. Бартольда, выдать ему удостовѣреніе до подписанія протокола и сообщить въ Правленіе для свѣдѣнія.

Приложеніе къ протоколу VIII засѣданія Отдѣленія Историческихъ наукъ и Филологіи Императорской Академіи Наукъ 4 мая 1916 года.

Списокъ фотографій халдскихъ, христіанскихъ и мусульманскихъ древностей Ванскаго округа.

Изъ зимней (1915—1916) экспедиціи старшаго хранителя Археологическаго Отдѣла Кавказскаго Музея—С. В. Теръ-Аветисьяна, командированнаго Императорской Академіею Наукъ въ Ванскій округъ для принятія мѣръ охраны и производства регистраціонныхъ археологическихъ работъ[1].

1. **Хой.** Городская стѣна со рвомъ по сѣверо-западной сторонѣ города. б.
2. **Ванъ.** Церковь Норашенъ. (Съ южной стороны). б.
3. » Церковь Норашенъ. (Внутренній видъ). б.
4. » Церковь Арарунцъ. (Внутренній видъ съ запада). б.
5. **Востанъ.** Мечеть. (Внутренній видъ съ сѣверной стороны). б.
6. » Мечеть. (Общій видъ съ сѣверо-запада). б.
7. » Мечеть. Главная дверь съ надписью (западная сторона). б.
8. » Мавзолей. (Общій видъ съ сѣверо-запада). б.
9. » Мавзолей. (Съ востока). б.
10. » Мавзолей. (Съ запада). б.
11. » Монастырь Чагадъ суро́-Пишанъ. (Общій видъ съ сѣверо-запада). б.
12. » Чагадъ суро́-Пишанъ съ горой Ардосомъ и монастырскими постройками. (Видъ съ сѣверо-запада). б.
13. » Монастырь св. Богородицы, называемый Цо́ваhаяцъ. (Сѣверный фасадъ). б.
14. » Цо́ваhаяцъ. (Общій видъ съ сѣверо-востока). б.
15. **Ахтамаръ.** Домъ католикоса на берегу. (Внутренность домовой церкви послѣ погрома). б.

---

[1] Сокращенія указываютъ: б = большой размѣръ (18×24), м = малый размѣръ (13×18). Номера, не снабженные этими помѣтками, не имѣютъ соотвѣтственныхъ указаній и въ спискѣ, присланномъ безъ сопровождающаго объяснительнаго письма.

16. **Артамедъ.** Клинопись на большомъ камнѣ, второмъ въ порядкѣ нахожденія отъ озера. б.
17. » Стѣны канала Шамирама (Семирамиды). (Съ сѣверной стороны). б.
18. » Пещеры-дома халдской эпохи въ скалѣ. (Съ сѣвера). м.
19. » Клинопись около тунеля для дождевой воды. м.
20. **Деревня Аихзе.** Церковь. (Наружный видъ). м.
21. **Селеніе Цвстанъ,** въ 12 верстахъ отъ Вана. Клинопись на каменной ступѣ. (I-я половина). м.
22. » » Клинопись на каменной ступѣ въ курдской части. (II-я половина). м.
23. **Ванъ.** Церковь св. «Тирамайръ». (Общій видъ церкви и придѣла послѣ разрушенія, съ запада). м.
24. » Церковь св. «Тирамайръ». (Западный фасадъ). м.
25. » Церковь св. Вардана. (Алтарная часть съ иконостасомъ). м.
26. » Церковь св. Погоса. (Внутренній видъ иконостаса). б.
27. » «Суръ-Погосъ». (Крестный камень въ южной стѣнѣ). м.
28. » «Суръ-Погосъ». (Клинопись на двухъ камняхъ въ нижней части западной стѣны). м.
29. » Церковь св. Петра. (Армянская надпись). м.
30. » Церковь св. Петра. (Внутренній общій видъ съ сѣвера). м.
31. » Мечеть «Хуршид-джами». (Общій видъ).
32. » Мечеть «Хуршид-джами». (Внутренній видъ). б.
33. » Мечеть «Хуршид-джами». (Видъ наружной колонны съ сѣвера). б.
34. » Мавзолей мечети «Хосров-Паша». (Надпись съ сѣверо-востока). м.
35. » Мавзолей мечети «Хосров-Паша». (Общій видъ съ сѣвера). м.
36. » Мечеть «Хуршид-джами». (Ниша съ рѣзьбой въ южной стѣнѣ — киблэ). м.
37. » Мечеть «Хосров-джами». (Надпись надъ дверью). м.
38. » Постройки въ оградѣ мечети «Хосров-джами». (Съ южной стороны). м.
39. » Мечеть «Топчи-джами». (Общій видъ съ сѣверо-восточной стороны). б.
40. » «Улу-джами», новая мечеть. (Общій видъ съ сѣверо-запада). б.
41. » «Улу-джами», старая мечеть. (Юго-восточный уголъ). м.
42. » Надпись на двери новой мечети «Улу-джами» надъ окномъ. м.
43[а]. **Ванъ.** Надпись надъ дверью мечети [какой? той же?]. м.
43[б]. » Церковь св. Петра. Клинопись надъ дверью придѣла правой стороны.
44. **Ванъ.** Церковь св. Саака. Клинопись передъ алтаремъ. б.
45—48. **Ванъ.** Церковь св. Саака. Клинопись въ придѣлѣ церкви на четырехъ сторонахъ отдѣльнаго камня.
49. **Ванъ.** Старый городъ. Домъ Терзибашяна. Клинопись передъ домомъ.
50. » «Востанъ капуси». б.
51. » Мечеть «Кая-Челеби». (Общій видъ съ юга).
52, 53. **Ванъ.** Церковь св. Петра. Клинопись.

54. **Ванъ.** Мечеть «Хосров». Клинопись на обратной сторонѣ большого крестнаго камня.

55. **Ванъ.** Мечеть «Хосров-джами». Клинописный памятникъ, обращенный въ крестный камень съ армянской надписью.

56. » Мечеть «Хосров-джами». Крестный камень съ армянской надписью 780-го года арм. лѣтосчисленія (1331 г. по Р. Хр.).

57—59. **Ванская крѣпость.** Панорама — южная сторона крѣпостной скалы, отъ западнаго края до восточнаго.

60. **Ванская крѣпость.** Восточный край крѣпостной скалы. (Сѣверная сторона крѣпости).

61—63. **Ванская крѣпость.** Панорама. (Сѣверная сторона).

64а—64б. » » Подробности части сѣверной стѣны, захваченной снимкомъ № 61, съ нишами жертвоприношенія. (Съ близкаго разстоянія).

65. **Ванская крѣпость.** Подробности части сѣверной стѣны, захваченной снимкомъ № 63, съ выступомъ крѣпостныхъ стѣнъ по склонамъ скалы до равнины. (Съ близкаго разстоянія).

66. » » Выступы скалъ съ остаткомъ халдской стѣны, что на снимкѣ № 63. (Изъ панорамы).

67. » » Часть панорамы, соотвѣтствующая снимку № 62. (Съ близкаго разстоянія).

68. » » Подробности части стѣны, захваченной снимкомъ № 62. (Видъ съ сѣверо-запада).

69. » » Древнее халдское сооруженіе «Камни Шамирама» (*Շամիրամի քարեր*) на сѣверо-западномъ углу крѣпостной скалы.

70—71. **Ванская крѣпость.** Клинописи на западной стѣнѣ сооруженія, именуемаго «Камни Шамирама».

72—74. » » Клинописи въ нишѣ въ центрѣ сѣверной панорамы крѣпостной скалы. (См. № 62).

75 а—75 б. **Ванская крѣпость.** Клинопись въ нишѣ жертвоприношеній (*զոհարան*).

76. **Ванская крѣпость.** Крѣпостныя главныя ворота. (См. № 63).

77. » » Высокая башня, подъ которой помѣщаются крѣпостныя главныя ворота (см. № 76) и дорога въ промежуткѣ стѣнъ на верхнюю площадь крѣпости.

78. » » Высокая башня надъ крѣпостными воротами.

79. » » Верхняя площадь съ мечетью и казармами. (Видъ съ восточной стороны).

80. » » Халдскія стѣны на восточномъ концѣ верхней части крѣпости.

81. » » Взорванный арсеналъ (пороховой погребъ и оружія) на восточномъ концѣ верхней площади крѣпости.

82. » » Обширная надпись въ центрѣ южной стороны крѣпостной скалы, на высотѣ около 30 саженей.

83. **Ванъ.** Пергаментная рп. ц. св. Вардана. Собственноручная запись вардапета Ванакана.
84. » Рп. ц. св. Вардана. Заставка Евангелія отъ Матоея.
85. » Рп. ц. св. Вардана. Заставка Евангелія отъ Марка.
86. » Пергаментная рп. ц. св. Вардана. Заставка Евангелія отъ Луки.
87. » Пергаментная рп. ц. св. Вардана. Заставка Евангелія отъ Іоанна.
88. » Зим-зимъ мағара, въ Топрах-калэ. Выходъ лѣстницы и скалы съ лѣстницами на восточной сторонѣ пещеры.
89. » Топрах-калэ съ юго-запада. Вершина горы съ остатками раскопокъ Belck'a.

90 а—90 б. **Ванъ.** Дверь Мыхера или Чобан-Капуси съ клинописью.

91. **Ванъ.** Дверь Мыхера или Чобан-Капуси. (Общій съ юга видъ скалы съ надписью).
92. **Варагъ.** Монастырь. (Общій видъ всѣхъ церквей съ юго-запада).
93. » Дверь снаружи въ придѣлѣ монастыря съ армянской надписью.
94. » Дверь въ церковь съ изображеніемъ Божіей Матери и перламутровая половина двери. (Снимокъ сдѣланъ въ придѣлѣ).
95. » Клинопись на жертвенникѣ (*ընծ-բար*).
96. » Клинопись надъ дверью ризницы (*Ժամզարան*).

97 а, 97 б. **Варагъ.** 4 клинописи внутри ризницы (*Ժամզարան*).

98, 99. **Варагъ.** Клинопись на кругломъ камнѣ внутри ризницы (*Ժամզարան*).

100. **Варагъ.** Клинопись на длинномъ камнѣ. (Обратная сторона этого камня съ клинописью и съ однимъ вырѣзаннымъ большимъ крестомъ — на снимкѣ № 97).
101. » Жернова [sic] халдской эпохи.

(*Примѣч.* Всѣ клинописи (№№ 95—104) привезены Айрикомъ изъ развалинъ ц. *Զորափանի* на восточной сторонѣ Вана).

102. » Армянская надпись на западной стѣнѣ разрушенной церкви.
103. » Орѣховая дверь рѣзной работы въ церкви, что на югѣ отъ главной церкви.
104. **Монастырь Кармраворъ** на западномъ склонѣ горы Варагъ. (Общій видъ съ юга).
105. » » Клинопись на стѣнѣ, черезъ которую лѣстница ведетъ въ церковь.
106. » » Маленькая клинопись въ западной стѣнѣ двухъэтажнаго дома.

107 а, 107 б. **Ванъ.** Видъ города съ крѣпостной скалы.

108. **Ахтамаръ.** Монастырь. (Общій видъ съ юга).
109. » Западная половина южной стѣны церкви.
110. » Восточная половина южной стѣны церкви.

111—120. **Ахтамаръ.** Южная стѣна монастыря въ деталяхъ.

121. **Ахтамаръ.** Восточная стѣна.
122—125. **Ахтамаръ.** Восточная стѣна монастыря въ деталяхъ.
126. **Ахтамаръ.** Сѣверная стѣна.
127. » Восточная половина сѣверной стѣны.
128. » Западная половина сѣверной стѣны.
129—136, 139. **Ахтамаръ.** Сѣверная стѣна въ деталяхъ.
137. **Ахтамаръ.** Западная стѣна. (Общій видъ).
138. » Западная стѣна. Царь Гагикъ и Спаситель.
139. » См. 129 и сл.
140. » Алтарь.
141. » Царское мѣсто внутри церкви.
142. » Дверь ц. Спасителя (*Սբ Փրկիչ*).
143. » Дверь церкви придѣла Спасителя.
144. » Куполъ церкви. (Видъ съ юго-запада).
145. » Куполъ церкви. (Видъ съ востока).
146. » Куполъ церкви. (Видъ съ сѣвера).
147. » Фризы южной стѣны церкви.
148. » Фризы западной стѣны церкви.
149. » Восточная стѣна притвора (*գաւիթ*) съ надписями.
150. » Фризъ и надпись на южной стѣнѣ церкви.
151. » Надпись на западной стѣнѣ надъ дверью притвора (*գաւիթ*).
152. » Надпись на южной стѣнѣ надъ дверью притвора (*գաւիթ*).
153. » Надпись надъ дверью церкви Спасителя (*Սբ Փրկիչ*).
154—156. **Ахтамаръ.** Клинописи въ одной изъ разрушенныхъ комнатъ помѣщеній католикоса (*վեհարան*).
157, 158. **Ахтамаръ.** Крестный камень и надпись на боковой его сторонѣ на могилѣ католикоса Захарія, замученнаго въ Востанѣ.
159. **Ахтамаръ.** Крестный камень на могилѣ католикоса Захарія (ср. № 158).
160. » Крестный камень.
161. » Памятники на могилахъ Ахтамарскихъ католикосовъ.
162. » Монастырь. (Общій видъ).
163, 164. **Ахтамаръ.** Островокъ Тамары съ часовней и часть озера и скалы большого острова.
165. **Ахтамаръ.** Озеро Ванъ и гора Ардосъ. (Видъ съ острова Ахтамара).
166. » Адамъ и Ева. (Рельефъ на сѣверной стѣнѣ ц.).
167, 168. **Ахтамаръ.** Корабль Іоны. (Рельефъ на южной стѣнѣ ц.).
169, 170. » Фризъ и куполъ. (Видъ съ восточной стороны).
171—175. **Ванъ.** «Исторія Александра Великаго», пергаментная рукопись.
176, 177. » Евангеліе, пергаментная рукопись церкви св. Вардана. Запись.
178—191. » Евангеліе, рукопись 866 года (1417 по Р. Хр.), на бумагѣ, одной изъ церквей стараго города.

192—197. Евангеліе, на пергаментѣ круглымъ письмомъ 944 года (1495 по Р. Хр.), написано въ Нораванкѣ въ Вайоц-дзорѣ.

198—202. **Варагъ.** Евангеліе Варагскаго монастыря, написано въ 746 году (1297 по Р. Хр.) нѣкіимъ Симеономъ въ Арджешѣ.

203, 204. **Цвстанъ.** Клинопись на трапезѣ въ церкви. Круглая надпись снята на двухъ негативахъ, на каждомъ по половинѣ.

205. **Ванъ.** Скалы Акырпи и Мыхеръ. (Общій видъ).

206. **Варагъ.** Гора. (Общій видъ съ сѣверо-запада).

207. **Ванское озеро.** Фелюга, на которой ѣздили въ Ахтамаръ послѣ бури у Ахтамара.

208. **Ванская крѣпость.** (Общій видъ южной ея стороны — съ дальняго разстоянія).

209. » » (Общій видъ южной ея стороны — съ близкаго разстоянія).

210. » » (Общій видъ сѣверной ея стороны — съ дальняго разстоянія).

211а, 211б. **Ванъ.** Церковь Ап-куйснеръ. Водосвятіе въ присутствіи Ванскаго отряда 6 января 1916 года.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

Греко-бактрійское государство и его распространеніе на сѣверо-востокъ.

В. В. Бартольда.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Историческихъ Наукъ и Филологіи 4 мая 1916 г.).

Приведенныя въ географіи Страбона (§ 516) слова Аполлодора артамитскаго (I в. до Р. Хр.)[1] о распространеніи власти греко-бактрійскихъ царей «даже до серовъ и фауновъ»[2] обыкновенно толкуются въ томъ смыслѣ, что эти цари, помимо своихъ завоеваній въ Индіи, расширяли предѣлы своего государства также въ Средней Азіи, по направленію къ сѣверо-востоку. Было высказано мнѣніе, что бактрійскіе цари придавали значеніе торговому пути въ Китай черезъ бассейнъ Тарима, старались вступить въ сношенія съ китайцами и обезопасить этотъ торговый путь отъ кочевниковъ-хунновъ[3]. Одинъ изъ современныхъ ученыхъ полагаетъ, что бактрійскіе цари старались вознаградить себя въ Средней Азіи за области, утраченныя въ войнѣ съ пареянами, и что послѣдовавшее въ томъ же II в. до Р. Хр. завоеваніе Бактріи кочевниками было только отвѣтомъ на завоевательныя стремленія самихъ бактрійскихъ царей[4]. Утверждаютъ также, будто китайцы въ Ферганѣ застали слѣды вліянія если не греческой государственности, то греческой культуры; китайское слово *пу-тао* «виноградъ» (съ виноградарствомъ и виноделіемъ китайцы впервые ознакомились въ Ферганѣ) сближаютъ съ греческимъ βότρυς: отсюда былъ сдѣланъ выводъ, что виноградарство было принесено въ Фергану греками[5].

---

[1] Ср. A. Behr, De Apollodori Artamiteni reliquis atque aetate (diss.), Argentorati 1888, p. 4 f.

[2] Извѣстно, что вмѣсто Φρυνῶν печатнаго текста въ рукописяхъ стоитъ Φαύνων; ср. факсимиле двухъ рукописей Bibl. Nationale у K. Németi, Die historisch-geographischen Beweise der Hiung-nu = Hun Identität, Budap. Mai 1910, S. 13.

[3] A. v. Gutschmid, Geschichte Irans, S. 44: это мнѣніе признаетъ правдоподобнымъ и A. Behr, Diss., S. 43.

[4] J. Marquart, Ērānšahr, S. 207.

[5] A. v. Gutschmid, op. cit., S. 64. F. Hirth, Zur Kulturgeschichte der Chinesen (Sonderabdr. aus der Beil. zur Allg. Zeit. № 147 u. 148), München 1898. S. 15 f.; изъ русскихъ синологовъ П. И. Шмидтъ въ Изв. Вост. Инст. т. II, вып. 4, стр. 400; Опытъ Мандаринской грамматики, стр. 42.

Сопоставленіе греческихъ извѣстій съ китайскими приводитъ къ противоположнымъ выводамъ: 1) торговаго пути черезъ бассейнъ Тарима до паденія греко-бактрійскаго государства не было, и китайскіе товары привозились въ Индію, откуда они иногда проникали въ Среднюю Азію; 2) Фергана не находилась подъ вліяніемъ греческой культуры, и средне-азіатское винодѣліе возникло до греческаго завоеванія и независимо отъ него.

Изъ труда Страбона (§ 693) видно, что греки ознакомились съ шелкомъ еще въ эпоху Александра, но не въ Средней Азіи, а въ Индіи; Страбонъ приводитъ слова Неарха о ткани, выдѣлываемой изъ листьевъ, какъ греки еще долгое время спустя представляли себѣ происхожденіе шелка [1].

Въ 20-хъ годахъ II в. до Р. Хр. Чжанъ-цянь видѣлъ въ Бактріи китайскіе товары (бамбуковые посохи и холсты), но и эти товары были привезены изъ Индіи [2], съ которой Бактрія при греческихъ царяхъ вообще имѣла болѣе оживленныя сношенія, чѣмъ до Александра; уже въ концѣ III в. до Р. Хр., до завоеваній Димитрія, въ Бактріи были индійскіе боевые слоны [3], которые въ разсказахъ о дѣйствіяхъ Александра въ Бактріи и Согдіанѣ не упоминаются. Ферганцы до Чжанъ-цяня слышали о богатствахъ Китая, но сношеній съ нимъ не имѣли [4].

Несмотря на близкое сосѣдство съ мѣстностями, завоеванными еще Александромъ, Фергана такъ мало находилась подъ вліяніемъ греческой культуры, что искусство выдѣлывать посуду изъ золота и серебра и оружіе изъ желѣза было принесено туда только китайцами [5]. Если бы Фергана когда либо принадлежала греко-бактрійскимъ царямъ, то это врядъ-ли было бы возможно.

Сближеніе словъ *пу-тао* и *βότρυς*, крайне сомнительное въ лингвистическомъ отношеніи, не оправдывается и историческими данными. Среди иранскихъ терминовъ виноградарства и винодѣлія нѣтъ ни одного слова греческаго происхожденія; сами греки не только не говорятъ о распространеніи винодѣлія подъ греческимъ вліяніемъ, но описываютъ мѣстные сорты

---

[1] Ср. М. Хвостовъ, Исторія вост. торговли греко-римскаго Египта, Казань 1907. стр. 149.

[2] Ши-цзи въ перев. о. Іакинѳа, Собр. свѣдѣній о народахъ, обитавшихъ въ Ср. Азіи въ древнія времена, III, 9 сл. Fr. Hirth. Zur Kulturgeschichte, S. 11.

[3] Ср. разсказъ Поливія (XI, 34) о переговорахъ 206 г., A. v. Gutschmid, Geschichte Irans. S. 38.

[4] Іакинѳъ, Собр. свѣд., III, 2 (изъ Ши-цзи).

[5] Ibid. III. 61 (изъ «Исторіи старш. дома Хань»).

винограда и мѣстные способы храненія вина, какъ новыя для грековъ черты мѣстной культуры. Замѣчательно, что греки на Герирудѣ и китайцы въ Ферганѣ обратили вниманіе на одну и ту же подробность — на продолжительность храненія вина[1].

Если даже Фергана оставалась внѣ вліянія греческой культуры, то ни о какомъ распространеніи греческаго владычества за предѣлы областей, завоеванныхъ еще Александромъ, очевидно, не можетъ быть рѣчи.

Разсказъ Полибія (XI, 34, 5) о переговорахъ между Евѳидемомъ и Антіохомъ Великимъ (206 г.) показываетъ, что греко-бактрійскіе цари видѣли свою задачу въ Средней Азіи исключительно въ оборонѣ культурныхъ земель отъ кочевниковъ; ихъ завоевательныя стремленія, какъ впослѣдствіи завоевательныя стремленія индо-скиѳскихъ царей, были направлены исключительно въ сторону Индіи. Слова Аполлодора о распространеніи ихъ власти до серовъ и фауновъ относятся, слѣдовательно, къ индійскимъ походамъ Димитрія и Менандра, о которыхъ говорится въ той же цитатѣ; Аполлодоръ хотѣлъ сказать, что Димитрій и Менандръ распространили греческое господство въ Индіи до ея восточныхъ и сѣверныхъ предѣловъ.

Такое пониманіе текста не находится въ противорѣчіи съ географическими представленіями грековъ. О «серахъ», какъ народѣ, выдѣлывавшемъ шелкъ, греки впервые узнали въ Индіи, и долгое время для нихъ представленіе о серахъ было связано съ представленіемъ объ индійцахъ; еще Страбонъ (§ 702) причисляетъ серовъ къ индійскимъ народамъ, жившимъ за Гипанисомъ (Сетледжомъ). Еще менѣе ясно было представленіе о границахъ между Индіей и Средней Азіей; Страбонъ (§ 513) приводитъ слова Эратосѳена, по которымъ Бактрія граничила съ Индіей только на небольшомъ пространствѣ, области согдійцевъ и саковъ (саковъ отдѣляла отъ согдійцевъ Сыръ-дарья) — всѣми своими предѣлами. Гдѣ Аполлодоръ помѣщалъ «фауновъ», которыхъ теперь едва ли не всѣ изслѣдователи отождествляютъ съ хуннами, и какъ онъ представлялъ себѣ границы между областью этого народа и областями индійскими и скиѳскими, неизвѣстно. Плиній (VI, 20), перечисляя народы въ порядкѣ съ востока на западъ,

---

1 Ср. текстъ Страбона (§ 516) καὶ γὰρ εἰς τριγονίαν παραμένει ἐν ἀπιττώτοις ἄγγεσι и слова Ши-цзи (Іакинѳ., III, 22): «Старое вино нѣсколько десятковъ лѣтъ стоитъ безъ порчи». Винодѣліе въ Ферганѣ впослѣдствіи было уничтожено исламомъ; виноградарство сохранилось до сихъ поръ, но не получило большого развитія и, повидимому, не имѣетъ будущности. По оффиціальнымъ «Обзорамъ Ферганской области» въ Ферганѣ подъ виноградниками было въ 1897 г. 7327 дес., въ 1911 г. — всего 6339, причемъ больше всего (2770) въ Наманганскомъ уѣздѣ, гдѣ находится и первоначальная столица ферганскихъ правителей, Касанъ.

послѣ серовъ называетъ сначала фуновъ (фауновъ), потомъ тохаровъ, потомъ касировъ, которые причисляются у него къ индійцамъ, хотя и жили въ сторону Скиѳіи. Тохары упоминаются и у Аполлодора среди завоевателей греко-бактрійскаго царства, вторгнувшихся въ это царство со стороны Сыръ-дарьи[1]. Если и Аполлодоръ помѣщалъ фауновъ къ востоку отъ тохаровъ, то представленіе объ этихъ народахъ, какъ сѣверныхъ сосѣдяхъ Индіи, не вполнѣ противорѣчитъ дѣйствительности. Часть юечжійцевъ или тохаровъ[2], такъ называемые «малые юечжійцы» остались въ мѣстности къ востоку отъ Хотана, гдѣ Сюань-цзанъ еще въ VII в. видѣлъ развалины тохарскихъ городовъ; сюда же распространялась власть хунновъ, которыми на пути изъ Китая къ Хотану былъ захваченъ китайскій посолъ Чжанъ-цянь[3].

Представленіе о странѣ серовъ и ея отношеніи къ Индіи постепенно должно было измѣниться подъ вліяніемъ открытаго въ концѣ II в. до Р. Хр. мірового торговаго пути изъ восточной Азіи въ западную, когда этимъ путемъ направился вывозъ изъ Китая шелка. О торговлѣ шелкомъ еще не упоминается въ исторіи старшаго дома Хань и говорится только въ исторіи младшаго дома Хань, воцарившагося въ 25 г. по Р. Хр.[4]. Выгодами торговли воспользовалось государство Арсакидовъ; Митридатъ II Великій (123—87) былъ первымъ государемъ въ міровой исторіи, отправлявшимъ посольства и на крайній востокъ, и на крайній западъ Азіи, въ Китай[5] и въ римскую республику[6]; но только «Исторія младшихъ Хань» говоритъ о роли пароянъ, какъ посредниковъ въ торговлѣ шелкомъ: парояне, «желая одни снабжать Да-цинь (римскую имперію) шелковыми тканями, не пропускали дациньцевъ черезъ свои предѣлы въ Китай»[7]. По тому же источнику «посольство» (такъ китайцы, какъ извѣстно, называли и торговые караваны) изъ страны

---

[1] Страбонъ, § 511; о принадлежности этого извѣстія Аполлодору (черезъ Посидонія родосскаго) A. Behr, Diss., p. 19.

[2] Ср. статьи бар. А. А. Сталь-фонъ-Гольштейна въ JRAS 1914, Jan., p. 79 sq. и въ SB Berl. 1914, XXI, 643 f.

[3] Ши-цзи; Іакинѳъ, Собр. свѣд., III, 2 и 10. О томъ, что Чжанъ-цянь могъ проѣхать только южнымъ путемъ, еще A. Herrmann, Die alten Seidenstrassen zwischen China und Syrien, I, 116.

[4] О шелководствѣ въ Китаѣ см. также F. Hirth, China and the Roman Orient, p. 225 sq.; A. Herrmann. Seidenstrassen, S. 3 f.

[5] Объ этомъ посольствѣ Ши-цзи, перев. Іакинѳа, Собр. свѣд., III, 20; Hirth, China, p. 35.

[6] Встрѣча пароянскаго посольства съ Суллой въ 92 г. до Р. Хр. въ Каппадокіи описывалась много разъ (первоисточникъ—Плутархъ, Сулла, гл. 5), напр. J. H. Schneiderwirth, Die Parther... nach griechisch-römischen Quellen. Heilig. 1874, S. 42 f.; A. v. Gutschmid, Gesch. Irans, S. 80.

[7] Іакинѳъ. Собр. свѣд., III, 117. Fr. Hirth, China und the R. Or., p. 42.

Да-цинь впервые прибыло въ Китай въ 166 г. по Р. Хр., притомъ морскимъ путемъ. Классическая литература сохранила намъ извѣстіе о путешествіи римскихъ торговцевъ въ Китай въ болѣе раннюю эпоху, притомъ черезъ Среднюю Азію; извѣстно, что Маринъ тирскій (около середины II в. по Р. Хр.) имѣлъ въ рукахъ записку македонскаго купца Маэса, носившаго также латинское имя Titianus, о пути въ страну серовъ, составленную со словъ посланныхъ имъ людей, будто бы совершившихъ это путешествіе[1]. Трудно, однако, допустить, чтобы прибытіе каравана изъ страны Да-цинь не было отмѣчено въ «Исторіи младшихъ Хань»; очень вѣроятно, что посланные Маэсомъ люди выдали за результатъ дѣйствительно совершеннаго путешествія разспросныя свѣдѣнія, собранныя ими у пароянъ. Въ трудѣ Птолемея, единственномъ дошедшемъ до насъ сочиненіи, гдѣ использована записка Маэса[2], о странѣ къ востоку отъ Памира сообщенныя крайне смутныя свѣдѣнія; ни одного географическаго названія не удается пріурочить къ опредѣленной мѣстности, если руководиться современными запискѣ китайскими источниками и не прибѣгать къ такимъ ненаучнымъ пріемамъ, какъ сближеніе Авксакіи или Авзакіи съ Аксу, ойхардовъ съ уйгурами.

«Посольство» 166 г. часто приводили въ связь съ военными событіями 162—166 гг., закрывшими для римскихъ купцовъ сухопутную дорогу въ Китай[3]. Между тѣмъ купцы привезли въ Китай только индійскіе товары — слоновые зубы, носороговы рога и черепашины — и ни одного изъ тѣхъ товаровъ, которые обыкновенно привозились изъ страны Да-цинь[4]. Изъ этого можно заключить, что купцы при отъѣздѣ изъ областей Римской имперіи еще не думали о путешествіи въ Китай и только въ Индіи воспользовались какимъ то неожиданно представившимся имъ случаемъ для такого путешествія.

Предположенія о сознательномъ стремленіи римскихъ купцовъ получать шелкъ непосредственно отъ китайцевъ, такимъ образомъ, столь же мало доказательны, какъ предположенія о политикѣ греко-бактрійскихъ царей. И безъ непосредственныхъ сношеній въ Римскую имперію не могли не проникать свѣдѣнія о караванномъ пути въ страну, откуда происходилъ шелкъ; но старыя географическія представленія не могли быть вполнѣ вытѣснены новыми; несмотря на свѣдѣнія о караванномъ пути въ страну серовъ изъ

---

[1] Геогр. Птолемея, I, 11, 7.

[2] Птолемей вынесъ впечатлѣніе, что Маринъ и самъ не вѣрилъ разсказамъ купцовъ (ibid.: ἔοικε δὲ καὶ αὐτὸς ἀπιστεῖν ταῖς τῶν ἐμπορευομένων ἱστορίαις).

[3] Gutschmid, Gesch. Irans, S. 150. Hirth, China and the R. O., p. 173 sq.; Zur Kulturg. der Chinesen, S. 21 f.

[4] Ср. Іакиноъ. Собр. свѣд., III, 117 и 120.

Бактріи и Согдіаны, несмотря на опубликованную Мариномъ и Птолемеемъ записку Маэса мы въ античной литературѣ, какъ научной, такъ и популярной, отъ вѣка Августа до вѣка Юстиніана видимъ много примѣровъ, что серовъ по прежнему представляли себѣ рядомъ съ индійцами. Горацій называетъ серовъ вмѣстѣ съ индійцами (Carm. I, 12, 56), хотя въ другихъ мѣстахъ (Carm. III, 29, 27 и IV, 15, 23) упоминаетъ о нихъ рядомъ съ Бактрами, Танаисомъ и персами. Діонисій Періегетъ, писавшій, какъ полагаютъ теперь[1], въ эпоху Адріана (117—138), говоритъ о пути къ серамъ совершенно отдѣльно отъ Индіи: изъ «согдійской земли», которую прорѣзывалъ Оксъ, вытекавшій изъ горы Эмодъ и впадавшій въ Каспій, шли за Яксартъ къ сакамъ; дальше слѣдовали тохары, фауны (въ печатномъ текстѣ: фруны) и «варварскіе народы серовъ» (vers. 747—752); единственная связь съ Индіей заключалась въ томъ, что отъ той же горы Эмодъ[2] до земли, орошенной Гангомъ, жилъ народъ «гаргариды» (vers. 1144—1147). Маринъ тирскій и по его примѣру Птолемей говорятъ о странѣ синовъ, куда пріѣзжали моремъ изъ Индіи, и о странѣ серовъ, куда шли караваннымъ путемъ изъ Бактріи, какъ о двухъ различныхъ странахъ, хотя для автора составленнаго около 70 г. по Р. Хр. «Перипла Краснаго моря» городъ Θῖναι былъ главнымъ городомъ серовъ[3]; однако и Птолемей заставлялъ не только страну синовъ (VII, 3, 1), но и страну серовъ (VI, 16, 1) граничить съ частью Индіи, расположенной за Гангомъ; эти индійцы были, по его мнѣнію, западными сосѣдями синовъ и южными сосѣдями серовъ (также VII, 2, 1). Въ христіанской версіи псевдо-Каллисѳена (III, 7) серы вмѣстѣ съ индійцами помѣщены у Ганга. Въ извѣстномъ разсказѣ Прокопія (De bello Goth. IV, 17) о началѣ шелководства въ Византіи при Юстиніанѣ говорится о странѣ Σηρίνδα, расположенной по ту сторону большей части индійскихъ народовъ[4]. Очень вѣроятно, что это названіе, подобно нѣкоторымъ другимъ географическимъ и этнографическимъ терминамъ античной науки, образовалось изъ соединенія названій народовъ серовъ и индійцевъ, какъ близкихъ сосѣдей.

---

[1] Ср. редакціонное примѣчаніе къ статьѣ Ф. Хирта въ SB Münch. 1899, II, 274, съ ссылкой на Christ, Griech. Litt.[3], S. 691.

[2] Плиній (VI, 24) передаетъ слова цейлонскихъ пословъ, что съ тѣхъ же горъ уже можно было видѣть серовъ. По представленію Птолемея (VI, 15 и 16) Эмодскія горы проходили черезъ Скиѳію и Серику.

[3] М. Хвостовъ, Исторія вост. торг., стр. 392.

[4] Ἐν χώρᾳ ὑπὲρ Ἰνδῶν ἔθνη τὰ πολλὰ οὔσῃ, ἥπερ Σηρίνδα ὀνομάζεται. Текстъ не вполнѣ правильно приведенъ въ книгѣ E. Chavannes, Documents sur les Tou-kiue (Turcs) occidentaux. p. 233.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ.

Остаточный членъ формулъ механическихъ квадратуръ.

(Сообщеніе второе).

В. А. Стеклова.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 27 апрѣля 1916 г.).

1. Въ предыдущей запискѣ того же заглавія, представленной Академіи Наукъ 20 января текущаго года, я разсмотрѣлъ вопросъ о сходимости формулъ механическихъ квадратуръ, т. е. первую изъ двухъ задачъ (задачу (A)), указанныхъ во 2[омъ] §[ѣ] только что упомянутой записки.

Въ настоящей статьѣ я изложу общее рѣшеніе второй задачи (задачи (B)).

Употребляя обозначенія, принятыя въ предыдущей запискѣ, напишемъ формулу механическихъ квадратуръ въ видѣ

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(a_k) + R_n, \tag{1}$$

гдѣ коэффиціенты A_k и ординаты a_k, лежащія между двумя данными числами a и b, опредѣляются изъ условія

$$\int_a^b p(x) P_p(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k P_p(a_k). \tag{2}$$

Въ этихъ формулахъ, напомнимъ, $p(x)$ и $f(x)$ суть двѣ заданныя функціи, $P_p(x)$ есть произвольный полиномъ степени не выше p, а p есть цѣлое число, не бо́льшее $2n-1$.

Мы будемъ теперь предполагать, что функція $f(x)$ имѣетъ производныя различныхъ порядковъ, а функція $p(x)$ есть какая угодно заданная функція, интегрируемая въ промежуткѣ отъ a до b.

Мы предположимъ затѣмъ, что

$$a = -1, \qquad b = +1,$$

что нисколько не нарушитъ общности разсужденій.

Назовемъ черезъ M и m соотвѣтственно наибольшее и наименьшее изъ значеній производной порядка p отъ функціи $f(x)$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$ и положимъ

$$\varphi(x) = f(x) - \frac{M+m}{2} \frac{x^p}{p!}. \tag{3}$$

Примѣнивъ формулу квадратуръ (1) къ функціи $\varphi(x)$, получимъ, въ силу (2),

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\varphi(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k \varphi(a_k) + R_n.$$

Если мы положимъ затѣмъ, какъ въ $5^{\text{омъ}}$ §[ѣ] предыдущей записки,

$$\varphi(x) = P_{p-1}(x) + \rho_p(x), \tag{4}$$

разумѣя подъ $P_{p-1}(x)$ нѣкоторый полиномъ степени $p-1$, то получимъ

$$R_n = \int_{-1}^{+1} p(x)\rho_p(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k \rho_p(a_k) \tag{5}$$

(сравн. рав. (10) §[а] $5^{\text{аго}}$, стр. 174 предыдущей записки).

2. Положимъ въ равенствѣ (4)

$$P_{p-1}(x) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{2k+1}{2} B_k X_k(x),$$

$$B_k = \int_{-1}^{+1} \varphi(x) X_k(x)\,dx,$$

гдѣ $X_k(x)$ суть полиномы Лежандра [для промежутка $(-1, +1)$].

Получимъ

$$(6)\qquad \rho_p(x) = \frac{p}{2}\left(X_p(x)\int_{-1}^{+1} F(x,y)\,X_{p-1}(y)\,dy - X_{p-1}(x)\int_{-1}^{+1} F(x,y)\,X_p(y)\,dy\right),$$

гдѣ положено

$$(7)\qquad F(x,y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y}$$

(сравн. рав. (6) §ª 4ªᵍᵒ стр. 173 упомянутой выше записки 20-го янв. 1916 г.).

Пусть $f(x)$ какая угодно функція, имѣющая производныя разныхъ порядковъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, m какое угодно цѣлое число.

Простымъ интегрированіемъ по частямъ, на основаніи извѣстныхъ свойствъ полиномовъ Лежандра, легко убѣдиться въ справедливости слѣдующаго равенства

$$(8)\qquad \int_{-1}^{+1} f(y)\,X_m(y)\,dy = (-1)^{m-s}\int_{-1}^{+1} f^{(m-s)}(y)\left(\int_{-1}^{y} X_m(y)\,dy^{(m-s)}\right)dy,$$

гдѣ s есть какое угодно цѣлое число $\leqq m$, а символъ

$$\int_{-1}^{y} X_m(y)\,dy^{(m-s)}$$

обозначаетъ интегралъ

$$\int_{-1}^{y} dy \int_{-1}^{y} dy \ldots \int_{-1}^{y} X_m(y)\,dy,$$

взятый послѣдовательно $m - s$ разъ[1].

---

[1] Формула (8) есть частный случай общей формулы

$$\int_a^b f(x)\,\Phi(x)\,dx = (-1)^n \int_a^b f^{(n)}(x)\left(\int_a^x \Phi(x)\,dx^{(n)}\right)dx,$$

имѣющей мѣсто для любой функціи $\Phi(x)$, удовлетворяющей условію

$$\int_a^b \Phi(x)\,P_{n-1}(x)\,dx = 0.$$

Простѣйшее доказательство этой общей формулы дано мною въ 4омъ §ѣ Мемуара «Sur quelques applications d'une identité élémentaire», который вскорѣ появится въ Запискахъ Импер. Академіи Наукъ.

Положимъ въ равенствѣ (8)

$$f(y) = F(x, y), \quad m = p - 1, \quad s = 0.$$

Получимъ

$$(8_1) \quad I_1 = \int_{-1}^{+1} F(x, y) X_{p-1}(y)\, dy = (-1)^{p-1} \int_{-1}^{+1} F^{(p-1)}(x, y) \left(\int_{-1}^{y} X_{p-1}(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy.$$

Такъ какъ функція $X_{p-1}(y)$ удовлетворяетъ условію

$$(\alpha) \qquad \int_{-1}^{+1} X_{p-1}(y) P_{p-2}(y)\, dy = 0,$$

гдѣ, напомнимъ, $P_{p-2}(y)$ есть произвольный полиномъ степени не выше $p - 2$, то, на основаніи извѣстной формулы преобразованія кратныхъ квадратуръ въ простыя[1],

$$\int_{-1}^{+1} X_{p-1}(y)\, dy^{(k)} = 0$$

при всякомъ k отъ нуля до $p - 2$.

Отсюда, принявъ въ разсчетъ, что производная порядка $p - 1$ отъ полинома $X_{p-1}(y)$ есть число постоянное (т. е. не мѣняетъ знака въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$), заключаемъ, что функція

$$\int_{-1}^{y} X_{p-1}(y)\, dy^{(p-1)}$$

также не мѣняетъ знака при измѣненіи y отъ -1 до $+1$.

Поэтому, на основаніи теоремы о среднихъ, можемъ писать

$$(9) \qquad I_1 = (-1)^{p-1} F_y^{(p-1)}(x, \xi) \int_{-1}^{+1} dy \left(\int_{-1}^{y} X_{p-1}(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy,$$

---

[1] Простѣйшее доказательство этой формулы можно найти въ 3емъ §ѣ моего Мемуара, упомянутаго въ предыдущемъ примѣчаніи.

гдѣ ξ есть нѣкоторое число, лежащее внутри промежутка $(-1, +1)$, а $F_y^{(p-1)}(x, y)$ обозначаетъ производную $\frac{\partial^{p-1} F(x, y)}{\partial y^{p-1}}$.

Воспользовавшись опять формулой преобразованія кратныхъ квадратуръ въ простыя, получимъ

$$\int_{-1}^{+1} dy \left(\int_{-1}^{y} X_{p-1}(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy = \frac{1}{(p-1)!} \int_{-1}^{+1} (1-y)^{p-1} X_{p-1}(y)\, dx,$$

откуда, на основаніи извѣстныхъ свойствъ полиномовъ Лежандра, выводимъ

(10)
$$\int_{-1}^{+1} dy \left(\int_{-1}^{y} X_{p-1}(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy = \frac{(-1)^{p-1}}{(p-1)!} \int_{-1}^{+1} y^{p-1} X_{p-1}(y)\, dy = $$
$$= (-1)^{p-1} \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}.$$

Легко убѣдиться, что при всякомъ k

$$\frac{\partial^k E(x,y)}{\partial y^k} = F_y^k(x,y) =$$
$$= \frac{k!}{(x-y)^{k+1}} \left(\varphi(x) - \varphi(y) - \varphi'(y)\frac{(x-y)}{1!} - \varphi''(y)\frac{(x-y)^2}{2!} - \cdots - \varphi^{(k)}(y)\frac{(x-y)^k}{k!} \right).$$

Отсюда, при помощи формулы Тэйлора, выводимъ

(11)
$$F_y^{(k)}(x, y) = \frac{\varphi^{(k+1)}(\eta)}{k+1},$$

гдѣ η есть нѣкоторое количество, заключенное между x и y, т. е. между -1 и $+1$.

Полагая здѣсь

$$k = p - 1, \qquad y = \xi$$

и принимая въ разсчетъ формулы (9) и (10), получаемъ

(12)
$$I_1 = \frac{2}{p} \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{1.3.5\ldots(2p-1)},$$

гдѣ подъ η по прежнему разумѣется нѣкоторое число, лежащее между -1 и $+1$.

3. Разсмотримъ теперь интегралъ

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} F(x, y)\, X_p(y)\, dy. \tag{13}$$

Положивъ въ формулѣ (8), какъ и раньше,

$$f(y) = F(x, y)$$

и

$$m = p, \qquad s = 1,$$

получимъ

$$I_2 = (-1)^{p-1} \int_{-1}^{+1} F^{(p-1)}(x, y) \left(\int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy. \tag{13$_1$}$$

Разсмотримъ функцію

$$\psi(y) = \int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} = \frac{1}{(p-2)!} \int_{-1}^{y} (y - z)^{p-2} X_p(z)\, dz.$$

Очевидно,

$$\psi(-1) = 0$$

и, на основаніи (α),

$$\psi(1) = 0.$$

Такъ какъ всѣ производныя функціи $\psi(y)$ до порядка $p-2$ обращаются въ нуль при $x = -1$ и $x = +1$, а $p-1$'ая производная равна $X_p(y)$, т. е. имѣетъ только p корней, лежащихъ между -1 и $+1$, то $\psi(y)$ имѣетъ, во всякомъ случаѣ, не болѣе одного корня въ разсматриваемомъ промежуткѣ.

Какъ извѣстно,

$$\int_{0}^{1} z^q X_p(z)\, dz = 0,$$

если p и $q < p$ одновременно четны или нечетны.

Поэтому

$$\psi(0) = (-1)^{p-2} \int_{-1}^{0} z^{p-2} X_p(z)\, dz = (-1)^{p-1} \int_{0}^{1} z^{p-2} X_p(z)\, dz = 0.$$

Итакъ $\psi(y)$ имѣетъ дѣйствительно одинъ и только одинъ корень между -1 и $+1$ и этотъ корень равенъ нулю; слѣдовательно, функція $\psi(y)$ не мѣняетъ знака въ промежуткахъ отъ -1 до 0 и отъ 0 до $+1$.

Написавъ интегралъ I_2 въ видѣ

$$I_2 = (-1)^{p-1} \int_{-1}^{0} F^{(p-1)}(x, y) \left(\int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy +$$

$$+ (-1)^{p-1} \int_{0}^{1} F^{(p-1)}(x, y) \left(\int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} \right) dy$$

и примѣнивъ къ каждому изъ интеграловъ правой части этого равенства теорему о среднихъ, найдемъ, на основаніи (11),

$$I_2 = (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\eta')}{p} \int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} + (-1)^{p-1} \frac{\varphi^{(p)}(\eta'')}{p} \int_{0}^{1} dy \int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)},$$

гдѣ η' и η'' суть числа, лежащія между -1 и $+1$, или

(14) $$I_2 = \frac{(-1)^{p-1}}{p} \left(\varphi^{(p)}(\eta') - \varphi^{(p)}(\eta'')\right) \int_{-1}^{0} dy \int_{-1}^{y} X_p(y)\, dy^{(p-1)} =$$

$$= -\frac{\varphi^{(p)}(\eta') - \varphi^{(p)}(\eta'')}{p(p-1)!} \int_{0}^{1} z^{p-1} X_p(z)\, dz =$$

$$= -\frac{\varphi^{(p)}(\eta') - \varphi^{(p)}(\eta'')}{p(p-1)!} \frac{(p-1)!}{2.4\ldots 2p} = -\frac{\varphi^{(p)}(\eta') - \varphi^{(p)}(\eta'')}{p.2.4\ldots 2p},$$

ибо, какъ извѣстно,

$$\int_{0}^{1} z^{p-1} X_p(z)\, dz = \frac{(p-1)!}{2.4\ldots 2p}.$$

Сопоставляя равенства (8_1), (12), (13), (14) и (6), получаемъ

(15) $$\rho_p(x) = X_p(x) \frac{\varphi^{(p)}(\eta)}{1.3.5\ldots(2p-1)} + X_{p-1}(x) \frac{\varphi^{(p)}(\eta') - \varphi^{(p)}(\eta'')}{2.2.4\ldots 2p}.$$

4. Производная порядка p отъ функціи $\varphi(x)$, въ силу равенства (3), равна

$$\varphi^{(p)}(x) = f^{(p)}(x) - \frac{M+m}{2}$$

и, слѣдовательно, при измѣненіи x отъ -1 до $+1$ принимаетъ всѣ возможныя значенія

$$\text{отъ} -\frac{M-m}{2} \quad \text{до} +\frac{M-m}{2}.$$

Поэтому, каковы бы ни были числа η' и η'', лежащія въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$, существуетъ такое число ζ', лежащее въ томъ же промежуткѣ, что

$$\varepsilon_1 \frac{\varphi^{(p)}(\eta')-\varphi^{(p)}(\eta'')}{2} = \varphi^{(p)}(\zeta'), \tag{16}$$

гдѣ ε_1 равно $+1$ или -1.

Точно также, при всякомъ η, лежащемъ между -1 и $+1$, можно найти число ζ'', также не выходящее изъ этого промежутка, такое, что будетъ

$$\varepsilon_2 \varphi^{(p)}(\eta) = \varphi^{(p)}(\zeta''), \tag{17}$$

гдѣ

$$\varepsilon_2 = \pm 1.$$

Напишемъ теперь равенство (15) въ видѣ

$$\rho_p(x) = \frac{1}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(|X_p(x)|\,\varepsilon_2\varphi^{(p)}(\eta) + \lambda_p\,|X_{p-1}(x)|\,\varepsilon_1\frac{\varphi^{(p)}(\eta')-\varphi^{(p)}(\eta'')}{2}\right),$$

гдѣ положено

$$\lambda_p = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} < 1.$$

Принявъ въ разсчетъ (16) и (17) сейчасъ же выводимъ

$$\rho_p(x) = \frac{1}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(|X_p(x)|\,\varphi^{(p)}(\zeta'') + \lambda_p|X_{p-1}(x)|\,\varphi^{(p)}(\zeta')\right) = \tag{18}$$

$$= \frac{\varphi^{(p)}(\xi)\,H_p(x)}{1.3.5\ldots(2p-1)}.$$

гдѣ введено слѣдующее обозначеніе

$$(18_1) \qquad H_p(x) = |X_p(x)| + \lambda_p\, |X_{p-1}(x)|,$$

а ξ означаетъ, очевидно, нѣкоторое число, не выходящее изъ промежутка $(-1, +1)$.

Формулу (18) можемъ переписать въ видѣ

$$(19) \qquad \rho_p(x) = \frac{H_p(x)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Это равенство даетъ точное выраженіе остаточнаго члена въ разложеніи любой функціи $f(x)$, имѣющей производныя разныхъ порядковъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, въ рядъ по полиномамъ Лежандра, выраженіе, содержащее только одну неопредѣленную величину ξ.

5. Равенство (19) можно представить, если угодно, и въ другомъ видѣ, благодаря указаннымъ выше свойствамъ введенной нами функціи $\varphi(x)$ [рав. (3)].

Такъ какъ

$$|X_p(x)| \leqq 1, \qquad \lambda_p\, |X_{p-1}(x)| < 1$$

для всѣхъ значеній x промежутка $(-1, +1)$, то при всякихъ числахъ ζ' и ζ'', принадлежащихъ этому промежутку, можно найти соотвѣтственно два другихъ числа ξ' и ξ'' въ томъ же самомъ промежуткѣ такихъ, что будетъ, при всякомъ $|x| \leqq 1$,

$$(20) \quad \varphi^{(p)}(\zeta'')\,|X_p(x)| + \varphi^{(p)}(\zeta')\,\lambda_p\,|X_{p-1}(x)| = \varphi^{(p)}(\xi') + \varphi^{(p)}(\xi'').$$

Такъ какъ, далѣе, всякимъ двумъ возможнымъ значеніямъ ξ' и ξ'' всегда найдется, въ силу указанныхъ выше свойствъ функціи $\varphi(x)$, соотвѣтствующее число ξ, въ промежуткѣ $(-1, +1)$, такое, что

$$\varphi^{(p)}(\xi') + \varphi^{(p)}(\xi'') = 2\,\varphi^{(p)}(\xi),$$

то, на основаніи (18) и (20), можемъ писать

$$(21) \quad \rho_p(x) = \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{p}(\xi) - \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Если функція $f^{(p)}(x)$ мѣняетъ свой знакъ въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то равенство (21) можно представить подъ видомъ

$$\rho_p(x) = \frac{2^2}{1.3.5\ldots(2p-1)} f^{(p)}(\eta),$$

гдѣ η есть число, лежащее между -1 и $+1$.

6. Возвращаемся къ равенству (5) §^{а} 1го.

Обозначимъ черезъ e_1 совокупность значеній x, гдѣ функція $p(x)$ сохраняетъ положительныя значенія, черезъ e_2 совокупность тѣхъ значеній x, гдѣ $p(x)$ отрицательна, причемъ

$$e_1 + e_2 = 2.$$

Обозначимъ затѣмъ символомъ

$$\int\limits_e F(x)\,dx$$

интегралъ отъ какой-либо функціи $F(x)$, распространенный на нѣкоторую совокупность e значенія x, принадлежащихъ интервалу $(-1, +1)$.

При этихъ обозначеніяхъ можемъ писать

$$\int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,\rho_p(x)\,dx = \int\limits_{e_1} p(x)\,\rho_p(x)\,dx - \int\limits_{e_2} |p(x)|\,\rho_p(x)\,dx,$$

или

$$\int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,\rho_p(x)\,dx = \rho_p(\xi')\int\limits_{e_1} p(x)\,dx - \rho_p(\xi'')\int\limits_{e_1} |p(x)|\,dx,$$

гдѣ ξ' и ξ'' суть, очевидно, числа, лежащія между -1 и $+1$.

Полагая въ равенствѣ (21)

$$x = \xi' \quad \text{и} \quad x = \xi''$$

и называя соотвѣтствующія значенія ξ черезъ η' и η'', получаемъ

$$\int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,\rho_p(x)\,dx = \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(\varphi^{(p)}(\eta')\int\limits_{e_1} p(x)\,dx - \varphi^{(p)}(\eta'')\int\limits_{e_2} |p(x)|\,dx\right).$$

Отсюда, принимая въ разсчетъ указанныя выше свойства функціи $\varphi^{(p)}(x)$, сейчасъ же выводимъ

$$(22)\qquad \int_{-1}^{+1} p(x)\,\rho_p(x)\,dx = \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{(p)}(\eta)\left(\int_{e_1} p(x)\,dx + \int_{e_2} |p(x)|\,dx\right) =$$

$$= \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{(p)}(\eta)\int_{-1}^{+1} |p(x)|\,dx,$$

гдѣ η есть число, лежащее между -1 и $+1$.

7. Вообще говоря, нѣкоторые изъ коэффиціентовъ A_k формулы квадратуръ (1) могутъ быть положительными, другіе отрицательными.

Назовемъ сумму положительныхъ коэффиціентовъ, при данномъ числѣ n, черезъ S_n, а численное значеніе суммы отрицательныхъ коэффиціентовъ черезъ T_n.

Получимъ

$$(3)\qquad \sum_{k=1}^{n} A_k = \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = S_n - T_n$$

и

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\,\rho_p(a_k) = \sum_{(1)} A_k\,\rho_p(a_k) - \sum_{(2)} |A_k|\,\rho_p(a_k),$$

гдѣ первая сумма распространяется на всѣ значенія k, для которыхъ $A_k > 0$, а вторая — на всѣ значенія k, для которыхъ $A_k < 0$.

Называя черезъ α' нѣкоторое среднее значеніе изъ чиселъ a_k, входящихъ въ первую изъ этихъ суммъ, черезъ α'' — среднее значеніе изъ чиселъ a_k, входящихъ во вторую сумму, получимъ

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\,\rho_p(a_k) = \rho_p(\alpha')\,S_n - \rho_p(\alpha'')\,T_n.$$

Отсюда, въ силу (21),

$$\sum_{k=1}^{n} A_k\,\rho_p(a_k) = \frac{2}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(S_n\,\varphi^{(p)}(\eta') - T_n\,\varphi^{(p)}(\eta'')\right).$$

гдѣ η' и η'' суть значенія ξ формулы (21), соотвѣтствующія числамъ α' и α''; и, наконецъ,

$$(23)\qquad -\sum_{k=1}^{n} A_k\,\varphi_p(a_k) = \frac{2\,(S_n + T_n)}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{(p)}(\zeta),$$

гдѣ ζ есть нѣкоторое число, лежащее между -1 и $+1$.

8. Подставимъ теперь полученныя выраженія лѣвыхъ частей равенствъ (22) и (23) въ выраженіе остаточнаго числа R_n формулы (1) механическихъ квадратуръ [равенство (5)].

Получаемъ

$$R_n = \frac{2}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}\left(\varphi^{(p)}(\eta)\int_{-1}^{+1}|\,p(x)\,|\,dx + \varphi^{(p)}(\zeta)\,(S_n + T_n)\right),$$

откуда сейчасъ же выводимъ

$$(24)\quad R_n = \frac{2\,H_n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{(p)}(\xi) = \frac{2\,H_n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right),$$

гдѣ положено для сокращенія письма

$$(\gamma)\qquad H_n = \int_{-1}^{+1}|\,p(x)\,|\,dx + S_n + T_n.$$

Въ частности, если $f^{(p)}(x)$ мѣняетъ свой знакъ въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$, то, подобно предыдущему, можемъ писать

$$(25)\qquad R_n = \frac{2^2\,H_n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}\,f^{(p)}(\zeta),$$

гдѣ ζ есть число, лежащее между -1 и $+1$, а H_n есть извѣстное число при всякомъ данномъ n и данной функціи $p(x)$.

Формула (24) (въ частности, формула (25)) *даетъ точное выраженіе остаточнаго члена для любой формулы квадратуръ, какова бы ни была данная функція $p(x)$ и каковы бы ни были соотвѣтствующіе ей и даннымъ числамъ n и $p \leq 2n$ коэффиціенты A_k и ординаты a_k, — выраженіе, содержащее одну неопредѣленную величину ξ.*

9. Выраженіе H_n легко приводится къ слѣдующему виду

$$(\gamma_1)\qquad H_n = 2\left(S_n - \int_{e_2} p(x)\,dx\right) = 2\left(T_n + \int_{e_1} p(x)\,dx\right).$$

для чего стоитъ только принять въ разсчетъ равенство (3). Въ частности, если

$$p(x) = 1,$$

то

(26) $$\int_{-1}^{+1} \varphi_p(x)\,dx = 0.$$

Въ этомъ случаѣ выраженіе остаточнаго члена формулы механическихъ квадратуръ можно представить подъ видомъ

$$R_n = \frac{2^2(S_n - 1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\,\varphi^{(p)}(\xi) = \frac{2^2(S_n - 1)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Если $p(x)$ не принимаетъ отрицательныхъ значеній въ промежуткѣ $(-1, +1)$ и коэффиціенты A_k всѣ положительны, то

$$T_n = 0, \qquad S_n = \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx$$

и, слѣдовательно,

$$H_n = 2\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx.$$

Для случая $p(x) = 1$, въ силу (26), можемъ положить, очевидно,

$$H_n = \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = 2$$

и

(27) $$R_n = \frac{4}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Вообще, если для значеній p, большихъ нѣкотораго числа p_0,

(28) $$\int_{-1}^{+1} p(x)\,\varphi_p(x)\,dx = 0.$$

что будетъ имѣть мѣсто, если $p(x)$ есть полиномъ степени p_o, то, на основанiи (5), (23) и (3),

$$(29) \qquad R_n = \frac{2\left(2S_n - \int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,dx\right)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right) =$$

$$= \frac{2\left(2T_n + \int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,dx\right)}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(f^{(p)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Формула (24) даетъ сейчасъ же слѣдующiе предѣлы для погрѣшности R_n, которая получается при вычисленiи интеграла

$$\int\limits_{-1}^{+1} p(x)\,f(x)\,dx$$

при помощи той или иной данной формулы квадратуръ при данномъ числѣ n ординатъ a_k, а именно

$$(30) \quad -\frac{H_n}{1.3.5\ldots(2p-1)}(M-m) < R_n < \frac{H_n}{1.3.5\ldots(2p-1)}(M-m),$$

гдѣ подъ p слѣдуетъ разумѣть наибольшее изъ возможныхъ для данной формулы значенiй p.

10. Можно дать другое выраженiе для дополнительнаго члена R_n, которое, хотя и содержитъ не одну, а двѣ неопредѣленныхъ величины, но даетъ нѣсколько меньшее число для высшаго предѣла численнаго значенiя R_n, чѣмъ формула (24).

Если примемъ для $\rho_p(x)$ выраженiе (19) и повторимъ съ незначительными измѣненiями разсужденiя предыдущихъ §§овъ, то получимъ

$$(31) \qquad R_n = \frac{H_n}{1.3.5\ldots(2p-1)}\,\varphi^p(\xi)\,H_p(\alpha),$$

гдѣ $H_p(x)$ есть функцiя, опредѣляемая равенствомъ (18_1) (§ 4), H_n дается, какъ и раньше, формулой (γ), а ξ и α суть два числа, каждое изъ которыхъ лежитъ между -1 и $+1$.

Такъ какъ при всякомъ x

$$(32) \qquad H_p(x) \leqq 1 + \lambda_p.$$

гдѣ, напомнимъ,

$$\lambda_p = \frac{1.3.5\ldots(2p-1)}{2.4.6\ldots 2p} < \frac{1}{\sqrt{\pi p}}.$$

то, въ силу (31), получимъ

$$(33) \qquad |R_n| < \frac{H_n}{1.3.5\ldots(2p-1)}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\pi p}}\right)\frac{M-m}{2}.$$

Отношеніе правыхъ частей этого неравенства и неравенствъ (30) равно

$$\frac{1+\frac{1}{\sqrt{\pi p}}}{2}$$

и при достаточно большомъ n (или, что то же, p) близко къ $\frac{1}{2}$.

11. Формулы (24) и (31) годятся, какъ сказано, для любой формулы механическихъ квадратуръ и, въ частности, даютъ весьма простыя выраженія для остаточныхъ членовъ формулъ Котеса и Чебышева, которыя, насколько намъ извѣстно, до сихъ поръ найдены не были.

Такъ какъ формула Чебышева при данномъ числѣ n ординатъ остается точной для всякаго полинома степени n, то въ равенствѣ (24) надо положить, какъ это слѣдуетъ изъ нашихъ обозначеній,

$$p = n + 1.$$

Такимъ образомъ для формулы Чебышева получаемъ слѣдующее точное выраженіе остаточнаго члена съ одной неопредѣленной величиной ξ

$$(34) \qquad R_n = \frac{2H_n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\left(f^{(n+1)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right),$$

гдѣ

$$H_n = 2\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx, \qquad p(x) \geqq 0.$$

Формула (34), само собой разумѣется, годится лишь для тѣхъ значеній n, при которыхъ ординаты соотвѣтствующей формулы квадратуръ Чебышева вещественны.

Если воспользоваться равенствомъ (31), то найдемъ такое выраженіе дополнительнаго члена формулы Чебышева

$$(35) \qquad R_n = \frac{H_n}{1.3.5\ldots(2n+1)}\,H_{n+1}(\alpha)\left(f^{(n+1)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right).$$

Если, въ частности, $p(x) = 1$, то въ равенствахъ (34) и (35) нужно положить

$$H_n = 2.$$

Для формулы квадратуръ Котеса (обобщенной) нужно положить

$$p = n,$$

причемъ формулы (24) и (31) дадутъ

$$R_n = \frac{2\,H_n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\left(f^{(n)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right), \tag{36}$$

$$R_n = \frac{H_n}{1.3.5\ldots(2n-1)}\,H_n(\alpha)\left(f^{(n)}(\xi) - \frac{M+m}{2}\right), \tag{37}$$

гдѣ число H_n опредѣляется равенствомъ (γ_1) и, въ частности, при соблюденіи условія (28), равно

$$H_n = 2\,S_n - \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = 2\,T_n + \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx.$$

12. Равенства (24) и (31), какъ общія для всѣхъ возможныхъ формулъ механическихъ квадратуръ, даютъ, вообще говоря, болѣе грубые предѣлы погрѣшности вычисленій по сравненію съ извѣстными въ настоящее время наиболѣе точными выраженіями дополнительнаго члена для нѣкоторыхъ частныхъ видовъ формулъ механическихъ квадратуръ, выведенными на основаніи особыхъ, спеціально этимъ формуламъ присущихъ свойствъ.

Во многихъ случаяхъ, однако, результаты, доставляемые равенствами (24) и (31), можно считать удовлетворительными даже по сравненію съ тѣми, къ которымъ приводятъ только что упомянутыя уже извѣстныя формулы дополнительныхъ членовъ [1].

Такъ, предположимъ, напримѣръ, что $p(x) = 1$ и что производная $f^{(2n)}(x)$ не мѣняетъ знака въ промежуткѣ отъ -1 до $+1$, оставаясь положительной.

Обозначивъ черезъ R_n' остаточный членъ формулы Гаусса, получимъ

[1] Къ такимъ, если не ошибаемся, принадлежатъ лишь выраженія остаточнаго члена для формулъ Гаусса и имъ подобныхъ и для формулъ А. А. Маркова, имъ впервые полученныя.

по извѣстной формулѣ (А. А. Марковъ «Исчисленіе конечныхъ разностей», Одесса, 1911, стр. 86), положивъ $n = 5$,

$$\left| R'_5 \right| < \frac{81}{10^{11}} M.$$

Формула же (31) доставитъ

$$\left| R_n \right| < \frac{11}{10^{10}} M.$$

Послѣднее число превосходитъ предыдущее лишь менѣе, чѣмъ въ 1,4 раза.

Взявъ для другого примѣра формулу А. А. Маркова («Новыя приложенія непрерывныхъ дробей». ЗИАН., Кл. Ф. М. VIII с., т. III, nº 5, 1896)

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = 2\left(f\left(\sqrt{\frac{23}{60}}\right) - f\left(\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + f(0) - f\left(-\sqrt{\frac{13}{60}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{23}{60}}\right)\right) +$$
$$+ \lambda f^{(6)}(\xi),$$

имѣемъ

$$\left| \lambda f^{(6)}(\xi) \right| < \frac{141}{10^6} M.$$

По формулѣ же (31), при тѣхъ же условіяхъ, что и въ предыдущемъ случаѣ, получимъ

$$\left| R_5 \right| < \frac{601}{10^6} M,$$

результатъ нѣсколько худшій.

Замѣтимъ, что въ случаѣ, когда соблюдается условіе (28), число α заключается между наименьшей и наибольшей изъ ординатъ a_k соотвѣтствующей формулы квадратуръ, т. е., вообще говоря, меньше единицы (численно).

Въ каждомъ частномъ случаѣ можно искать верхній предѣлъ для $|H_p(\alpha)|$ болѣе низкій, чѣмъ тотъ, который взятъ нами, причемъ нѣсколько понизится и верхній предѣлъ для $|R_n|$.

Въ разсмотрѣнномъ выше частномъ случаѣ этотъ послѣдній можно еще понизить, если взять вмѣсто M разность $M - m$.

13. Вообще, равенства (24) и (31) приводятъ на практикѣ къ удовлетворительнымъ результатамъ при опредѣленіи числа несомнѣнно вѣрныхъ деся-

тичныхъ знаковъ, которые получаются при вычисленіи интеграловъ по соотвѣтствующимъ этимъ равенствамъ формуламъ механическихъ квадратуръ.

Ограничиваясь самыми простыми примѣрами, примѣнимъ формулу Чебышева къ интегралу

$$(38) \qquad \dot{I} = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{+1}\sin\frac{\pi}{4}(x+1)\,dx = 1$$

при 5 ординатахъ.

Полагая въ равенствѣ (35)

$$n = 5, \qquad f^{(6)}(x) = -\left(\frac{\pi}{4}\right)^7 \sin\frac{\pi}{4}(x+1),$$

выводимъ, произведя вычисленія,

$$|R_n| < 0{,}0000227\cdots$$

Формула же Чебышева даетъ приближенно

$$\dot{I} = 1{,}000004.$$

Сопоставляя это число съ предыдущимъ неравенствомъ убѣждаемся, что въ полученномъ числѣ 4 десятичныхъ знака несомнѣнно вѣрны.

Въ дѣйствительности, какъ видимъ, получается болѣе лишь однимъ вѣрнымъ десятичнымъ знакомъ.

Точно также, примѣнивъ формулу Чебышева къ вычисленію интеграла

$$(39) \qquad \dot{I} = \int_{-1}^{+1}\frac{dx}{3+x} = \log 2,$$

получимъ, при $n = 7$,

$$I = 0{,}6931467.$$

Изъ равенства (35) выводимъ при этомъ

$$|R_n| < 0{,}00004560.$$

Отсюда заключаемъ, что въ полученномъ числѣ 4 знака несомнѣнно вѣрны.

Въ дѣйствительности число вѣрныхъ знаковъ оказывается большимъ опять лишь на единицу.

Примѣнимъ еще къ вычисленію того же интеграла (39) формулу Котеса, положивъ $n = 11$.

Равенство (37) даетъ

$$|R_n| < \frac{(T_n + 1)(1 + \lambda_{11})}{1.3.5\ldots21} \frac{11!}{2^{12}}.$$

Въ данномъ случаѣ отрицательные коэффиціенты суть

$$A_3 = A_9 = -\frac{2.48525}{598752}.$$

$$A_5 = A_7 = -\frac{2.260550}{598752}.$$

Отсюда

$$T_n + 1 = \frac{458513}{149438} = 3,09\cdots$$

Далѣе,

$$1 + \lambda_{11} < 1,18, \qquad \frac{11!}{3.5\ldots21.2^{12}} = \frac{1}{13.16.17.19.21}.$$

Слѣдовательно,

$$|R_{11}| < 0,00000256\cdots.$$

Вычисленія по формулѣ Котеса, при $n = 11$, даютъ[1]

$$\dot{I} = 0,69314733.$$

Отсюда заключаемъ, что полученный результатъ содержитъ несомнѣнно 5 вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ.

Въ дѣйствительности число вѣрныхъ десятичныхъ знаковъ превосходитъ указанное опять лишь на единицу.

14. Въ предыдущемъ мы взяли для полинома $P_{p-1}(x)$ въ равенствѣ (5) первые p членовъ разложенія $f(x)$ по полиномамъ Лежандра, но могли бы для нашихъ цѣлей воспользоваться всякимъ другимъ разложеніемъ функціи $f(x)$ по полиномамъ даннаго вида, для котораго можно получить точное выраженіе остаточнаго члена $\rho_p(x)$.

---

[1] См., напр., А. Н. Крыловъ «Лекціи о приближенныхъ вычисленіяхъ». С.-Петербургъ, 1911, стр. 106.

Мы остановились на полиномахъ Лежандра, какъ на простѣйшихъ и наиболѣе извѣстныхъ, съ цѣлью сдѣлать всѣ разсужденія вполнѣ элементарными.

Что касается опредѣленія высшаго предѣла численнаго значенія R_n, то, въ заключеніе, замѣтимъ слѣдующее.

Равенство (5) остается, очевидно, справедливымъ, если положить въ немъ

$$\rho_p(x) = f(x) - P_{p-1}(x),$$

гдѣ $P_{p-1}(x)$ произвольный полиномъ степени $p-1$.

Понятно, что наименьшая величина для высшаго предѣла $|R_n|$ можетъ получиться, если взять за $P_{p-1}(x)$ полиномъ наименѣе отклоняющійся отъ $f(x)$ въ данномъ промежуткѣ.

Если обозначимъ это наименьшее отклоненіе черезъ $L_{p-1}(f)$, то получимъ

(40) $$|R_n| < H_n\, L_{p-1}(f),$$

гдѣ нужно положить

$$H_n = \int_{-1}^{+1} |p(x)|\, dx + \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Однако въ настоящее время не существуетъ никакихъ способовъ опредѣленія точнаго значенія величины $L_{p-1}(f)$ для любой дифференцируемой функціи $f(x)$; можно лишь установить болѣе или менѣе точно верхнюю границу, которой не можетъ превзойти отклоненіе $L_{p-1}(f)$.

Такъ, напр., можно показать, какъ это сдѣлано С. Н. Бернштейномъ[1] въ его диссертаціи, что

(41) $$L_{p-1}(f) < \frac{4 M_p}{2^p\, \Gamma(p+1)},$$

гдѣ M_p есть maximum $|f^{(p)}(x)|$ въ промежуткѣ $(-1, +1)$.

---

[1] «О наилучшемъ приближеніи непрерывныхъ функцій посредствомъ многочленовъ данной степени». Харьковъ, 1912, стр. 103.

При помощи этого неравенства получимъ

$$(42) \qquad |R_n| < \frac{4H_n}{2^p\,\Gamma(p+1)} M_p.$$

Этой формулой можно пользоваться для опредѣленія верхняго предѣла погрѣшности вычисленій опредѣленныхъ интеграловъ при помощи любой формулы механическихъ квадратуръ.

Однако при небольшихъ значеніяхъ числа n, обычно употребляемыхъ на практикѣ, неравенство (42) даетъ менѣе удовлетворительный результатъ, чѣмъ формулы (30) и (33), между тѣмъ какъ обстоятельный выводъ неравенства (42) требуетъ сложныхъ и не элементарныхъ разсужденій.

Такъ, напр., для формулы Чебышева неравенство (42) даетъ, при $p(x)=1$,

$$|R_n| < \frac{M_{n+1}}{2^{n-3}(n+1)!} = K_n M_{n+1},$$

ибо въ данномъ случаѣ нужно положить

$$H_n = 4,$$

а неравенство (33) обращается въ такое

$$|R_n| < \frac{2(1+\lambda_{n+1})}{1.3.5\ldots(2n+1)} M_{n+1} = L_n M_{n+1}.$$

Отношеніе

$$\frac{L_n}{K_n} = \frac{1+\lambda_{n+1}}{8\lambda_{n+1}}$$

остается меньшимъ единицы, пока $n < 15$.

Если же производная $f^{(n+1)}(x)$ не мѣняетъ знака въ промежуткѣ $(-1, +1)$, то

$$\frac{L_n}{K_n} < \frac{1}{2}$$

для указанныхъ значеній n.

Напримѣръ, для интеграла (38) по формулѣ (42) получимъ, при $n=7$,

$$|R_n| < 0{,}0000661\cdots,$$

тогда какъ неравенство (33) даетъ, какъ видѣли выше (§ 12),

$$|R_n| < 0{,}0000227\cdots$$

Лишь въ весьма рѣдкихъ случаяхъ, для функцій простѣйшаго вида, удается иногда найти высшій предѣлъ отклоненія $L_{p-1}(f)$ меньшій чѣмъ тотъ, который дается неравенствомъ (41).

При этомъ неравенство (40) можетъ доставить для верхняго предѣла погрѣшности число меньшее того, которое получается по формуламъ (30) или (33), но эти исключительные, простѣйшіе случаи не представляютъ интереса.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О сходимости формулъ механическихъ квадратуръ между безконечными предѣлами.

Я. В. Успенскаго.

(Представлено академикомъ **В. А. Стекловымъ** въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ Наукъ 30 марта 1916 г.).

§ 1. Предметомъ настоящей замѣтки является выясненіе случаевъ сходимости формулъ механическихъ квадратуръ типа формулы Гаусса, служащихъ для приближеннаго вычисленія интеграловъ между безконечными предѣлами.

Эти формулы, какъ извѣстно, характеризуются слѣдующимъ образомъ.

Пусть въ предѣлахъ интегрированія a и $+\infty$ функція $p(x)$ не получаетъ отрицательныхъ значеній и притомъ такова, что всѣ интегралы

$$\int_a^\infty p(x)\, x^n\, dx = c_n; \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

иначе называемые моментами, существуютъ. При такихъ условіяхъ при всякомъ заданномъ m можно подобрать m чиселъ

$$x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_m,$$

заключенныхъ между a и $+\infty$, такъ, чтобы формула

$$\int_a^\infty p(x)\, f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_m f(x_m) \quad \ldots\ldots (1)$$

была точной для всякой цѣлой функціи $f(x)$ степени $2m-1$ или ниже. Для другихъ функцій эта формула будетъ только приближенной. Является интересный вопросъ, способна ли она давать неопредѣленное приближеніе, т. е. будетъ-ли правая часть при безпредѣльномъ увеличеніи m имѣть предѣломъ интегралъ лѣвой части. Этотъ вопросъ *о сходимости* формулы квадратуръ въ случаѣ конечныхъ предѣловъ почти исчерпывающимъ образомъ рѣшилъ Stieltjes при весьма общихъ предположеніяхъ относительно функціи $p(x)$ въ замѣчательной работѣ: «Quelques recherches sur la théorie des quadratures, dites mécaniques»[1]. Въ недавней замѣткѣ[2] академикъ В. А. Стекловъ вновь разсмотрѣлъ этотъ и даже нѣсколько болѣе общій вопросъ съ помощью совершенно элементарныхъ соображеній. Изслѣдованіе сходимости въ случаѣ безконечныхъ предѣловъ представляетъ значительно большія трудности. Самъ Stieltjes, а затѣмъ академики А. А. Марковъ и Н. Я. Сонинъ[3] изучали вопросъ о сходимости непрерывной дроби, въ которую формально разлагается интегралъ

$$\int_a^\infty \frac{p(x)\,dx}{x-z},$$

равносильный вопросу о сходимости формулы (1) для случая $f(x)=\frac{1}{x-z}$. Мы предполагаемъ разсмотрѣть вопросъ болѣе общій, допуская возможность безконечнаго возрастанія функціи $f(x)$ вмѣстѣ съ x. Слѣдуетъ замѣтить, что нашъ способъ изслѣдованія представляетъ нѣкоторое сходство съ пріемами В. А. Стеклова, которыми онъ пользуется въ двухъ недавно напечатанныхъ замѣткахъ[4].

§ 2. Пусть $\varphi(x)$ непрерывная функція съ непрерывной производной, равная 0 при $x \geqq l$.

Пусть, сверхъ того,

$$|\varphi'(x)| \leqq \mu \text{ при } 0 \leqq x \leqq l \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (a)$$

---

[1] Annales de l'Ecole Normale, 1884, t. I, série III.

[2] О приближенномъ вычисленіи опредѣленныхъ интеграловъ при помощи формулъ механическихъ квадратуръ. Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. № 4, 1916 г.

[3] Stieltjes. Recherches sur les fractions continues. Annales de la Faculté de Toulouse, 1894, T. VIII—IX. А. Марковъ. Deux démonstrations de la convergence de certaines fractions continues. Acta mathematica, T. 19. Н. Сонинъ. Sur l'intégrale $\int_a^b F(x)\frac{dx}{z-x}$. Mémoires de l'Acad. des Sciences de St.-Pétersbourg. T. XXXVIII, № 14, Série VII.

[4] ИАН. n° 6 и n° 5. 1916.

Тогда нетрудно убѣдиться, что для всѣхъ $x \geqq 0$

$$|\varphi(x)| \leqq \mu l = M \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Введемъ теперь въ разсмотрѣніе функцію $f(x) = \varphi(x^2)$, которая, очевидно, обладаетъ слѣдующими свойствами:

$$f(-x) = f(x)$$

$$f(x) = 0, \quad f'(x) = 0, \text{ при } |x| \geqq \sqrt{l}$$

$$|f(x)| \leqq M, \quad |f'(x)| \leqq 2\sqrt{l}\,\mu \text{ при всякомъ } x.$$

На основаніи результатовъ работы Jackson'а[1] возможно найти полиномъ $P_{2m}(x)$ степени $\leqq 2m$ такъ, чтобы для всѣхъ значеній x, удовлетворяющихъ неравенствамъ

$$-A \leqq x \leqq A,$$

было

$$|f(x) - P_{2m}(x)| < k \cdot 2\sqrt{l}\,\mu \cdot \frac{A}{m} = L\frac{A}{m} = \sigma \ldots\ldots\ldots (2).$$

гдѣ k нѣкоторая численная постоянная. Измѣняя въ этомъ неравенствѣ x на $-x$, по указанному выше свойству функціи $f(x)$, получимъ

$$|f(x) - P_{2m}(-x)| < \sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

Отсюда и изъ (2), полагая

$$\frac{P_{2m}(x) + P_{2m}(-x)}{2} = \alpha_0 x^{2m} + \alpha_1 x^{2m-2} + \ldots + \alpha_m = T_m(x^2),$$

найдемъ, что на всемъ отрѣзкѣ $-A$, $+A$ будетъ выполняться неравенство

$$|f(x) - T_m(x^2)| < \frac{LA}{m} = \sigma \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

На всемъ этомъ отрѣзкѣ, сверхъ того, будемъ имѣть

$$|T_m(x^2)| < M + \sigma = M_1.$$

[1] Jackson. Approximation by trigonometric sums and polynomials. Transact. of the americ. mathem. soc. Vol. XIII, nº 4, 1912.

Для дальнѣйшаго намъ необходимо имѣть верхній предѣлъ численнаго значенія полинома $T_m(x^2)$, для чего послужитъ замѣчательная теорема Чебышева[1]: если на отрѣзкѣ —1, +1 численное значеніе полинома степени n не превышаетъ числа E, то при всякомъ ξ, численно большемъ 1, оно не можетъ превышать числа

$$E\left\{\frac{(\xi+\sqrt{\xi^2-1})^n+(\xi-\sqrt{\xi^2-1})^n}{2}\right\}$$

Изъ этой теоремы въ примѣненіи къ нашему случаю нетрудно вывести неравенство

$$|T_m(x^2)| < M_1\left(\frac{2x}{A}\right)^{2m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

имѣющее мѣсто для $x^2 \geqq A^2$. Полагая $x^2 = t$, изъ сличенія неравенствъ (4) и (5) выводимъ заключеніе: для функціи $\varphi(t)$ со свойствами, указанными въ началѣ этого §, возможно найти полиномъ $T_m(t)$ произвольно заданной степени m такъ, чтобы при $0 \leqq t \leqq A^2$ было

$$|\varphi(t) - T_m(t)| < \frac{LA}{m} = \sigma,$$

а при $t \geqq A^2$

$$|T_m(t)| < M_1\left(\frac{4t}{A^2}\right)^m.$$

Отсюда сразу вытекаетъ слѣдствіе: *если функція $\psi(x)$ опредѣлена при $x \geqq a$, непрерывна, имѣетъ непрерывную производную и равна 0 внѣ промежутка отъ a до $a+l$, то для всякаго m можно найти полиномъ $\Pi_m(x)$ степени m такъ, чтобы при $a \leqq x \leqq A^2 + a$ было*

$$|\psi(x) - \Pi_m(x)| < \frac{LA}{m} = \sigma, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

гдѣ L не зависитъ отъ A и m, а при $x \geqq A^2 + a$

$$|\Pi_m(x)| < M_1\left(\frac{4(x-a)}{A^2}\right)^m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

---

[1] Чебышевъ. О функціяхъ мало удаляющихся отъ нуля при нѣкоторыхъ величинахъ перемѣнной. Сочиненія Т. 2, стр. 343. См. также, сочиненія, Т. 2, стр. 701.

§ 3. Сохраняя обозначенія предыдущаго §, мы будемъ имѣть съ одной стороны совершенно точно

$$\int_a^{\infty} p(x)\,\Pi_m(x)\,dx = A_1\,\Pi_m(x_1) + \ldots + A_m\,\Pi_m(x_m) \quad \ldots\ldots (8)$$

а съ другой стороны можемъ положить

$$\int_a^{\infty} p(x)\,\psi(x)\,dx = A_1\,\psi(x_1) + \ldots + A_m\,\psi(x_m) + R_m \quad \ldots\ldots (9)$$

Имѣя въ виду, что всѣ коэффиціенты A_k положительны, изъ этихъ равенствъ выведемъ

$$|R_m| < \int_a^{\infty} p(x)\,|\psi(x) - \Pi_m(x)|\,dx + \sum A_k\,|\psi(x_k) - \Pi_m(x_k)|$$

и далѣе въ силу (6) и (7) получимъ

$$|R_m| < \sigma\int_a^{A^2+a} p(x)\,dx + \sigma\sum_{x_k \leqq A^2+a} A_k + M_1\left\{\frac{4}{A^2}\left(1 + \frac{|a|}{A^2+a}\right)\right\}^m\left[\int_{A^2+a}^{\infty} p(x)\,x^m\,dx + \sum_{x_k > A^2+a} A_k x_k^m\right] (10),$$

гдѣ суммы

$$\sum_{x_k \leqq A^2+a} A_k \quad \text{и} \quad \sum_{x_k > A^2+a} A_k x_k^m$$

распространяются на такія значки k, для которыхъ соотвѣтственно $x_k \leqq A^2 + a$ и $x_k > A^2 + a$.

Принявъ во вниманіе, что

$$c_m = \int_a^{\infty} p(x)\,x^m\,dx = A_1 x_1^m + \ldots + A_m x_m^m$$

и отмѣтивъ, что при достаточно большихъ m

$$c_m > 0,$$

легко найдемъ

$$\int_{A^2+a}^{\infty} p(x)\, x^m\, dx < c_m + c_0\, |a|^m$$

$$\sum_{x_k > A^2+a} A_k x_k^m < c_m + c_0\, |a|^m$$

и потомъ изъ (10) выведемъ

$$|R_m| < 2c_0\sigma + 2M_1\,(c_m + c_0\,|a|^m)\left\{\frac{4}{A^2}\left(1 + \frac{|a|}{A^2+a}\right)\right\}^m \ldots (11)$$

Чтобы указать случаи, когда можно утверждать сходимость формулы квадратуръ, мы предположимъ, что при безконечномъ возрастаніи m число

$$c_m \left(\frac{\log m}{m}\right)^{2m}$$

стремится къ 0. Тогда изъ (11) нетрудно вывести, что $\underset{m=\infty}{\text{пред.}} R_m = 0$. Въ самомъ дѣлѣ, взявъ

$$A = \frac{2m}{\log m};$$

найдемъ

$$\sigma = \frac{LA}{m} = \frac{2L}{\log m},$$

откуда ясно, что $\underset{m=\infty}{\text{пред.}} \sigma = 0$. Второй же членъ неравенства (11) стремится къ 0 въ силу сдѣланнаго предположенія о моментахъ. Мы можемъ, слѣдовательно, утверждать, *что формула квадратуръ (1) сходится для всякой непрерывной функціи съ непрерывной производной, которая равна 0 внѣ промежутка конечной длины, если выполнено условіе*

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\; c_m \left(\frac{\log m}{m}\right)^{2m} = 0.$$

Это заключеніе остается въ силѣ для *всякой непрерывной функціи $\varphi(x)$, равной 0 внѣ промежутка конечной длины.* Въ этомъ легко убѣдиться введеніемъ вспомогательной функціи

$$\psi(x) = \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varphi(x)\, dx,$$

если повторить дословно разсужденія, примѣняемыя В. А. Стекловымъ въ теоріи замкнутости[1].

§ 4. Имѣя въ виду обобщить полученный результатъ, мы выведемъ нѣкоторыя заключенія о распредѣленіи чиселъ $x_1, x_2, \ldots x_m$. При этомъ функцію $p(x)$ подчинимъ слѣдующему ограниченію: для всякихъ двухъ чиселъ $\beta > \alpha \geqq a$ интегралъ

$$\int_{\alpha}^{\beta} p(x)\, dx$$

положителенъ. Положивъ въ формулѣ квадратуръ

$$\int_{a}^{\infty} p(x)\, f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_m f(x_m) + R_m \ldots (1)$$

непрерывную функцію $f(x)$ положительной въ конечномъ промежуткѣ (ρ, σ) и равной нулю внѣ его, мы будемъ имѣть въ лѣвой части формулы (1) положительное число, а R_m при достаточно большомъ m будетъ какъ угодно малымъ.

Отсюда вытекаетъ заключеніе: *во всякій конечный промежутокъ (ρ, σ) при достаточно большомъ m попадаютъ числа x_k.* Это заключеніе позволяетъ далѣе утверждать, что при безконечно возрастающемъ m разности между каждыми двумя сосѣдними числами x_k, попадающими въ конечный промежутокъ, а равно и разности между границами этого промежутка и ближайшими къ нимъ числами x_k, стремятся къ 0. Установивъ это и примѣняя разсужденія Stieltjes'а[2] почти дословно, можно доказать, *что формула квадратуръ сходится для всякой интегрируемой въ смыслѣ Риманна функціи, равной 0 внѣ промежутка конечной длины.*

Можно было бы и не прибѣгать къ разсужденіямъ Stieltjes'а, основаннымъ на неравенствахъ Чебышева, а поступать подобно В. А. Стеклову[3].

§ 5. Положивъ $f(x) = x^s$, гдѣ s цѣлое число > 0, при $x \leqq G$ и $f(x) = 0$ при $x > G$, заключимъ въ силу доказаннаго въ предыдущемъ §, что сумма

$$\sum_{x_k \leqq G} A_k x_k^s$$

[1] В. А. Стекловъ. Sur la théorie de fermeture etc. Mém. d. l'Acad. d. Sciences. Cl. Phys.-Math. VIII série, T. XXX, n° 4, 1911.

[2] loc. cit.

[3] loc. cit.

при безконечномъ возрастаніи m стремится къ предѣлу

$$\int_a^G p(x)\,x^s\,dx$$

а, слѣдовательно, сумма

$$\sum_{x_k > G} A_k x_k^s$$

стремится къ предѣлу

$$\int_G^{\infty} p(x)\,x^s\,dx.$$

Взявъ G настолько большимъ, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_G^{\infty} p(x)\,x^s\,dx < \frac{\varepsilon}{2},$$

гдѣ ε заданное положительное число, мы изъ сказаннаго заключимъ, что при всѣхъ достаточно большихъ m будетъ имѣть мѣсто неравенство

$$\sum_{x_k > G} A_k x_k^s < \varepsilon.$$

Установивъ это, предположимъ, что $f(x)$ интегрируема въ смыслѣ Римана въ каждомъ конечномъ промежуткѣ и при достаточно большихъ x удовлетворяетъ неравенству

$$|f(x)| < x^s,$$

гдѣ s нѣкоторое цѣлое и положительное число. При такихъ условіяхъ для остатка формулы квадратуръ нетрудно установить неравенство

$$|R_m| < \left|\int_a^G p(x) f(x)\,dx - \sum_{x_k \leqq G} A_k f(x_k)\right| + \left|\int_G^{\infty} p(x) f(x)\,dx\right| + \left|\sum_{x_k > G} A_k x_k^s\right|.$$

Назначивъ по произволу положительное число ε, возьмемъ G настолько большимъ, чтобы

$$\left|\int_G^{\infty} p(x)\,f(x)\,dx\right| < \varepsilon$$

$$\int_G^{\infty} p(x)\,x^s\,dx < \varepsilon/_2.$$

Установивъ значеніе G, возьмемъ настолько большое число N, чтобы при $m > N$ было

$$\left|\int_a^G p(x) f(x)\, dx - \sum_{x_k \leqq G} A_k f(x_k)\right| < \varepsilon$$

$$\sum_{x_k > G} A_k x_k^s < \varepsilon.$$

Тогда будемъ имѣть

$$|R_m| < 3\varepsilon \text{ при } m > N,$$

т. е. $\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\, R_m = 0$. Такимъ образомъ устанавливается заключеніе: *формула квадратуръ (1) сходится для всякой интегрируемой функціи $f(x)$, которая для достаточно большихъ x удовлетворяетъ неравенству*

$$|f(x)| < x^s,$$

если

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\; c_m \left(\frac{\log m}{m}\right)^{2m} = 0.$$

Принявъ

$$f(x) = \frac{1}{x - z}$$

гдѣ z какое-либо комплексное число, не лежащее на отрѣзкѣ $(0, +\infty)$, мы можемъ утверждать, *что непрерывная дробь для интеграла*

$$\int_a^{\infty} \frac{p(x)\, dx}{x - z}$$

сходится къ этому интегралу всякій разъ, какъ

$$\underset{m=\infty}{\text{пред.}}\; c_m \left(\frac{\log m}{m}\right)^{2m} = 0.$$

Подобное предложеніе, но при болѣе ограничительныхъ условіяхъ какъ для закона возрастанія моментовъ, такъ и для значенія z въ случаѣ $a < 0$, далъ Perron[1].

---

[1] Mathem. Annalen, 74, 1913.

§ 6. Если мы будемъ считать нижній предѣлъ интеграла не a, а $-\infty$, и разсматривать формулу квадратуръ вида

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x) f(x)\, dx = A_1 f(x_1) + A_2 f(x_2) + \ldots + A_m f(x_m) + R_m,$$

то совершенно такъ-же, какъ выше, можемъ установить предложеніе: *если $f(x)$ интегрируемая функція и при достаточно большихъ x удовлетворяетъ неравенству*

$$|f(x)| < x^s,$$

то формула квадратуръ будетъ сходящейся, когда четные моменты

$$c_{2m} = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, x^{2m}\, dx$$

удовлетворяютъ условію

$$\text{пред.}_{m=\infty}\; c_{2m} \left(\frac{\log m}{m}\right)^{2m} = 0.$$

§ 7. Предполагая только существованіе моментовъ трудно сдѣлать болѣе широкія предположенія о функціи $f(x)$ при безконечно возрастающемъ x. Въ частныхъ случаяхъ, когда дана функція $p(x)$, возможно идти дальше, какъ мы покажемъ на двухъ наиболѣе интересныхъ примѣрахъ. Примемъ $p(x) = e^{-x^2}$ и будемъ разсматривать формулу квадратуръ между предѣлами $-\infty$, $+\infty$. Въ этомъ случаѣ числа x_1, x_2, $\ldots x_m$ будутъ корнями уравненія [1]

$$\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

Для предстоящаго изслѣдованія необходимо ближе познакомиться съ распредѣленіемъ корней этого уравненія. Легко убѣдиться, что функція

$$y = e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m}$$

[1] А. Марковъ. Sur les racines de l'équation $\frac{d^m e^{-x^2}}{dx^m} = 0$. Извѣстія Императорской Академіи Наукъ 1898.

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$y'' + (2m + 1 - x^2)y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Съ помощью этого уравненія можно обнаружить, что корни уравненія (12) заключены между $-\sqrt{2m+1}$ и $\sqrt{2m+1}$ [1]. Въ самомъ дѣлѣ, пусть наибольшій положительный корень есть α. Такъ какъ

$$y(\alpha) = 0, \qquad y(+\infty) = 0,$$

то

$$y'(\beta) = 0, \text{ гдѣ } \alpha < \beta.$$

Но съ другой стороны

$$y'(+\infty) = 0,$$

слѣдовательно

$$y''(\gamma) = 0, \text{ гдѣ } \gamma > \beta > \alpha.$$

Въ силу уравненія (13) необходимо должно быть $2m + 1 - \gamma^2 = 0$, откуда $\gamma = \sqrt{2m+1}$. Это число есть предѣлъ положительныхъ корней; предѣлъ же отрицательныхъ будетъ $-\sqrt{2m+1}$, такъ какъ корни располагаются симметрично относительно 0. Обозначимъ черезъ $\varepsilon > 0$ число, которое ближе опредѣлимъ потомъ, и будемъ разсматривать значенія x въ области

$$-\sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)} \leqq x \leqq \sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)} \ldots\ldots (14)$$

Для такихъ x

$$2m + 1 - x^2 \geqq \varepsilon(2m+1),$$

слѣдовательно по извѣстной теоремѣ Штурма между каждыми двумя корнями любого интеграла уравненія

$$Y'' + \varepsilon(2m+1)\, Y = 0,$$

которые численно $\leqq \sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)}$, лежитъ хотя бы одинъ корень уравненія (12). Взявъ $Y = \cos\sqrt{\varepsilon(2m+1)}\, x$ легко найдемъ, что во всякомъ промежуткѣ шириною $\frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon(2m+1)}}$, не выходящемъ изъ области (14), лежитъ корень уравненія (12).

---

[1] Срв. A. Markoff. Wahrscheinlichkeitsrechnung. Leipzig u. Berlin, 1912, Anhang I, стр. 259, гдѣ авторъ доказываетъ, что корни заключены между $-\sqrt{2m}$ и $\sqrt{2m}$.

Послѣ этихъ замѣчаній предположимъ, что при достаточно большихъ x функція $f(x)$ удовлетворяетъ неравенству

$$|f(x)| < e^{x^2 - \alpha |x|}$$

гдѣ $\alpha > 0$. Обозначимъ затѣмъ черезъ a и l положительныя числа, которыя характеризуемъ подробнѣе послѣ. Разсмотримъ сумму

$$S = \sum_{a \leqq x_k < a+l} A_k |f(x_k)|$$

распространенную на всѣ корни x_k, которые $\geqq a$ и $< a + l$. Въ силу извѣстныхъ неравенствъ Чебышева[1] имѣемъ

$$S < e^{(a+l)^2 - \alpha(a+l)} \int_{x_i}^{x_j} e^{-x^2} dx,$$

гдѣ x_i корень ближайшій къ a и меньшій a, а x_j — корень, ближайшій къ $a + l$ и большій $a + l$.

Если $a \leqq \sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)}$, то по замѣченному выше во всякомъ случаѣ

$$x_i > a - \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon(2m+1)}}$$

слѣдовательно

$$S < e^{(a+l)^2 - \alpha(a+l)} \int_{a - \frac{2\pi}{\sqrt{\varepsilon(2m+1)}}}^{\infty} e^{-x^2} dx < e^{-a\left(\alpha - 2l - \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon(2m+1)}}\right)}.$$

Возьмемъ теперь

$$\varepsilon = \frac{16\pi^2 (\log m)^2}{2m+1}$$

$$l = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{2}\sigma,$$

гдѣ $\sigma < \alpha$ и > 0. Тогда, положивъ $\beta = \frac{1}{2}\sigma$, при достаточно большихъ m будемъ имѣть

$$S < e^{-a\beta}.$$

---

[1] Чебышевъ. Sur les valeurs limites des intégrales, Journal de Liouville. T. XIX, 1874, 2e sér. А. Марковъ. О нѣкоторыхъ приложеніяхъ алгебраическихъ непрерывныхъ дробей. С.-Петербургъ. 1884.

Теперь уже нетрудно установить для суммы

$$S' = \sum_{a \leqq x_k \leqq \sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)}} A_k f(x_k)$$

неравенство

$$|S'| < e^{-\beta a}(1 + e^{-\beta l} + e^{-2\beta l} + \ldots) = \frac{e^{-\beta a}}{1 - e^{-\beta l}}.$$

Съ другой стороны находимъ

$$\sum_{\sqrt{(2m+1)(1-\varepsilon)} < x_k < \sqrt{2m+1}} A_k f(x_k) < e^{\varepsilon(2m+1) - \alpha\sqrt{2m+1} + \frac{4\pi}{\sqrt{\varepsilon}}},$$

такъ что наконецъ

$$\left|\sum_{x_k \geqq a} A_k f(x_k)\right| < \frac{e^{-\beta a}}{1 - e^{-\beta l}} + e^{\frac{\sqrt{2m+1}}{\log m} - \alpha\sqrt{2m+1} + 16\pi^2(\log m)^2} \quad ..(15)$$

Совершенно такое же неравенство найдемъ для суммы

$$\sum_{x_k \leqq -a} A_k f(x_k).$$

Послѣ этого, назначивъ произвольное положительное число η, возьмемъ a столь большимъ, чтобы было

$$\frac{e^{-\beta a}}{1 - e^{-\beta l}} < \eta, \quad \left|\int_a^\infty e^{-x^2} f(x)\,dx\right| < \eta, \quad \left|\int_{-\infty}^{-a} e^{-x^2} f(x)\,dx\right| < \eta.$$

Затѣмъ опредѣляемъ такое число N, чтобы при $m > N$ оказалось

$$e^{\frac{\sqrt{2m+1}}{\log m} - \alpha\sqrt{2m+1} + 16\pi^2(\log m)^2} < \eta$$

$$\left|\int_{-a}^{a} e^{-x^2} f(x)\,dx - \sum_{-a < x_k < +a} A_k f(x_k)\right| < \eta,$$

что возможно, такъ какъ моменты функціи $p(x) = e^{-x^2}$ удовлетворяютъ условію § 6. Имѣя въ виду неравенство (15), безъ труда видимъ, что при $m > N$

$$|R_m| < 7\eta.$$

Слѣдовательно, разсматриваемая формула квадратуръ будетъ сходящейся, если при достаточно большихъ x

$$|f(x)| < e^{x^2 - \alpha|x|}, \quad \text{гдѣ } \alpha > 0.$$

§ 8. Наконецъ примемъ

$$p(x) = x^{\lambda - 1} e^{-x},$$

гдѣ $\lambda > 0$ и будемъ разсматривать формулу квадратуръ между предѣлами 0 и $+\infty$. Въ этомъ случаѣ числа $x_1, x_2, \ldots x_m$ будутъ корнями полинома

$$P_m = e^x x^{1-\lambda} \frac{d^m x^{m+\lambda-1} e^{-x}}{dx^m}.$$

Нетрудно установить, что функція

$$v = e^{-\frac{1}{2}x} x^{\frac{\lambda}{2}} P_m$$

удовлетворяетъ дифференціальному уравненію

$$v'' + v\left(\frac{m + \frac{\lambda}{2}}{x} - \frac{1}{4} + \frac{\lambda^2}{4x^2}\right) = 0.$$

На основаніи этого можно совершенно такъ-же, какъ въ § 7, показать, что всѣ корни полинома $P_m(x)$ меньше $4m + 3\lambda$. Положивъ затѣмъ $\sigma > 1$, $\frac{\sigma - 1}{4} = k^2$, можно убѣдиться, что во всякомъ промежуткѣ ширины $\frac{2\pi}{k}$, который не выходитъ изъ области

$$0 \leqq x \leqq \frac{4m}{\sigma}.$$

навѣрно лежитъ хотя бы одинъ корень полинома $P_m(x)$. Положивъ, что при достаточно большихъ x функція $f(x)$ удовлетворяетъ неравенству

$$|f(x)| < e^{hx}, \text{ гдѣ } h < 1$$

и принявъ въ соображеніе, что

$$\sum_{\alpha \leqq x_k < \beta} A_k < \int_{\alpha - \frac{2\pi}{k}}^{\infty} x^{\lambda - 1} e^{-x}\, dx < \frac{e^{-\alpha + \frac{2\pi}{k}}}{\lambda}\left(\alpha - \frac{2\pi}{k}\right)^{\lambda},$$

если $\alpha \leqq \frac{4m}{\tau}$, легко найдемъ

$$\left|\sum_{\alpha \leqq x_k < \alpha+l} A_k f(x_k)\right| < \gamma \cdot \alpha^\lambda e^{-(1-h)\alpha}; \quad \gamma = \frac{e^{hl+\frac{2\pi}{k}}}{\lambda}$$

и отсюда дальше выведемъ

$$\left|\sum_{\alpha \leqq x_k < \frac{4m}{\tau}} A_k f(x_k)\right| < \gamma \left\{\alpha^\lambda e^{-(1-h)\alpha} + (\alpha+l)^\lambda e^{-(1-h)(\alpha+l)} + \ldots\right\} = \psi(\alpha).$$

Послѣ этого безъ труда установимъ неравенство

$$\left|\sum_{x_k \geqq \frac{4m}{\tau}} A_k f(x_k)\right| < e^{h(4m+3\lambda)} \int_{\frac{4m}{\tau}-\frac{2\pi}{k}}^{\infty} x^{\lambda-1} e^{-x} dx < \gamma' \cdot m^\lambda e^{-\frac{4m}{\tau}(1-h\tau)},$$

гдѣ γ' при безконечномъ возрастанiи m остается конечнымъ. Наконецъ, подчинимъ число τ условiю

$$h\tau < 1.$$

Въ силу совокупности выведенныхъ неравенствъ находимъ, что

$$|R_m| < \left|\int_0^\alpha x^{\lambda-1} e^{-x} f(x)\, dx - \sum_{x_k<\alpha} A_k f(x_k)\right| +$$

$$+ \left|\int_\alpha^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} f(x)\, dx\right| + \psi(\alpha) + \gamma' m^\lambda e^{-\frac{4m}{\tau}(1-h\tau)}$$

Обозначивъ черезъ η произвольно заданное положительное число, выберемъ α столь большимъ, чтобы удовлетворялись неравенства

$$\psi(\alpha) < \eta$$

$$\left|\int_\alpha^\infty x^{\lambda-1} e^{-x} f(x)\, dx\right| < \eta.$$

Затѣмъ, имѣя въ виду, что моменты функціи $x^{\lambda-1}e^{-x}$ удовлетворяютъ условію § 5, мы можемъ найти такое число N, чтобы при $m > N$ было

$$\left|\int_0^{\alpha} x^{\lambda-1} e^{-x} f(x)\,dx - \sum_{x_k < \alpha} A_k f(x_k)\right| < \eta$$

$$\gamma' m^{\lambda} e^{-\frac{4m}{\sigma}(1-h\sigma)} < \eta,$$

но тогда получимъ

$$|R_m| < 4\eta \text{ при } m > N.$$

Это позволяетъ высказать заключеніе: *въ случаѣ* $p(x) = x^{\lambda-1}e^{-x}$ *формула квадратуръ будетъ сходящейся для всякой интегрируемой функціи* $f(x)$, *которая при достаточно большихъ* x *удовлетворяетъ неравенству*

$$|f(x)| < e^{hx}, \qquad h < 1.$$

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О системѣ α въ Гончихъ Собакахъ.

А. А. Бѣлопольскаго.

(Доложено въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 27 апрѣля 1916 г.).

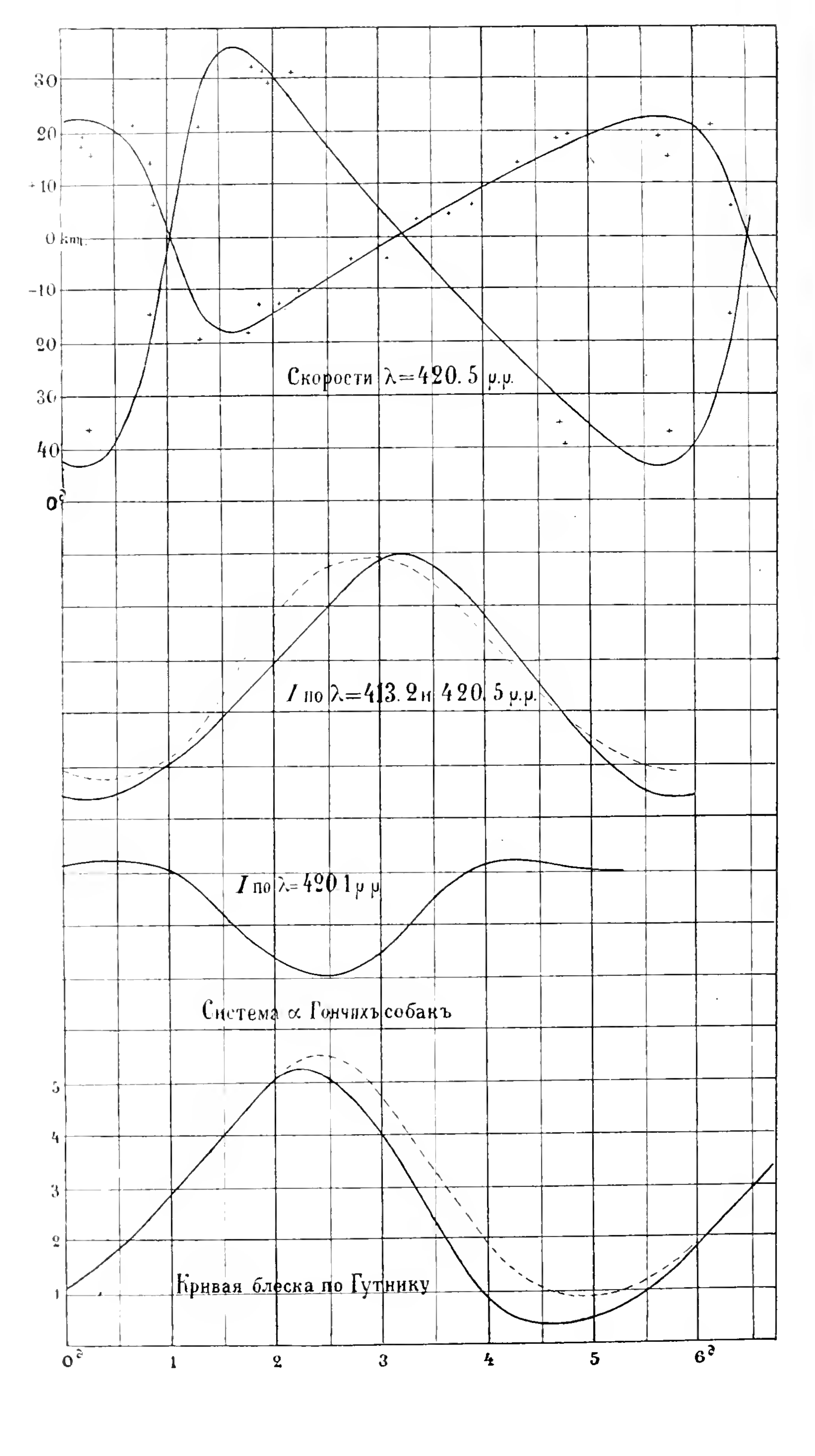
Послѣ появленія въ печати моей статьи, содержащей изслѣдованіе спектра звѣзды α Гончихъ Собакъ (см. ИАН. и ИНГО. въ Пулковѣ № 70) получена была статья г. Гутника, содержащая фотометрическія изслѣдованія той-же звѣзды (Guthnick und Prager. Photoelectrische Untersuchungen an spectroskop. Doppelsternen. Berlin-Babelsberg).

Любопытно и важно сопоставить между собой результаты тѣхъ и другихъ изслѣдованій.

Напомню вкратцѣ результаты спектральныхъ изслѣдованій. Въ спектрѣ этой звѣзды (типа *A* съ ясно выраженными линіями металловъ) встрѣчаются два сорта линій: постоянной интенсивности и неизмѣнной длины волны и перемѣнной интенсивности и перемѣнной длины волны; перемѣнныя интенсивности періодичны и періодъ былъ найденъ по наблюденіямъ 1913, 1914 и 1915 гг. (послѣднія еще не опубликованы) равнымъ 5.47 сут.

Перемѣнныя линіи въ свою очередь раздѣляются на двѣ группы: наибольшая интенсивность однѣхъ совпадаетъ по времени съ наименьшей интенсивностью другихъ и обратно. Къ первой категоріи принадлежатъ линіи, отожествленныя съ линіями Европія ($\lambda = 413.0$ $\mu\mu$, 420.5 $\mu\mu$, 429.0 $\mu\mu$ и т. д.); ко вторымъ — линіи неизвѣстнаго химическаго элемента ($\lambda = 420.1$ $\mu\mu$, 425.6 $\mu\mu$, 427.4 $\mu\mu$ и т. д.).

Лучевыя скорости по смѣщенію перемѣнныхъ линій такъ-же разнятся для двухъ категорій линій, т. е. эпохи одинаковыхъ фазъ (максимальныхъ скоростей или минимальныхъ) отличаются на полперіода. Линіи того и другого типа въ опредѣленныя эпохи раздваиваются. Это болѣе опредѣленно наблюдалось въ линіяхъ 2-го подраздѣленія ($\lambda = 420.1$ $\mu\mu$). Наибольшая разность лучевыхъ скоростей получилась равною отъ 54 до 60 [illegible].


30
20
+10
0 km.
−10
20
30
40
Скорости λ=420.5 μ.μ.
0ᵈ
I по λ=413.2 и 420.5 μ.μ.
I по λ=420.1 μ.μ.
Система α Гончихъ собакъ
5
4
3
2
1
Кривая блеска по Гутнику
0ᵈ
1
2
3
4
5
6ᵈ

Въ моей статьѣ я сдѣлалъ гипотезу, что мы имѣемъ дѣло со спектрально двойной звѣздой, для орбиты которой $i = 90^\circ$ и вывелъ элементы: $a = 4000000$ km., $m_1 + m_2 = 0.11 \odot$; $\gamma = -5$ km. Это относится какъ къ линіямъ Европія, такъ и къ линіямъ неизвѣстнаго химическаго вещества, характеризуемаго линіями $\lambda = 420.1$ $\mu\mu$. и т. д. Нужно было ожидать подтвержденія этихъ выводовъ отъ фотометрическихъ изслѣдованій звѣзды— звѣзда должна быть перемѣнной.

Фотометрическія изслѣдованія г. Гутника при помощи его высокочувствительнаго прибора подтвердили это ожиданіе.

Звѣзда оказалась перемѣнной типа δ Cephei съ амплитудой равной 0.05 звѣзд. велич. Періодъ очень близокъ къ найденному мною = 5.54 сут. Астрономъ Юрьевской Обсерваторіи, г. Шенбергъ любезно сообщилъ мнѣ, что онъ нашелъ по своимъ наблюденіямъ при помощи изобрѣтеннаго имъ фотометра, что звѣзда эта перемѣнная, при чемъ періодъ въ точности равенъ найденному мною: 5.47 сут. и амплитуда = 0.08 звѣзд. величины.

Важно теперь сопоставить эпохи фазъ: максимальнаго блеска звѣзды, максимальной интенсивности различныхъ линій и максимальныхъ лучевыхъ скоростей. У перемѣнныхъ звѣздъ обычно эпоха наибольшей яркости совпадаетъ съ эпохой наибольшихъ лучевыхъ скоростей (тѣла находятся на концахъ оси орбиты перпендикулярной къ лучу зрѣнія), а эпохи наименьшей яркости совпадаютъ съ эпохой, когда лучевыя скорости равны нулю. (Предполагается, что движеніе системы исключено).

Г. Гутникъ даетъ въ своей статьѣ максимумъ яркости звѣзды для эпохи = 2420242.2 (J. D.) и періодъ 5.54 сут. Если редуцировать его наблюденія съ болѣе достовѣрнымъ періодомъ = 5.47 сут., то эта эпоха получится = 2420241.9 (J. D.) + $n \times 5.47$ сут.

Наибольшая интенсивность линій Европія получается для эпохъ равныхъ 2420241.5 (J. D.) + n 5.47 сут.

Такое совпаденіе эпохъ не совмѣстимо, такъ какъ наибольшую интенсивность линій можно ожидать, какъ указано выше, только въ эпохи минимума блеска звѣзды (затменіе). Итакъ то тѣло, которое даетъ перемѣнныя линіи Европія въ своемъ спектрѣ не обусловливаетъ перемѣны блеска свѣтила.

Но за то линіи неизвѣстнаго химическаго элемента, характеризуемаго линіями $\lambda = 420.1$ $\mu\mu$ и т. д., становятся наиболѣе интенсивными въ эпохи, отличающіяся отъ указанныхъ на полперіода, т. е. во время минимума яркости свѣтила, что вполнѣ гармонируетъ съ представленіемъ о двухъ тѣлахъ, затмевающихъ одно другое.

На приложенныхъ кривыхъ изображены перемѣны яркости по Гутнику (пунктиромъ обозначена кривая послѣ переработки матеріала съ періодомъ 5.47 сут.), перемѣны интенсивности линій $\lambda = 413.2$ $\mu\mu$, 420.5 и линій $\lambda = 420.1$. Затѣмъ даны кривыя лучевыхъ скоростей компонентовъ линіи $\lambda = 420.5$ $\mu\mu$ (Европія).

Для рѣшенія остающихся открытыхъ вопросовъ разсматриваемаго явленія (уменьшеніе интенсивности линій Европія и соотвѣтствующія перемѣны скоростей) слѣдуетъ искать нѣтъ-ли слѣдовъ вторичнаго фотометрическаго максимума или минимума блеска звѣзды, а также изслѣдовать не представляетъ-ли величина γ (скорость центра) періодической зависимости отъ времени. Если это окажется такъ, то возможно, что тѣло разсматриваемой системы, характеризуемое линіями постоянной интенсивности и постоянной лучевой скоростью, представляетъ тотъ центръ, около котораго оба тѣла съ линіями Европія и линіями неизвѣстнаго химическаго элемента совершаютъ свой круговоротъ. Для рѣшенія этихъ вопросовъ накапливается новый матеріалъ.

Извѣстія Императорской Академіи Наукъ. — 1916.
(Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences).

О вѣроятныхъ движеніяхъ въ спиральной туманности созвѣздія Гончихъ Собакъ (Messier 51), замѣченныхъ стереоскопически.

С. К. Костинскаго.

(Предварительная замѣтка).

(Представлено академикомъ А. А. Бѣлопольскимъ въ засѣданіи Отдѣленія Физико-Математическихъ наукъ 11 мая 1916 г.).

1. Большая спиральная туманность Messier 51, наиболѣе типичная изъ объектовъ этого рода и являющаяся, поэтому, какъ-бы наилучшей иллюстраціей къ извѣстной космогонической гипотезѣ Чемберленъ-Мультона, давно уже интересовала наблюдателей, съ точки зрѣнія возможныхъ измѣненій въ ней — за продолжительный періодъ времени. Еще Lord Ross, открывшій ея спиральность весною 1845 года, выражаетъ сомнѣніе, чтобы объектъ такого рода могъ существовать въ состояніи статическаго равновѣсія — безъ внутреннихъ движеній (Phil. Trans. 1850 г., p. 504). Поэтому, еще въ 1849—50 гг., его ассистентомъ J. Stoney были сдѣланы микрометрическія измѣренія положенія нѣкоторыхъ звѣздъ или узловъ въ туманности — относительно ея центра; затѣмъ, въ 70-хъ годахъ, R. Copeland повторилъ эти измѣренія большимъ рефлекторомъ той-же Обсерваторіи Lord Ross'а въ Birr Castle; къ сожалѣнію, всѣ эти визуальныя измѣренія, сопряженныя съ значительными трудностями вслѣдствіе слабости объекта, повидимому были недостаточно точны для указанной выше цѣли.

Съ 1889 г. по 1904 г. цѣлый рядъ прекрасныхъ фотографическихъ снимковъ туманности былъ полученъ I. Robert'омъ, съ помощью 20-ти дюймоваго рефлектора, и нѣкоторые изъ нихъ были измѣрены какъ имъ

самимъ, такъ и, особенно подробно, его вдовой M-rs Dorothea Isaak-Roberts, именно съ цѣлью изучить возможныя измѣненія въ расположеніи отдѣльныхъ частей туманности. Нѣкоторые намеки на такія измѣненія повидимому получились (см. «Rivista di Astronomia,..» 1910 г. pp. 31—41 и 62—79), но самъ авторъ послѣдняго мемуара считаетъ, по разнымъ причинамъ, свой матеріалъ и средства для его изученія еще недостаточными для рѣшенія этого тонкаго вопроса.

2. Начиная съ 1896 г., мнѣ удалось получить, съ помощью Пулковскаго большого астрографа, 12 снимковъ сказанной туманности съ выдержками отъ 47 минутъ до 3 часовъ, и на нѣкоторыхъ изъ нихъ имѣется цѣлый рядъ тонкихъ и хорошо опредѣленныхъ деталей внутри туманности, которыя большею частью являются замытыми, вслѣдствіе передержки, на фотографіяхъ Roberts'а и позднѣйшихъ снимкахъ Keeler'а; кромѣ того, отчетливость изображеній, какъ извѣстно, значительно выше для нормальныхъ астрографовъ, чѣмъ для очень свѣтосильныхъ рефлекторовъ — на значительномъ протяженіи поля зрѣнія. Все это давало надежду, что при достаточной разности эпохъ можно будетъ замѣтить слабыя движенія отдѣльныхъ узловъ туманности, если они вообще имѣютъ мѣсто.

Дѣйствительно, сравнивая на стереокомпараторѣ первый и послѣдній изъ моихъ снимковъ, снятыхъ въ мартѣ 1896 г. и въ апрѣлѣ 1916 г., я замѣтилъ почти несомнѣнныя смѣщенія, за промежутокъ въ 20 лѣтъ, какъ нѣкоторыхъ характерныхъ узловъ, лежащихъ на спираляхъ туманности, такъ и цѣлаго ряда звѣздъ — въ самой туманности и въ ея окрестностяхъ, часть которыхъ вѣроятно связана съ нею физически.

Предварительныя стереоскопическія измѣренія данной пары пластинокъ, относящіяся къ 36 отдѣльнымъ узламъ, показали, что замѣченныя собственныя движенія ихъ, относительно центра туманности, имѣютъ, повидимому, систематическій характеръ въ различныхъ ея частяхъ, и привели меня къ слѣдующимъ предварительнымъ выводамъ:

а) на внѣшней спирали (I) туманности движенія происходятъ такимъ образомъ, что какъ будто отдѣльныя части ея въ общемъ удаляются отъ центра (N), при чемъ спираль имѣетъ тенденцію закручиваться въ направленіи противъ движенія стрѣлки часовъ;

б) наоборотъ, во внутренней спирали (II), въ восточной ея части, преобладаетъ направленіе движеній къ центру туманности, и если есть тенденція закручиваться, то скорѣе въ противоположномъ направленіи — по стрѣлкѣ часовъ;

г) въ среднемъ, собственныя движенія отдѣльныхъ узловъ или звѣздъ

суть порядка 0.″04 —0.″05 въ годъ, но варіируются въ довольно широкихъ предѣлахъ.

Въ окрестностяхъ туманности Messier 51, на тѣхъ-же пластинкахъ, мною отмѣченъ еще цѣлый рядъ слабыхъ и болѣе яркихъ звѣздъ съ весьма замѣтнымъ собственнымъ движеніемъ. Между прочимъ, на 26′ къ ENEtE отъ центра туманности находится двойная звѣзда, съ разстояніемъ компонентовъ около 5″, и составляющіе которой (11—12 вел. каждый) имѣютъ несомнѣнное движеніе относительно другъ друга: возможно, что эта звѣзда окажется новой, физически двойной парой.

Я надѣюсь, что детальная обработка имѣющагося у меня подъ руками матеріала позволитъ выяснить въ ближайшемъ будущемъ, насколько реальны отмѣченные выше результаты предварительныхъ измѣреній этого интереснаго небеснаго объекта.

Пулково, 10-го мая 1916 г.

Новыя изданія Императорской Академіи Наукъ.

(Выпущены въ свѣтъ 15—31 мая 1916 года).

50) **Извѣстія Императорской Академіи Наукъ.** VI Серія. (Bulletin...... VI Série). 1916. № 9, 15 мая. Стр. 673—780. 1916. lex. 8⁰. — 1616 экз.

51) **Матеріалы для изученія естественныхъ производительныхъ силъ Россіи.** 6. Алюминіевыя руды и возможности ихъ нахожденія въ Россіи. В. В. Аршинова (I+29 стр.). 1916. 8⁰. — 2016 экз. Цѣна 20 коп.; 20 cop.

52) **Пособія для работъ по армяно-грузинской филологіи.** IV. Программа для собиранія діалектическихъ матеріаловъ по грузинскому языку (24 стр.). 1916. 8⁰. — 315 экз. Въ продажу не поступаетъ.

53) **Каталогъ изданій Императорской Академіи Наукъ.** Часть III. Отдѣльныя изданія на иностранныхъ языкахъ. Съ 1726 года по 1-е марта 1916 года (Catalogue des livres publiés par l'Académie Impériale des Sciences. Partie III. Ouvrages publiés séparément en langues étrangéres. Depuis 1726 jusqu'au 1 mars 1916). (I+IV+162 стр.). 1916. 8⁰. — 2015 экз.
Цѣна 10 коп.; 10 cop.

Оглавленіе. — Sommaire.

Заглавіе, отмѣченное звѣздочкою *, является переводомъ заглавія оригинала.
Le titre désigné par un astérisque * présente la traduction du titre original.

Напечатано по распоряженію Императорской Академіи Наукъ.

Май 1916 г. Непремѣнный Секретарь академикъ *С. Ольденбургъ.*

Типографія Императорской Академіи Наукъ (Вас. Остр., 9-я л., № 12).